

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **24 (1969)**

Heft 6

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Aufgaben

Aufgabe 545. Es sei S eine endliche Menge mit n Elementen ($n > 1$). Man bestimme die kleinste natürliche Zahl $f(n)$ mit folgender Eigenschaft: Unter $f(n)$ verschiedenen, beliebig ausgewählten (echten) Teilmengen von S gibt es immer eine, die zu zwei andern elementefremd ist.

P. ERDÖS

Lösung des Aufgabenstellers: Wir benutzen den folgenden Satz (ERDÖS-KO-RADO, Intersection Theorems for Systems of Finite Sets, Quarterly J. of Math. 1961, p. 313–320): Es sei $|S| = n$, $B_j \subset S$, $|B_j| \leq k \leq n/2$, $1 \leq j \leq t$, $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq t$. Dann gilt $\max t = \binom{n-1}{k-1}$.

Nun sei $A_i \subset S$, $1 \leq i \leq k$ ein Mengensystem mit der Eigenschaft, dass zu jedem A_i höchstens ein A_j mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ existiert. Wir wollen k von oben abschätzen. $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$ sei dasjenige Teilsystem, dessen Mengen folgende Bedingungen erfüllen:

1. $|A_{i_j}| \leq n/2$, $1 \leq j \leq r$.
2. Das Komplement \bar{A}_{i_j} gehört auch zum Teilsystem.

Offenbar gilt $A_{i_u} \cap A_{i_v} \neq \emptyset$, $1 \leq u \leq v \leq r$, denn andernfalls hätte man $A_{i_u} \cap A_{i_v} = A_{i_u} \cap \bar{A}_{i_u} = \emptyset$ entgegen der Voraussetzung über die A_i . Die A_{i_j} erfüllen also die Bedingungen für die B_j im Satz, wobei $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Somit ist

$$r \leq \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \quad \text{und} \quad k \leq 2^{n-1} + \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor - 1},$$

da die Anzahl der Teilmengen von S , die mehr als $n/2$ Elemente enthalten, höchstens 2^{n-1} ist. Man sieht leicht, dass diese Schranke für k bestmöglich ist. Für $n = 2m$ bilden die Mengen mit mindestens m Elementen ein System $\{A_i\}$. In diesem Fall ist

$$k = \frac{1}{2} \left(2^{2m} - \binom{2m}{m} \right) = 2^{2m-1} + \binom{2m-1}{m-1}.$$

Für $n = 2m + 1$ wird ein System $\{A_i\}$ geliefert durch die Mengen mit mindestens $m + 1$ Elementen und alle Mengen mit m Elementen, die ein festes Element enthalten.

Wir haben somit das Resultat

$$f(n) = 1 + 2^{n-1} + \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor - 1}.$$

Aufgabe 585. Die Eckpunkte A_i ($i = 1, 2, 3$) eines gegebenen Dreiecks sind die Mittelpunkte von drei Kreisen, die durch einen Punkt P gehen. B_i sei der zweite Schnittpunkt der Kreise um A_{i+1} , A_{i+2} ($A_4 = A_1$, $A_5 = A_2$).

1. Konstruiere die Punkte P , für die das Dreieck $B_1B_2B_3$ gleichseitig ist.
2. Für welche Punkte P liegen B_1, B_2, B_3 auf einer Geraden?
3. Beweise, dass die Umkreise der Dreiecke $A_iB_{i+1}B_{i+2}$ ($i = 1, 2, 3$) sich in einem Punkt schneiden.

J. BREJCHA, Brno, ČSSR

Lösung: Vorbemerkung: Der Winkel $\alpha = \sphericalangle(AXB)$, $0 \leq \alpha < \pi$, zweier Geraden AX und BX sei derjenige Winkel, der von der ungerichteten Geraden AX überstrichen wird, wenn man sie im Uhrzeigersinn auf die Gerade BX dreht, also $\sphericalangle(AXB) = \pi - \sphericalangle(BXA) \pmod{\pi}$. Dann gilt der Peripheriewinkelsatz in folgender Form: Die Punkte X mit $\sphericalangle(AXB) = \alpha = \text{const}$, A, B feste Punkte, sind genau die Punkte eines eindeutig bestimmten Vollkreises durch A und B .

