

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **22 (1967)**

Heft 3

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die Strecken \overline{PR}_1 und \overline{PR}_2 sind $\sqrt{2}$ -mal länger als die Abstände x, y des Punktes P von l und m . Es ist zu zeigen, dass das Produkt $p = \overline{PR}_1 \overline{PR}_2 = 2xy$ konstant, d.h. unabhängig von ξ ist, wenn a passend gewählt wird. Wir setzen noch $\overline{C'P'} = w, \overline{P'B} = v$, also $v + w = 3u$.

Nun ist $p = \overline{R_1P'}^2 - \overline{PP'}^2$ und $\overline{R_1P'} = a + \xi, \overline{PP'}^2 = \overline{AP'} \overline{P'B} = (u + w)v$. Da $\xi/\eta = v/3u$ und nach (4) $\eta = u\sqrt{3}$, so ist $\xi = v/\sqrt{3}$, und es wird

$$p = \left(a + \frac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{v+w}{3} + w\right)v = a^2 + \left(\frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{4w}{3}\right)v.$$

Lässt man nun den Punkt P auf der Schnittkurve und damit den «Grundkreis» auf der Kegelfläche variieren, so bleiben a und w konstant; der Koeffizient von v kann durch die Wahl von $a = 2w/\sqrt{3}$ zum Verschwinden gebracht werden. Damit ist die Konstanz von $p = 2xy = a^2$ erreicht.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C. A. BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor EUKLIDES*, 1870, S. 159.
- [2] K. FLADT, *Geschichte und Theorie der Kegelschnitte*, 1965, S. 6–7.
- [3] TH. HEATH, *A Manual of Greek Mathematics*, Oxford 1931, S. 155–157.
- [4] EDM. HOPPE, *Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum*, Heidelberg 1911, S. 188–189.
- [5] JOH. TROPFKE, *Geschichte der Elementarmathematik*, 2. A., Band VI, S. 131.
- [6] B. L. VAN DER WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft*, Basel 1956, S. 249–250.
- [7] H. G. ZEUTHEN, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, S. 462–465.

Aufgaben

Aufgabe 525. Die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind Zentren von drei gleichen Kreisen K_1, K_2, K_3 vom Radius r . Ein beliebiger Punkt P der Ebene des Dreiecks werde an K_1 nach P_1 gespiegelt, ebenso P_1 an K_2 nach P_2 und P_2 an K_3 nach P_3 . Welches ist der geometrische Ort der Fixpunkte der Abbildung $P \rightarrow P_3$, wenn r variiert?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

1. *Lösung.* Zunächst zwei Vorbetrachtungen. a) Bezeichnet s_i die Spiegelung am Kreis K_i ($i = 1, 2, 3$), dann gilt $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = e$ (= identische Abbildung). Aus der Frage nach den Punkten P mit $s_3 s_2 s_1(P) = P$ ergibt sich daher wegen der Umkehrbarkeit der Abbildungen s_i als gleichwertig $s_2 s_1(P) = s_3(P)$ mit $s_2 s_1(P) = s_2(P_1) = P_2$. – b) Wird die Ebene als komplexe Zahlenebene aufgefasst, dann stellt sich die Spiegelung s_i an dem Kreis $K_i(M_i; r)$ dar in der Form

$$s_i(P) = M_i + \frac{r^2}{\overline{P} - \overline{M}_i} = \frac{r^2 - M_i \overline{M}_i + M_i \overline{P}}{\overline{P} - \overline{M}_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Es kann ohne Einschränkung $M_1 = O, M_2 = \sqrt{3} + i =: M, M_3 = \sqrt{3} - i =: \overline{M}$ angenommen werden; die Seitenlänge des Dreiecks ist dann gleich 2 und $I = 2/\sqrt{3}$ der Mittelpunkt. Dann ist

$$s_1(P) = P_1 = \frac{r^2}{\overline{P}}, \quad s_2(P_1) = s_2 s_1(P) = \frac{(r^2 - 4)P + M r^2}{r^2 - \overline{M}P},$$

$$s_3(P) = \frac{r^2 - 4 + \overline{M} \overline{P}}{\overline{P} - M}.$$

Die Bedingung $s_2 s_1(P) = s_3(P)$ führt auf

$$0 = (r^2 - 4 + \bar{M}^2) P \bar{P} + (r^2 - 4) (\bar{M} - M) P + r^2 (M - \bar{M}) \bar{P} - r^2 (r^2 - 4 + M^2).$$

