Das ergibt mit (1) und $(h/a)^2 = \mu$:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{96\,T} \; \frac{9\,\mu^2 + 24\,\mu + 64}{\mu}\,. \tag{9}$$

Diese Funktion hat für unsere Überlegungen nur einen Sinn im Bereich $r \leqq h < 2\,r$, oder $4/3 \leqq \mu < \infty$. An der Stelle $\mu = 8/3$ liegt das Dichteminimum $3\sqrt{3}/4\,T$ vor. Mit (2) erhalten wir folgende Dichteabschätzung:

$$d \geqq \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(1+3\,k)^2} - \frac{1}{(2+3\,k)^2}\right\}\right]^{-1}.$$

Ist die Dichte d gegeben, so errechnet sich aus (9) sofort ein Wert für μ. Damit aber können wir die vier speziellen Horosphären H_0, H_1, H_2 und H_3 und davon ausgehend durch Spiegelungen die gesamte Überdeckung des hyperbolischen Raumes konstruieren.

H. Zeitler, Weiden/Deutschland

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. Fejes Tóth, *Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *4*, 111–114 (1953).
[2] L. Fejes Tóth, *Über die dünnste Horozyklenüberdeckung*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *7*, 95–98 (1956).
[3] H. Zeitler, *Eine reguläre Horozyklenüberdeckung der hyperbolischen Ebene im Poincaré-Modell*. El. Math. *19*, 73–77 (1964).
[4] H. S. M. Coxeter, *Arrangements of Equal Spheres in Non-Euclidean Spaces*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *5*, 263–274 (1954).
[5] L. Fejes Tóth, *On Close Packings of Spheres in Spaces of Constant Curvature*, Public. math. *3*, 158–167 (1953).
[6] L. Fejes Tóth, *Kugelunterdeckungen und Überdeckungen in Räumen konstanter Krümmung*, Arch. Math. *10*, 307–313 (1959).
[7] H. Liebmann, *Nichteuklidische Geometrie* (Verlag Göschen, Leipzig, 1905).
[8] H. S. M. Coxeter, *The Functions of* Schläfli *and* Lobatschefsky, Quart. J. Math., Oxford Ser. *6*, 13–29 (1935).

Sur trois nombres triangulaires en progression arithmétique à différence triangulaire

On démontre sans peine qu'il n'existe pas trois nombres carrés distincts formant une progression arithmétique à différence carré. En effet, s'il était, pour les nombres naturels x, y, z et t, $y^2 - x^2 = t^2$ et $z^2 - y^2 = t^2$, on aurait $y^2 - t^2 = x^2$, $y^2 + t^2 = z^2$, d'où $y^4 - t^4 = (x\,z)^2$ et cette équation, comme on le sait, n'a pas de solutions en nombres naturels x, y, z et t.

Or, je démontrerai ici d'une façon élémentaire le théorème $\boldsymbol{T}$ suivant:

$\boldsymbol{T}$. *Il existe une infinité de triples de nombres triangulaires formant une progression arithmétique à différence triangulaire.*

Démonstration. Je démontrerai d'abord que le théorème $\boldsymbol{T}$ équivaut à la proposition $\boldsymbol{P}$ suivante:

$\boldsymbol{P}$. *Il existe une infinité de solutions en nombres impairs* $x > 1$, $y \neq x$, z *et* u *du système d'équations*

$$x^2 + z^2 = 2\,y^2 \qquad \textit{et} \qquad y^2 - x^2 = u^2 - 1\,. \tag{1}$$

Démonstration de l'équivalence de $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{P}$. Supposons que $\boldsymbol{T}$ est vrai. Il existe donc une infinité de systèmes de nombres naturels m, n, r et s tels que pour $t_k = k\,(k+1)/2$ on a

$$t_n - t_m = t_r - t_n = t_s\,, \tag{2}$$

donc, vu que $t_k = [(2\,k+1)^2 - 1]/8$:

$$(2\,n+1)^2 - (2\,m+1)^2 = (2\,r+1)^2 - (2\,n+1)^2 = (2\,s+1)^2 - 1 \tag{3}$$

ce qui donne pour

$$x = 2\,m+1\,, \quad y = 2\,n+1\,, \quad z = 2\,r+1\,, \quad u = 2\,s+1 \tag{4}$$

les formules (1) et on a $x > 1$ et $y \neq x$. On a donc $\boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$.