1. Die Punkte B_i entstehen aus P durch Spiegelung an den Dreiecksgeraden $A_{i+1}A_{i+2}$. B_i wird somit durch zwei Spiegelungen, d.h. durch eine Drehung um den doppelten Winkel $2\alpha_{i+1}$ der Spiegelachsen, nach B_{i+2} gebracht. Die Bedingung der Gleichseitigkeit

$$\overline{B_i B_{i+2}} = 2 \cdot \overline{A_{i+1} P} \cdot \sin \alpha_{i+1} = c = \text{const für } i = 1, 2, 3$$

führt mit dem Sinussatz zu $\overline{A_i P} : \overline{A_j P} = a_i : a_j$ ($a_i = \overline{A_{i+1} A_{i+2}}$). Das Dreieck $B_1 B_2 B_3$ ist daher genau dann gleichseitig, wenn P Schnittpunkt der drei Apollonischen Kreise ist.

2. Die Dreiecksgerade $A_{i+1}A_{i+2}$ schneidet die Strecke $\overline{PB_i}$ senkrecht im Streckenmittelpunkt M_i . Liegen die Punkte B_i auf einer Geraden, dann auch die Punkte M_i . Die Lotfusspunkte M_i der von P aus auf die Dreiecksgeraden gefällten Lote liegen genau dann auf einer Geraden, wenn P auf dem Umkreis des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ liegt (Satz von Wallace).

3. Q und B_2 seien die Schnittpunkte der Umkreise der Dreiecke $B_2 A_1 B_3$ und $B_1 A_3 B_2$. Aus der in der Vorbemerkung angegebenen Winkeldefinition und dem Peripheriewinkelsatz folgt

$$\sphericalangle(B_1 Q B_3) = \sphericalangle(B_1 Q B_2) + \sphericalangle(B_2 Q B_3) = 2(\alpha_1 + \alpha_3) \bmod \pi = -2\alpha_2 \bmod \pi = \sphericalangle(B_1 A_2 B_3),$$

d.h. Q liegt auch auf dem Umkreis von Dreieck $B_1 A_2 B_3$.

W. VINZENZ und R. KOCH, München

Weitere Lösungen sandten J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), R. WHITEHEAD (Hayle/England), D. VELJAN, Zagreb.

Aufgabe 586. Show that

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k/2}{m} = \frac{n}{m} \binom{n-m-1}{m-1} 2^{n-2m} \quad (m \geq 1).$$

L. CARLITZ, Duke University, USA

Lösung: Wir setzen

$$y_n(x) = (1 + \sqrt{1+x})^n = \sum_{m=0}^{\infty} f(n, m) x^m. \tag{1}$$

Dann ist (vgl. die Lösung von Aufgabe 563, *El. Math.* 23, 139 (1968))

$$f(n, m) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k/2}{m}.$$

Man prüft leicht nach, dass $y_n(x)$ der Rekursion

$$y_{n+2}(x) - 2y_{n+1}(x) - xy_n(x) = 0 \tag{2}$$

genügt. Trägt man in (2) die Reihenentwicklung nach (1) ein, so resultiert für die Größen $f(n, m)$ die partielle Differenzgleichung

$$f(n+2, m+1) - 2f(n+1, m+1) - f(n, m) = 0 \quad (m \geq 1). \tag{3}$$

Nach (1) ist $f(n, 0) = 2^n$, $f(0, 0) = 1$, $f(0, m) = 0$ für alle $m \geq 1$. Offensichtlich lassen sich nach (3) alle Werte $f(n, m)$ rekursiv berechnen, wenn nur die «Anfangswerte» $f(n, 1)$ für alle n und $f(1, m)$ für alle m bekannt sind. Aus (1) folgt nun unmittelbar

$$f(n, 1) = n 2^{n-2}, \quad f(1, m) = \binom{1/2}{m} \text{ für alle } n \text{ und } m \geq 1. \tag{4}$$