Da nur die reellen Fixpunkte der Abbildung interessieren, kann in Real- und Imaginärteil getrennt werden ($P = x + iy$):

$$\begin{cases} 0 = (r^2 - 2) (x^2 + y^2 + 4y - r^2) & 0 = x^2 + y^2 - 4x/\sqrt{3} + r^2 \\ = (r^2 - 2) [x^2 + (y + 2)^2 - (r^2 + 4)], & = (x - 2/\sqrt{3})^2 + y^2 - (4/3 - r^2). \end{cases}$$

Reelle Punkte können also nur erhalten werden, wenn gilt: $0 < r \leq 2/\sqrt{3}$ (= Radius des Umkreises von $M_1 M_2 M_3$); der Faktor $r^2 - 2$ der ersten Gleichung kann daher unterdrückt werden. Durch Addition der Gleichungen erkennt man, dass die reellen Fixpunkte auf dem Kreis

$$0 = x^2 + y^2 - 2x/\sqrt{3} + 2y = (x - 1/\sqrt{3})^2 + (y + 1)^2 - 4/3$$

liegen, und zwar – auf Grund der angegebenen Einschränkung, der r unterliegt – auf dem durch die Punkte $O = M_1$, $2/\sqrt{3} = I$ und $\sqrt{3} - i = M_3$ bestimmten Kreisbogen, die Endpunkte M_1 und M_3 ausgenommen.

G. GEISE, Dresden

2. Lösung (des Aufgabenstellers). Die Abbildung $T: P \rightarrow P'''$ hat, da sie keine Inversion sein kann, genau zwei reelle oder imaginäre Fixpunkte. Der Orthogonalkreis K von K_1, K_2, K_3 geht bei T in sich über, und T induziert auf ihm eine Projektivität, die zwei, also alle Fixpunkte von T enthält. Es seien A_1, A_2, A_3 die Zentren der gegebenen Kreise. P ein beliebiger Punkt von K . Dann ist P' der zweite Schnittpunkt von $A_1 P$ mit K , P'' der zweite Schnittpunkt von $A_2 P'$ mit K und analog wird P''' bestimmt. Soll nun P''' mit P zusammenfallen, so bilden P, P', P'' die Ecken eines K einbeschriebenen Dreiecks, dessen Seiten resp. durch A_1, A_2, A_3 gehen (Spezialfall der CASTILLONSchen Aufgabe). Da aber $\triangle A_1 A_2 A_3$ gleichseitig und konzentrisch mit K ist, wird $\triangle P P' P''$ ebenfalls gleichseitig. P ist daher einer der beiden Schnittpunkte von K mit dem Kreisbogen $A_1 O A_3$ ($O =$ Zentrum von K). Dieser Bogen ist von r unabhängig, stellt also den gesuchten geometrischen Ort dar. (Die Ergänzung des Kreisbogens $A_1 O A_3$ zum vollen Kreis ist der geometrische Ort für die Fixpunkte der analogen Transformation mit negativer Inversionspotenz $p = -r^2$.)

Eine weitere Lösung sandte H. MEILI (Winterthur).

Aufgabe 526. Trouver tous les nombres premiers qui sont sommes de deux nombres tétraédraux (c'est-à-dire de la forme $T_n = n(n+1)(n+2)/6$, $n = 1, 2, \dots$).

