

# On a diophantine equation

Autor(en): **Szymiczek, K.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **22 (1967)**

Heft 2

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-25355>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

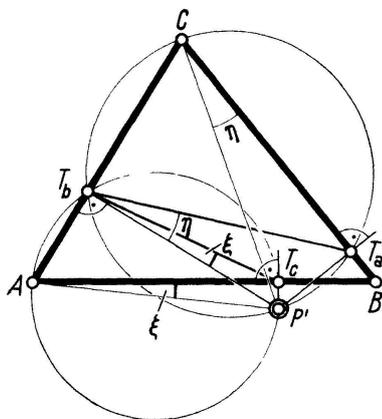
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die Punkte  $P', A, T_b, T_c$  und  $P', C, T_a, T_b$  liegen nach dem Satz von Thales je auf einem Kreis (siehe Figur 2). Bei allgemeiner Wahl von  $P'$  ergeben sich aus dem Peripheriewinkelsatz folgende gleiche Winkel:  $\xi = \sphericalangle P'AB = \sphericalangle P'T_bT_c$ ,  $\eta =$



Figur 2

$\sphericalangle P'CB = \sphericalangle P'T_bT_a$ . Also unterscheiden sich  $\xi$  und  $\eta$  um  $\sphericalangle T_aT_bT_c$ . Genau dann, wenn  $T_a, T_b, T_c$  auf einer Geraden liegen, müssen  $\xi$  und  $\eta$  gleich sein, daher die vier Punkte  $A, B, C, P'$  auf einem Kreis liegen. Also: *Dann und nur dann liegen  $T_a, T_b, T_c$  auf einer Geraden, wenn  $P'$  auf den Umkreis des Dreiecks  $\triangle$  fällt.*

In Verbindung mit der Deutung von (4) erhält man das Ergebnis: *Die gefährliche Fläche beim räumlichen Rückwärtsschnitt ist jener Drehzylinder, der die Ebene  $\varepsilon$  nach dem Umkreis des Dreiecks  $\triangle$  schneidet.* H. STACHEL, Graz

## On a Diophantine Equation

A. SCHINZEL and W. SIERPIŃSKI [2]<sup>1)</sup> have recently showed that all solutions of the equation

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = \left( \left( \frac{y-x}{2} \right)^2 - 1 \right)^2 \tag{1}$$

in natural numbers  $x, y, x < y$  are of the form  $x = x_n, y = x_{n+1}, n = 0, 1, \dots$ , where  $x_0 = 1, x_1 = 3, x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$ . Equation (1) is a special case of the equation

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2 \tag{2}$$

whose all solutions are still unknown (cf. [2]–[5]). Moreover, the only known solution of (2) which is not a solution of (1) is  $x = 4, y = 31, z = 11$  ([5]; cf. [2], [3]).

The purpose of this note is to give all solutions in natural numbers  $t, x, y$  of the equation

$$(x^2 - t^2)(y^2 - t^2) = \left( \left( \frac{y-x}{2} \right)^2 - t^2 \right)^2. \tag{3}$$

<sup>1)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 38.

We shall prove the following

*Theorem.* All solutions of the Equation (3) in distinct natural numbers  $t, x, y, x < y$ , are of the form

$$t = |m^2 - 2n^2|k, \quad x = (m^2 + 2n^2)k, \quad y = (3m^2 + 8mn + 6n^2)k, \quad (4)$$

where  $m, n, k$  are natural numbers.

*Proof.* As in [2] we observe that

$$(x^2 - t^2)(y^2 - t^2) - \left(\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 - t^2\right)^2 = -\frac{1}{16}(x+y)^2(x^2 - 6xy + y^2 + 8t^2).$$

Thus (3) is equivalent to

$$x^2 - 6xy + y^2 + 8t^2 = 0,$$

which may be written in the form

$$(y - 3x)^2 = 8(x^2 - t^2). \quad (5)$$

First of all,  $t < x$ . Further, from (5) it follows that  $4 | y - 3x$ , so  $y - 3x = 4z$ , where  $z > 0$ , since otherwise  $(y - x)/2 \leq x$  and from  $t < x < y$  and (3) we get  $(x^2 - t^2)(y^2 - t^2) \leq (x^2 - t^2)^2$ ,  $y \leq x$ , which is impossible.

Thus  $z > 0$  and (5) can be written as

$$2z^2 + t^2 = x^2. \quad (6)$$

Consequently, every solution of (5) in natural numbers  $t, x, y, x < y$ , gives a solution of (6) in natural numbers  $t, x, z$ , where  $4z = y - 3x$ . On the other hand, if  $t, x, z$  is a solution of (6) in natural numbers, then the numbers  $t, x, y = 3x + 4z$  are natural,  $x < y$ , and they form a solution of (5).

Thus, in order to find all solutions of (3) in natural numbers  $t, x, y, x < y$  it suffices to know all solutions of (6) in natural numbers  $t, x, z$  and put  $y = 3x + 4z$ .

But all solutions of (6) are the following (cf. [1], p. 41):

$$t = |m^2 - 2n^2|k, \quad x = (m^2 + 2n^2)k, \quad z = 2mnk,$$

where  $m, n, k$  are natural numbers. If we put here  $y = 3x + 4z$ , we get the formulae (4), which completes the proof.

K. SZYMICZEK, Katowice, Poland

#### REFERENCES

- [1] L. E. DICKSON, *Introduction to the Theory of Numbers*, Dover Publications, New York 1957.
- [2] A. SCHINZEL et W. SIERPIŃSKI, *Sur l'équation diophantienne  $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = [((y - x)/2)^2 - 1]^2$* , *El. Math.* 18, 132-133 (1963).
- [3] A. SCHINZEL i W. SIERPIŃSKI, *O równaniu  $x^2 - 2y^2 = k$* , *Roczniki PTM, Seria II: Wiadomości Matematyczne* 7, 229-232 (1964).
- [4] K. SZYMICZEK, *L'équation  $uv = w^2$  en nombres triangulaires*, *Publications de l'Institut Mathématique Beograd* 3 (17), 139-141 (1963).
- [5] K. SZYMICZEK, *O pewnych równaniach diofantycznych związanych z liczbami trójkątnymi*, *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Katowicach, Sekcja Matematyki* 4, 17-22 (1964).