Der Ausdruck

$$\frac{n}{m} 2^{n-2m} \binom{n-m-1}{m-1}$$

stimmt für $m = 1$ und alle $n \geq 1$ sowie für $n = 1$ und alle $m \geq 1$ mit den Werten in (4) überein. Ausserdem prüft man leicht durch Einsetzen in (3) nach, dass er Lösung dieser Differenzgleichung ist.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung, die an die Anfangswerte (4) angepasst ist, wird daher durch

$$f(n, m) = \frac{n}{m} 2^{n-2m} \binom{n-m-1}{m-1}$$

gegeben. Damit ist die in Aufgabe 586 behauptete Identität bewiesen.

G. BACH, Braunschweig

Weitere Lösungen sandten P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf).

Aufgabe 587. Prove that either of the following properties characterize the exponential function:

Property 1. $f(z)$ non-zero, entire and there exists a simple analytic arc A which divides the plane into two unbounded simply connected domains S_1 and S_2 with

$$f(S_1) \subset \{w: |w| < 1\} \text{ and } f(S_2) \subset \{w: |w| > 1\}.$$

Property 2. $f(z)$ entire and the image of the left and right half planes are contained in $\{w: |w| < 1\}$ and $\{w: |w| > 1\}$ respectively.

W. J. SCHNEIDER, Syracuse University, USA

Solution by the Proposer: 1) Theorem: The only function $f(z)$ satisfying Property 1 is $f(z) = e^{az+b}$ ($a \neq 0$).

Proof. $h(z) (= \log f(z))$ is analytic and by continuity purely imaginary on A and only on A . Since A is a simple analytic arc there exists an analytic homeomorphism $h(t)$ from a neighborhood of the open unit interval I onto a neighborhood of A with $h(I) = A$ ([1], p. 192 (paragraph 2)). The function $g(t) = i h(h(t))$ is a 1-1 analytic map from I into the reals. If it were not 1-1 then $g'(t)$ would equal zero at some point and this would imply $h'(z)$ would equal zero at some point z_0 of A . This would mean by the local mapping correspondence ([1], pp. 107-108) there would be at least four distinct arcs emanating from z_0 on which $h(z)$ is imaginary which would contradict Property 1. The fact $g(z)$ is 1-1 on I implies $h(z)$ is 1-1 on A . Now by the Picard theorem ([2], pp. 277-282) and the fundamental theorem of algebra $h(z)$ is a polynomial of exactly degree one. Therefore $f(z) = e^{az+b}$ ($a \neq 0$).

2) Corollary to the Theorem: The only function satisfying Property 2 is $f(z) = e^{az}$ (a real and positive).

Proof. The function $f(z)$ is non-zero in the left half plane for otherwise, by the reflection principle ([1], p. 191 (paragraph 4)), $f(z)$ would have a pole in the right half plane. By the Theorem, $f(z) = e^{az} e^b$. Therefore $|f(0)| = |e^b| = 1$, which implies b is imaginary. Since $|f(z)| = 1$ on the imaginary axis, az must be imaginary on the imaginary axis (hence a is real). Property 2 implies $a > 0$ and $b = 2n\pi i$ ($n = 0, 1, -1, \dots$).

REFERENCES

- [1] L. V. AHLFORS, Complex Analysis, 1st edition (McGraw-Hill, 1953).
 [2] E. C. TITCHMARSH, The Theory of Functions, 2nd edition (Oxford University Press, 1939).