A. SCHINZEL, Varsovie

Solution. Clearly the relation

$$p = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{6} m(m+1)(m+2) \quad (n \geq 1, m \geq 1)$$

is equivalent to

$$6p = a^3 - a + b^3 - b = (a+b)(a^2 - ab + b^2 - 1),$$

where $a = n+1 \geq 2$, $b = m+1 \geq 2$.

Since p is prime we have the following possibilities.

- (1) $a+b=6$, $a^2 - ab + b^2 - 1 = p$, (2) $a+b=p$, $a^2 - ab + b^2 = 7$,
 (3) $a+b=2p$, $a^2 - ab + b^2 = 4$, (4) $a+b=3p$, $a^2 - ab + b^2 = 3$,
 (5) $a+b=6p$, $a^2 - ab + b^2 = 2$.

In case (1) we have either $a=b=3$, $p=8$ or $a=2$, $b=4$, $p=11$. In case (2) we have $a=3$, $b=2$, $p=5$. In case (3) we have $a=b=2$, $p=2$. Case (4) leads to no solution. Similarly for case (5). Hence the only admissible solutions are $2 = T_1 + T_1$, $5 = T_1 + T_2$, $11 = T_1 + T_3$.

L. CARLITZ, Duke University, Durham, N.C., USA

Weitere Lösungen sandten W. J. BLUNDON (University of Newfoundland, Canada), P. BUNDSCHUH (Freiburg/Br.), H. HARBORTH (Braunschweig), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), D. VOICULESCU (Bukarest).

Aufgabe 527. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui ne sont pas sommes de deux nombres triangulaires (c'est-à-dire de la forme $t_n = n(n+1)/2$, $n = 1, 2, \dots$).

W. ŚIERPIŃSKI, Varsovie

Solution. Let $2p = m^2 + m + n^2 + n$. Then $4p + 1 = (m + n + 1)^2 + (m - n)^2$, so that $4p + 1$ is expressible as a sum of two squares. By the Dirichlet Theorem there are infinitely many primes p^* of the form $5 + 9k$. Since

$$4p^* + 1 = 3(7 + 12k) = u^2 + v^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

implies $u \equiv v \equiv 0 \pmod{3}$ and the factor 3 appears exactly once in the factorization of $4p^* + 1$, there are infinitely many primes p such that $4p + 1$ is not a sum of two squares, and therefore infinitely many primes p not the sum of two triangular numbers.

W. J. BLUNDON, University of Newfoundland, Canada

Bemerkung des Aufgabenstellers: A. SCHINZEL (Warschau) vermutet, dass unendlich viele Primzahlen als Summe von zwei Dreieckszahlen darstellbar sind und dass das mit der Dispersionsmethode von YU. V. LINNIK bewiesen werden kann.

Weitere Lösungen sandten P. BUNDSCHUH (Freiburg/Br.), L. CARLITZ (Durham, USA), H. HARBORTH (Braunschweig), D. VOICULESCU (Bukarest).

Aufgabe 528. Man zeige, dass die Koeffizienten a_n der Potenzreihenentwicklung von

$$\frac{-x}{(1-x)\log(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

asymptotisch durch $1/\log n + O(1/\log^2 n)$ gegeben sind. GÜNTER BACH, Braunschweig

Lösung. Geht man mit den bekannten Entwicklungen für $1/(1-x)$ bzw. $\log(1-x)$ in die linke Seite von (1) ein (die Funktion ist für $x = 0$ regulär), so erhält man für die a_n die folgende Rekursionsformel:

$$1 = \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_{n-2}}{3} + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n \quad (n \geq 0); \tag{2}$$

die rechte Seite von (2) werde $L_n(a)$ genannt. Dabei sind alle $a_\nu > 0$. Denn es ist $a_0 = 1 > 0$. Seien jetzt $a_0, \dots, a_{n-1} > 0$. Beachtet man $L_n(a) = 1 = L_{n-1}(a)$ und eliminiert hieraus a_n , so folgt

$$a_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) a_0 + \dots + \left(1 - \frac{1}{2}\right) a_{n-1} > 0,$$

da alle

$$\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} > 0 \text{ für } \nu = 1, \dots, n.$$

