

Zur Goldbachschen Vermutung

Autor(en): **Finsler, P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **20 (1965)**

Heft 6

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-23933>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XX Heft 6 Seiten 121–144 10. November 1965

Zur Goldbachschen Vermutung

Eine *natürliche Zahl* n besitzt stets nur *einen* Vorgänger, nämlich entweder die natürliche Zahl $n-1$ oder die Zahl 0. «Vorgänger» bedeutet für sich genommen «unmittelbarer Vorgänger» und ist ein *Grundbegriff*¹⁾ bei der Definition der Zahlen.

Verallgemeinerte Zahlen (oder kurz: *Zahlen*) seien nun solche, welche nicht notwendig einen, sondern beliebig *endlich viele* (oder keinen) Vorgänger besitzen, wobei die Vorgänger wiederum verallgemeinerte Zahlen sind. Das «Rückwärtszählen» soll dabei stets nach endlich vielen Schritten zur Zahl 0 führen, welche keinen Vorgänger besitzt. Zahlen mit denselben Vorgängern sind identisch.

Betrachtet man die verallgemeinerten Zahlen als *Punkte* und verbindet sie mit ihren Vorgängern durch gerichtete *Strecken*, so erhält man für jede Zahl eine bestimmte «Figur», die sie charakterisiert; sie enthält nicht nur die unmittelbaren, sondern auch alle «mittelbaren» Vorgänger der Zahl, das heisst die Vorgänger der Vorgänger usw., wobei die Zahl selbst als der «oberste», die Zahl 0 als der «unterste» Punkt der Figur erscheint, wenn die Strecken von oben nach unten gerichtet sind.

Wie schon früher gezeigt wurde²⁾, kann man diese Zahlen in einfacher Weise «addieren» und «multiplizieren», indem man die zugehörigen Figuren passend zusammensetzt, und man erhält so eine *verallgemeinerte Zahlentheorie*.

Die Figur der *Summe* $a + b$ von zwei Zahlen a und b erhält man, indem man die Figuren der Zahlen a und b so «aneinanderhängt», dass der unterste Punkt der Figur von a mit dem obersten Punkt der Figur von b zur Deckung kommt.

Die Figur des *Produkts* $a \cdot b$ von zwei Zahlen a und b erhält man, indem man jede Strecke der Figur von a durch die gleich gerichtete Figur von b ersetzt und sodann Punkte und Strecken, die zu identischen Zahlen gehören, identifiziert³⁾.

Betrachtet man jede Zahl als die *Menge ihrer Vorgänger*, so sind die Zahlen identisch mit den «totalendlichen Mengen». Die Zahl 0 ist die Nullmenge, die kein Element besitzt, die Zahl 1 die Einsmenge, welche 0 als einziges Element, also als einzigen Vorgänger besitzt. Die *natürliche Zahl* 2 ist die Menge, welche nur die Zahl 1 als

¹⁾ Wählt man den «Nachfolger» als Grundbegriff und fordert zu jeder Zahl eine folgende, so verlangt man eine *unendliche* Zahlenreihe, deren Existenz nicht leicht zu beweisen ist.

²⁾ P. FINSLER, *Totalendliche Mengen*, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 108, 141–152 (1963).

³⁾ In der unter ²⁾ angegebenen Arbeit ist diese Identifizierung nicht vermerkt; es sind deshalb dort noch gewisse Änderungen nötig. Es ist zum Beispiel $2 \cdot 2 = \{0; 1\} \cdot 2 = \{1; 3\} = \{0; 2\} + 1$.

Element besitzt, dagegen ist die *Ordnungszahl* $\mathbf{2}$ eine Menge mit *zwei* Elementen, nämlich 0 und 1, also $\mathbf{2} = \{0; 1\}$.

Primzahlen sind die von 1 verschiedenen Zahlen, die sich nicht als Produkt von zwei von 1 verschiedenen Zahlen darstellen lassen.

Man kann die Zahlen in einer Reihe anordnen²⁾ und findet, dass die Primzahlen zunächst sehr stark überwiegen: unter den ersten 2^{65536} Zahlen sind nur sechs keine Primzahlen.

Es ist nun merkwürdig, dass trotzdem das Analogon zur *Goldbachschen Vermutung* für diese Zahlen *nicht erfüllt* ist:

Das Doppelte $2 \cdot a$ einer von 0 und 1 verschiedenen Zahl a ist hier nicht immer die Summe von zwei Primzahlen.

Einfache *Gegenbeispiele* sind je das Doppelte der Zahlen $2 \cdot \mathbf{2}$ und $2 \cdot \mathbf{2}$, wobei $\mathbf{2}$ wieder die Ordnungszahl zwei bedeutet. Wie man aus den zugehörigen Figuren sofort ersieht, sind hier die einzigen Darstellungen als Summe von zwei von 0 verschiedenen Zahlen die folgenden:

$$\mathbf{2} + 3 \cdot \mathbf{2} \quad \text{oder} \quad 2 \cdot \mathbf{2} + 2 \cdot \mathbf{2} \quad \text{oder} \quad 3 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{2} \quad \text{und} \quad 2 \cdot \mathbf{2} + 2 \cdot \mathbf{2};$$

es ergibt sich also keine Summe von zwei Primzahlen.

Das Doppelte der Zahl $2 \cdot \mathbf{2}$ ist aber Summe von zwei Primzahlen; es ist nämlich

$$2 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} = \{0; 2\} + \{\{1; 3\}\}.$$

Die beiden Summanden haben die «Stufenzahlen» 3 und 5 und sind deshalb Primzahlen.

Es folgt, dass sich die Goldbachsche Vermutung, sofern sie für die natürlichen Zahlen erfüllt ist, auf jeden Fall nicht allein aus den allgemeinen Prinzipien der Addition und Multiplikation herleiten lässt, soweit diese auch für die verallgemeinerten Zahlen gelten.

Das Zustandekommen der obigen Gegenbeispiele hängt mit der Tatsache zusammen, dass es unter den verallgemeinerten Zahlen von 1 verschiedene «Monozahlen» gibt:

Monozahlen sind die von 0 verschiedenen Zahlen, die sich nicht als Summe von zwei von 0 verschiedenen Zahlen darstellen lassen.

Die Ordnungszahl $\mathbf{2}$ ist Monozahl, ebenso auch jede Zahl der Form $\{0; n\}$, wenn n eine natürliche Zahl ist. Es gibt also unendlich viele Monozahlen.

Das Vierfache einer von 1 verschiedenen Monozahl a ist nie die Summe von zwei Primzahlen, da hier nur die Zerfällungen $a + 3 \cdot a$ oder $2 \cdot a + 2 \cdot a$ oder $3 \cdot a + a$ möglich sind; es gibt hier also *unendlich viele* «Nicht-Goldbach-Zahlen».

P. FINSLER, Zürich

Begründung und Charakterisierung der reellen Logarithmusfunktionen

1. Einleitung

Schon mehrfach in der mathematischen Literatur waren die reellen Logarithmusfunktionen Gegenstand axiomatischer Kennzeichnung. Gemeinsam an den bekanntesten Charakterisierungen sind die Angabe der Definitionsmenge $P = \{x \mid x \in R, x > 0\}$ ¹⁾,

¹⁾ R bezeichne durchwegs die Menge der reellen Zahlen.