Aufgabe 588. Ist n eine natürliche Zahl und p eine Primzahl, so gilt

$$(p \ n - 1)! [(n - 1)!]^{-p} n^{1-p} \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow n = p^k.$$

E. TROST, Zürich

Lösung: Wir bezeichnen mit $F(n)$ die linke Seite der obigen Kongruenz, mit $e(n)$ den Exponenten von p in der Primzerlegung von n und mit $s(n)$ die p -adische Quersumme von n . Bekanntlich ist (vgl. A. M. LEGENDRE, Théorie des nombres, 1808)

$$e(n!) = \frac{n - s(n)}{p - 1}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} e(F(n)) &= e((p n - 1)!) - p e((n - 1)!) - (p - 1) e(n) \\ &= 1 + \frac{p s(n - 1) - (s(n - 1) + p - 1)}{p - 1} - (p - 1) e(n) \\ &= 1 + s(n - 1) - 1 - (p - 1) e(n) \\ &= (p - 1) e(n) + s(n p^{-e(n)}) - 1 - (p - 1) e(n) \\ &= s(n p^{-e(n)}) - 1. \end{aligned}$$

Daher ist $e(F(n)) \geq 0$ und $e(F(n)) = 0$ genau dann, wenn $n p^{-e(n)} = 1$ ist.

H. SCHEID, Mainz

J. FEHÉR (Pécs/Ungarn) bemerkt, dass in der Aufgabenstellung $\equiv 0 \pmod{p}$ durch $\equiv -1 \pmod{p}$ ersetzt werden kann. In der Tat gilt, wenn die linke Seite der Kongruenz wieder mit $F(n)$ bezeichnet wird,

$$F(p^s) = \frac{1}{p} \prod_{k=1}^p \binom{k p^s}{p^s} \equiv \frac{1}{p} p! = (p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), P. BUNDSCHUH (Freiburg i.Br.), L. CARLITZ (Duke University, USA), Ž. M. MITROVIĆ (Vranje), E. J. F. PRIMROSE (Leicester), Dragutin SVRTAN, Zagreb.

Neue Aufgaben

Aufgabe 610. Man zeige, dass in jedem ebenen Dreieck gilt:

- a) Harmonisches Mittel der beiden grösseren Höhen \geq kleinste Winkelhalbierende.
- b) Grösste Winkelhalbierende \geq harmonisches Mittel der beiden kleineren Seitenhalbierenden.

Das Gleichheitszeichen gilt jeweils nur im gleichseitigen Dreieck.

P. ERDÖS, Budapest, und F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Aufgabe 611. Let p be an odd prime, $(a, p) = 1$. Show that

$$S = \sum_{s=1}^{p-1} \tan \frac{\pi a s^2}{p} \begin{cases} 0 & (p \equiv 1 \pmod{4}) \\ \left(\frac{-a}{p}\right) \sqrt{p} \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \binom{k}{p} & (p \equiv 3 \pmod{4}), \end{cases}$$

where (a/p) is the Legendre symbol.

L. CARLITZ, Duke University, USA

Aufgabe 612. Für natürliche Zahlen k, t, b mit $k \geq 3, t \geq 2, b < t$ werde gesetzt:

$$H_k(b t^{-1}) = \sum_{n \geq 0} b^{k n} (t^{k n} + b^{k n})^{-1}.$$

Man zeige: $H_k(b t^{-1})$ ist irrational, wenn $b < t^{1-1/k}$ für ungerades k und wenn $b < t^{1-1/(k-1)}$ für gerades k .

(Diese Aufgabe löst eine offene Frage aus einer Arbeit von W. SCHWARZ, Remarks on the Irrationality and Transcendence of Certain Series, Math. Scand. 20, 269–274 (1967).)

P. BUNDSCHUH, Freiburg i.Br.

Aufgabe 613. Drei Geraden g_1, g_2, g_3 des Raumes R_3 schneiden sich in drei verschiedenen Punkten. Man bestimme alle Raumpunkte P mit der Eigenschaft: Die Fusspunkte der Lote von P auf g_1, g_2, g_3 sind kollinear. O. REUTTER, Ochsenhausen

Literaturüberschau

ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Herausgegeben in Verbindung mit dem Zentrum für Didaktik der Mathematik an der Universität Karlsruhe und der internationalen mathematischen Unterrichtskommission (IMUK); Verlag Ernst Klett, Stuttgart.