Ebenso sieht man aus (2): $a_n < 1$ für $n \geq 1$ und weiter durch Rechnung $a_0 > a_1 > a_2 > a_3$. Man vermutet $a_{n-1} > a_n$ für $n \geq 4$. Sei jetzt also $a_0 > \dots > a_{n-2} > a_{n-1}$ bekannt und es werde $a_n \geq a_{n-1}$ angenommen. $L_{n-2}(a) = L_{n-1}(a)$ liefert

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{n} &= \frac{a_0 - a_1}{n-1} + \dots + \frac{a_{n-3} - a_{n-2}}{2} + \frac{a_{n-2} - a_{n-1}}{1} = \frac{a_0 - a_1}{n} \frac{n}{n-1} \\ &+ \dots + \frac{a_{n-2} - a_{n-1}}{2} \frac{2}{1} > \left(\frac{a_0 - a_1}{n} + \dots + \frac{a_{n-2} - a_{n-1}}{2}\right) \frac{n}{n-1}. \end{aligned}$$

$L_{n-1}(a) = L_n(a)$ und Benutzung von $a_{n-1} \leq a_n$ hat zur Folge, dass die letzte Klammer $(\dots) \geq \frac{a_0}{n+1}$ wird, was den Widerspruch $\frac{a_0}{n} > \frac{a_0}{n} \frac{n^2}{n^2-1}$ liefert. Aus (2) folgt

$$1 > a_n \sum_{v=1}^{n+1} \frac{1}{v} > a_n \left[\log(n+1) + \frac{1}{2(n+1)} \right] > a_n \log n \quad (3)$$

unter Benutzung der Eulerschen Summenformel.

Um eine untere Abschätzung für a_n zu bekommen, verwendet man

$$1 = L_{2n}(a) = \frac{a_0}{2n+1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n+2} + \frac{a_n}{n+1} + \dots + a_{2n} = s_0 + \frac{a_n}{n+1} + \dots + a_{2n},$$

woraus

$$1 < s_0 + a_n \sum_{v=1}^{n+1} \frac{1}{v} < s_0 + a_n \left(\log n + \frac{9}{4} \right) \text{ für alle } n \geq 1 \text{ folgt.} \quad (4)$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung schätzt man s_0 ab:

$$s_0 < \left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^2} \right)^{1/2} (a_0^2 + \dots + a_{n-1}^2)^{1/2} < \frac{1}{\sqrt{n}} (a_0^2 + \dots + a_{n-1}^2)^{1/2}. \quad (5)$$

Hier ist für $n \geq [e^4] = 54$: $a_0^2 + \dots + a_{n-1}^2 < \frac{3n}{\log^2 n}$; denn da $a_3 = \frac{3}{8}$, ist

$$a_0^2 + \dots + a_{53}^2 < 1 + \frac{1}{2} + 51 a_3^2 < 9 \text{ und ferner ist } 10 < \frac{3 \cdot 54}{\log^2 54}.$$

Wegen der Induktionsannahme und (3) ist

$$a_0^2 + \dots + a_n^2 < \frac{3n}{\log^2 n} + \frac{1}{\log^2(n+1)}$$

und dies ist $< \frac{3(n+1)}{\log^2(n+1)}$, da $3n \left[\left(\frac{\log(n+1)}{\log n} \right)^2 - 1 \right] < 2$. Hier gilt nämlich für die linke Seite wegen $\log(n+1) < \log n + \frac{1}{n}$ und wegen $n > e^{7/2}$:

$$3n(\dots) < 3n \left[\left(1 + \frac{1}{n \log n} \right)^2 - 1 \right] = 3 \left(\frac{2}{\log n} + \frac{1}{n \log^2 n} \right) < 2.$$

