Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **24 (1969)**

Heft 1

PDF erstellt am: **20.09.2024**

(Diese *Übergangswahrscheinlichkeiten* w_{jk} sind als bedingte Wahrscheinlichkeiten nicht definiert für jene j, für die $P(Y_n = j) = 0$ ist.)

Diesen Galton-Watson-Prozess, der also eine spezielle Markoffsche Kette darstellt, haben wir in unseren obigen Betrachtungen daraufhin untersucht, dass er spätestens in der n-ten Generation abbricht, wofür wir die Wahrscheinlichkeit

$$q_n = P(Y_n = 0)$$

durch (1) angegeben haben. Ist aber $Y_n = 0$, so folgt aus der Definition des Prozesses

$$P(Y_{n+1} = 0 / Y_n = 0) = w_{00} = 1 .$$

Das heisst aber, dass mit der n-ten auch alle spätern Generationen 0 Objekte haben: Die Linie erlischt, das Geschlecht stirbt aus. Der Zustand $Y_n = 0$ stellt einen *absorbierenden* Zustand dar; er kann nicht mehr verlassen werden. – Mit $q = \lim_{n\to\infty} q_n$ haben wir weiter die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass die Linie im Laufe der Zeit erlischt.

Soll unser Prozess in anderer Richtung untersucht werden, indem wir z.B. nach der Wahrscheinlichkeit fragen, in einer bestimmten Generation eine gewisse Anzahl von Objekten vorzufinden, so bieten sich als geeignete mathematische Hilfsmittel erzeugende Funktionen an; es sei dafür auf [1], [3] oder [4] verwiesen.

ROBERT INEICHEN, Luzern/Fribourg

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 2. Aufl. (New York, London 1957).
[2] T.E. HARRIS, *The Theory of Branching Processes*, (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 119), (1963).
[3] R. INEICHEN, *Vom Aussterben der Geschlechter*, Mitt. naturf. Ges. Luzern, *21* (1967).
[4] A. LOTKA, *Théorie analytique des associations biologiques*, IIe partie (Paris 1939).
[5] A. MOSER, *Familienstatistik und Bevölkerungsvermehrung*, Mitt. des statist. Büros des Kantons Bern, Nr. 45 (1962).
[6] E. SCHRÖDINGER, *Probability Problems in Nuclear Chemistry*, Proc. R. Ir. Acad. *51* (1945–48).

Kleine Mitteilungen

Super Perfect Numbers

A positive integer n is called a super perfect number if $\sigma(\sigma(n)) = 2n$, where $\sigma(n)$ is the sum of all the divisors of n. The problem of finding super perfect numbers is similar to that of finding perfect numbers.

In this note we prove the following theorem concerning even super perfect numbers and pose the existence of odd super perfect numbers as a problem:

Theorem. An even integer n is super perfect if and only if n is of the form 2^r, where $2^{r+1} - 1$ is a prime.

Proof. Firstly, let $n = 2^r$, where $2^{r+1} - 1$ is a prime. Then $\sigma(\sigma(n)) = \sigma(2^{r+1} - 1) = 2^{r+1} = 2n$, so that n is a super perfect number.

Secondly, let n be any even super perfect number. Then we can write $n = 2^r q$, where q is odd. Since n is super perfect, we have

$$2^{r+1} q = 2n = \sigma(\sigma(n)) = \sigma((2^{r+1} - 1)\,\sigma(q)) . \tag{1}$$

If $q > 1$, then $(2^{r+1} - 1)\,\sigma(q)$, $\sigma(q)$, $(2^{r+1} - 1)$ and 1 are distinct divisors of $(2^{r+1} - 1)\,\sigma(q)$, so that from (1), we have

$$2^{r+1} q \geqslant (2^{r+1} - 1)\,\sigma(q) + \sigma(q) + (2^{r+1} - 1) + 1 = 2^{r+1}\,(\sigma(q) + 1) > 2^{r+1} q\,,$$

a contradiction. Therefore $q = 1$, so that from (1), we have $2^{r+1} = \sigma\,(2^{r+1} - 1)$, which implies that $2^{r+1} - 1$ is a prime. Hence $n = 2^r$, where $2^{r+1} - 1$ is a prime. Thus the theorem is proved.