Mit dem vorliegenden Heft 1/69 ist der 1. Jahrgang dieser neuen Zeitschrift eröffnet worden. Die Zeitschrift ist geschaffen worden auf gemeinsame Initiative des Zentrums für Didaktik der Mathematik an der Universität Karlsruhe und des Klett-Verlages in Stuttgart; prominente Mathematiker, darunter auch namhafte Vertreter der Didaktik der Mathematik, stehen ihr im Redaktionskomitee und im wissenschaftlichen Beirat zur Seite, die Geschäftsführung besorgt Hans Wäsche. – Wer einigermaßen um die Mannigfaltigkeit und den Umfang der Publikationen zur Didaktik der Mathematik in den letzten Jahrzehnten Bescheid weiss, wird die Herausgabe dieses Zentralblattes freudig begrüssen! Bereits die erste Nummer zeigt eine Konzeption, die wohl von den meisten Lesern als sehr glücklich und vielversprechend empfunden wird: Der erste Teil, *Berichtsteil* genannt, enthält zunächst einen Analysenteil. Darin sollen Veröffentlichungen zu einem Thema oder mit einer bestimmten didaktischen Funktion zusammengestellt und im Hinblick auf dieses Thema und auf die jeweilige Zielsetzung analysiert werden; dadurch ergeben sich Stellungnahmen, die unter Umständen weit über eine blossе Rezension hinausgehen. Anschliessend folgen Rezensionen und dann Informationen (Literaturbericht, Mitteilungen über Seminare, Kongresse usw.). Der zweite Teil, der *Dokumentationsteil*, enthält kurze Angaben über Zeitschriftenartikel und Bücher, die in den Rahmen dieses Zentralblattes fallen, und ist so angelegt, dass er in Karteikarten zerschnitten werden kann. Beide Hauptteile bedeuten jedem an der Didaktik der Mathematik Interessierten, natürlich vor allem dem Lehrer der Mathematik an höheren Schulen, eine sehr grosse Hilfe. Es sei deshalb sehr empfehlend auf diese neue Zeitschrift hingewiesen, die – bei genügend breiter Verankerung in möglichst weitem Kreise – zu grosser Bedeutung gelangen kann.

R. INEICHEN

Linear Transformations and Matrices. Von F. A. FICKEN. XIII und 398 Seiten. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1967.

Es handelt sich um eine Einführung in die Theorie der reellen und komplexen linearen Räume. Zum Verständnis des Textes ist recht wenig vorausgesetzt: Elementare Algebra (Arithmetik) und Geometrie sowie die Kenntnis der Sinus- und Kosinusfunktion.

Die ersten vier Kapitel dienen als Einführung. Die logischen Grundlagen der mathematischen Sprache werden mit den Grundlagen der Mengenalgebra erläutert. Der Funktionsbegriff wird klar und sauber dargestellt und die Menge der reellen Zahlen aufgebaut. Schliesslich wird die Vektoralgebra des dreidimensionalen Euklidischen Raumes – vor allem mit Hilfe ihrer geometrischen Veranschaulichung und Anwendung – entwickelt. Mit Hilfe der vielen Ergebnisse zeigt der Autor im 4. Kapitel (Mengen und Strukturen) alle für den weiteren Aufbau des Buches notwendigen algebraischen Abstraktionen.

Der lineare Raum wird formell im 5. Kapitel eingeführt. Es folgen: Lineare Transformationen, Lineares Funktional und Dualität, Einige Eigenschaften von Matrizen, Systeme linearer algebraischer Gleichungen und Äquivalenz von Matrizen, Bilineare und quadratische Formen und Funktionale, Determinanten, Ähnliche Operatoren, Unitäre und Euklidische Räume, Ähnliche Operatoren in Unitären Räumen. Der Autor legt grossen Wert auf die Anschauung. Wenn immer möglich wird die «Basis-freie» (Koordinaten-freie) Darstellung gewählt. Neue Begriffe und Resultate werden an Beispielen illustriert.