Damit ist für $n > e^4$ wegen (5)

$$s_0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{3n}}{\log n} = \frac{\sqrt{3}}{\log n}$$

und mit (3) und (4)

$$1 < \frac{\sqrt{3}}{\log n} + a_n \log n + \frac{9/4}{\log n} < \frac{4}{\log n} + a_n \log n,$$

woraus schliesslich folgt:

$$\frac{1}{\log n} - \frac{4}{\log^2 n} < a_n < \frac{1}{\log n} \text{ für } n > e^4.$$

P. BUNDSCHUH, Freiburg/Br.

Der Aufgabensteller stellt die linke Seite von (1) durch das Integral $\int_0^1 (1-x)^{-s} ds$ dar.

Man erhält durch Reihenentwicklung des Integranden $a_n = \int_0^1 \Gamma(s+n) \{ \Gamma(1+n) \Gamma(s) \}^{-1} ds$.

Die gewünschte asymptotische Darstellung ergibt sich mittels der Stirlingschen Formel und zweimaliger partieller Integration.

Neue Aufgaben

Aufgabe 549. Werden die Kanten eines regulären Polyeders auf eine beliebige Ebene projiziert, so ist die Summe der Quadrate der Kantenprojektionen stets gleich $2/3$ der Summe aller Kantenquadrate.
 W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Aufgabe 550. $n > 1$ sei eine gegebene natürliche Zahl. Für welche rationalen Zahlen r hat die Diophantische Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & & rx_1 \\ \dots & & & \\ x_n & rx_1 & & rx_{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

eine Lösung $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ mit rationalen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n ?

E. TROST, Zürich

Aufgabe 551. Man beweise: Ist $e_n = \sum_{k=1}^n 2^k/k$ als reduzierter Bruch dargestellt und α_n der Exponent von 2 in der Primzahlpotenzzerlegung des Zählers, so strebt α_n mit n gegen $+\infty$.
 WALDEMAR SCHÖBE, München

Aufgabe 552. In einem Simplex des R_n werden zwei Punkte beliebig so gewählt, dass keiner von ihnen auf einem $(n - 1)$ -dimensionalen Grenzraum liegt. Man zeige, dass die Fusspunkte der Ecktransversalen durch die beiden Punkte auf den Simplexkanten auf einer n -dimensionalen Quadrik liegen.

Bemerkung. Unter dem Fusspunkt P_{ij} der "Ecktransversale" durch den beliebigen Punkt P auf der Kante $A_i A_j$ versteht man den Schnittpunkt der Gerade $A_i A_j$ mit dem $(n - 1)$ -dimensionalen Unterraum, gebildet durch die Punkte

$$A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_{n+1}, P.$$

J. SCHOPP, Budapest

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x -Achse nach rechts, y -Achse nach vorn, z -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Stehen in einem Sehnenviereck $ABCD$ die Diagonalen senkrecht aufeinander, so sind die Summen der Quadrate gegenüberliegender Seiten gleich.
 ▶ Von den vielen möglichen Beweisen dürfte der folgende besonders einfach sein: Spiegle das Dreieck ACD an der Mittelsenkrechten von AC , und die Beziehung ist sofort abzulesen.
2. Ein Sehnenviereck $ABCD$ hat den Umkreismittelpunkt M , seine Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und schneiden sich in P . Die Mittelpunkte der Vierecksseiten und die Punkte M und P können stets als Parallelprojektionen der Ecken eines regulären Oktaeders aufgefasst werden.
 ▶ Benütze zum Beweis den Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABD .
3. Bestimme den Schwerpunkt S des Sehnenvierecks von Aufgabe 2.
 ▶ S teilt die Strecke MP im Verhältnis $1:2$.

4. Auf einer Gerade g sind die Punkte A, P, B (P zwischen A und B) gegeben. Konstruiere den Punkt S auf g so, dass SP das geometrische Mittel von SA und SB ist.
 ▶ Es sei $AP = u, PB = v, SP = x$. Man findet $x = uv/(v - u)$, und der Ausdruck kann konstruiert werden.