Problem. Are there odd super perfect numbers?

D. SURYANARAYANA, Waltair, India

Bemerkung zur Aufgabe 493

In den Anwendungen der Aufgabe [1] wurde gezeigt, dass die unimodular zentro-affine Krümmung eines Ovals relativ zum Schwerpunkt einem Vierscheitelsatz genügt.

Es sei nun P ein innerer Punkt eines Ovals K. Die polare Reziproke von K bezüglich des Einheitskreises mit dem Mittelpunkt P sei K^P. Wenn F den Flächeninhalt bezeichnet, so ist $F(K)\,F(K^P)$ eine affine Invariante [2]. Die Bestimmung des Minimums dieses Ausdrucks, d.h.

$$\min_{K}\,\min_{P\in K} F(K)\,F(K^P)$$

ist eine ungelöste Frage. Das Minimum ist allgemein $\geqq 27/4$ (angenommen für ein Dreieck bezüglich seines Schwerpunkts) und $\geqq 8$ für ein symmetrisches Oval[1]. Die Stützfunktion von K, gemessen von P, sei $h(\theta)$. Hier ist θ der Stützwinkel. Dann ist $h^{-1}(\theta)$ der Radiusvektor von K^P als Funktion des Polarwinkels θ. SANTALÓ [2] hat bewiesen, dass $F(K)\,F(K^P)$ ein einziges Minimum in K hat und dass der entsprechende Punkt P durch

$$\int_0^{2\pi} h^{-3}(\theta)\sin\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} h^{-3}(\theta)\cos\theta\,d\theta = 0$$

charakterisiert ist. Man überzeugt sich leicht, dass dies bedeutet, dass P der Schwerpunkt von K^P ist. Die letztere Bedingung definiert also einen einzigen Punkt in K.

Wenn K einen stetigen euklidischen Krümmungsradius $R(\theta)$ besitzt, so ist die unimodular zentro-affine Krümmung gleich $k(\theta) = (R\,h^3)^{-1} = h^{-3}/R$. Aus Aufgabe 493 folgt sofort: *Die unimodular zentro-affine Krümmung eines Ovals relativ zum Minimalpunkt von* $F(K)\,F(K^P)$ *genügt einem Vierscheitelsatz.*

(Research partially supported by NSF Grant GP-5760.)

H. GUGGENHEIMER, University of Minnesota, Minneapolis, Minn.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Aufgabe 493, El. Math. *21*, 17–18 (1966).

[2] L. A. SANTALÓ, *Un invariante afin para las curvas convexas del plano.* Matematicae Notae *8*, 103–111; L. A. SANTALÓ, *Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones,* Portugaliae Math. *8*, 155–161 (1949).

[1]) K. MAHLER, Ein Minimalproblem für konvexe Polygone, Mathematica (Zutphen) B. 7, 118–127 (1938/39). Diesen Hinweis verdanke ich Herrn Dr. E. Heil, Darmstadt.

Aufgaben

Aufgabe 564. Ein Glücksspiel wird nach folgender Regel gespielt: In einer Urne befinden sich n Kugeln, die die Nummern $1, 2, \ldots, n$ tragen. Ein Spieler darf nach Entrichtung eines Einsatzes diese Kugeln einzeln nacheinander aus der Urne ziehen, und wenn darunter r Kugeln sind, die beim $s$ten Zug die Nummer s trugen, erhält er den $r$fachen Betrag seines Einsatzes zurück.

Man beurteile die Gewinnchance des Spielers unter der Voraussetzung, dass alle möglichen Ausfälle gleich wahrscheinlich sind.

O. REUTTER, Ochsenhausen