Zweite Lösung: Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC . Die Parallele zu BC durch P schneidet AC in U , die Parallele zu AC durch P schneidet BC in V . Die Gerade UV schneidet g in S .

5. Konstruiere ein Dreieck aus der Grundlinie a und der Höhe h_a , wenn die Winkelhalbierende w_α geometrisches Mittel der beiden Abschnitte ist, die sie auf der Grundlinie erzeugt.

▶ Verlängert man die Winkelhalbierende AS bis zum Schnittpunkt T mit dem Umkreis, so ist $ST = w_\alpha$.

Das Dreieck hat folgende merkwürdige Eigenschaften, deren jede eine neue Lösungsmöglichkeit ergibt:

$$b + c = \sqrt{2} a ; \quad \varrho = (\sqrt{2} - 1) h_a ; \quad \varrho_a = (\sqrt{2} + 1) h_a .$$

Literaturüberschau

Introduction to Calculus and Analysis, Vol. I. Von R. COURANT und F. JOHN. 661 Seiten mit 202 Figuren. 80s. J. Wiley & Sons, London 1965.

Die 1927 im Springer Verlag erstmals erschienenen «Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung» von R. COURANT wurden rasch zu einem Standardwerk, das mehrere Auflagen erlebte und seit 1934 auch in einer wiederholt aufgelegten englischen Ausgabe erhältlich war. Obwohl die «Vorlesungen» als Grundlage dienten, liegt hier ein wesentlich neues Buch vor, das besonders den Studenten in den USA dienen soll, aber auch dem europäischen Leser viel zu bieten hat. Die Darstellungskunst des berühmten ersten Verfassers, die speziell durch das zusammen mit ROBBINS verfasste Buch «Was ist Mathematik» allgemein bekannt wurde, gibt auch dieser «Einführung» ihr Gepräge. Der un-dogmatische Stil und die bei jeder Gelegenheit herausgearbeitete Wechselwirkung zwischen der Theorie und den praktischen Anwendungen wird besonders den Ingenieurstudenten ansprechen, während der Mathematiker im Anhang zu einzelnen Kapiteln Diskussionen grundsätzlicher Art findet.

Nach einem einleitenden Kapitel über den Grenzwert- und Funktionsbegriff werden im zweiten Kapitel zuerst die Grundideen der Integralrechnung und dann diejenigen der Differentialrechnung dargelegt. Das dritte Kapitel enthält die Technik des Kalküls. Besonders reichhaltig ist das den Anwendungen in Physik und Geometrie gewidmete vierte Kapitel. Die folgenden Kapitel behandeln Reihenentwicklungen, numerische Methoden, unendliche Summen und Produkte, trigonometrische Reihen und schliesslich Differentialgleichungen für die einfachsten Schwingungsfälle.

Jedem Kapitel mit Ausnahme des letzten sind Probleme von verschiedenem Schwierigkeitsgrad beigegeben (die Lösungen sind in einem separaten Heft erschienen; siehe das nachstehende Referat).

Ein zweiter Band ist für die Infinitesimalrechnung der Funktionen mit mehreren Variablen vorgesehen.

E. TROST

Problems in Calculus and Analysis. Von A. A. BLANK. 264 Seiten. 23s. John Wiley & Sons, London 1966.

Diese Aufgabensammlung ist in erster Linie als Ergänzung zum Buch von R. COURANT und F. JOHN (siehe das vorstehende Referat) bestimmt. Zu den dort gestellten Problemen, die hier nochmals abgedruckt sind, werden (zum Teil ausführliche) Lösungen gegeben. Ausserdem enthält diese Sammlung viele einfachere Übungsaufgaben (mit Ergebnissen), die der routinemässigen Aneignung des Stoffes dienen.

E. TROST