Or, supposons que $\boldsymbol{P}$ est vrai: les nombres $x > 1$, $y \neq x$, z et u sont donc impairs et on a les formules (4), où m, n, r et s sont des nombres naturels et $m \neq n$. On a donc, d'après (1), les formules (3) qui, comme on le voit sans peine, sont équivalentes aux formules (2). On en déduit que $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{T}$.

L'équivalence des propositions $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{P}$ est donc établie. Pour démontrer le théorème $\boldsymbol{T}$ il suffira donc de démontrer la proposition $\boldsymbol{P}$.

LEMME: *L'équation*

$$g^2 - 24\,h^2 = 1 \tag{5}$$

a une infinité de solutions en nombres impairs g et h.

Démonstration du lemme. L'équation (5) a évidemment la solution en nombres impairs $g = 5$, $h = 1$. Or, vu l'identité

$$(49\,g + 240\,h)^2 - 24\,(10\,g + 49\,h)^2 = g^2 - 24\,h^2$$

on conclut que si les nombres impairs g et h satisfont à l'équation (5), les nombres impairs $49\,g + 240\,h$ et $10\,g + 49\,h$ plus grands que g et h, satisfont aussi à cette équation. Elle a donc une infinité de solutions en nombres impairs g et h et le lemme est démontré.

Soit maintenant g et h une solution quelconque de l'équation (5) en nombres impairs g et $h > 1$ et posons

$$x = h\,, \quad y = 5\,h\,, \quad z = 7\,h\,, \quad u = g\,. \tag{6}$$

On aura $x^2 + z^2 = h^2 + 49\,h^2 = 50\,h^2 = 2\,(5\,h)^2 = 2\,y^2$, et, d'après (5):

$$y^2 - x^2 = 25\,h^2 - h^2 = 24\,h^2 = g^2 - 1\,.$$

Les nombres (6) sont donc impairs et satisfont aux équations (1) et, h pouvant être aussi grand que l'on veut, la proposition $\boldsymbol{P}$, donc aussi le théorème $\boldsymbol{T}$, se trouvent démontrés.

On peut démontrer que la solution de l'équation (5) en nombres impairs g et $h > 1$ les plus petits est $g = 485$, $h = 99$, ce qui donne, d'après (6), $x = 99$, $y = 495$, $z = 693$, $u = 485$, et les formules (4) donnent: $m = 49$, $n = 247$, $r = 346$, $s = 242$. Les formules (2) donnent donc

$$t_{247} - t_{49} = t_{346} - t_{247} = t_{242}\,.$$

Or, la solution de l'équation (2) en nombres naturels les plus petits est, comme on le trouve sans peine:

$$t_6 - t_3 = t_8 - t_6 = t_5 \,.$$

Notre procédé ne donne pas donc toutes les solutions de l'équation (2) en nombres naturels m, n, r et s. W. Sierpiński (Varsovie)

Sur les opérateurs A et B

Introduction

Le calcul des q-différences est considéré généralement comme une branche du calcul des différences finies. Pour les origines et les développements de ce calcul et des équations fonctionnelles auxquelles il conduit nous référons à [1][1]), [2]. Dans [3], [4], [5] et [6] on trouvera une bibliographie à peu près complète jusqu'en 1931. Le poids principal des recherches allait surtout vers la solution d'équations aux q-différences linéaires.

La présente étude donne d'abord quelques aspects essentiels des bases du calcul des q-différences. Nous approchons le problème du point de vue opérationnel. Nous donnons ensuite la démonstration des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations et systèmes d'équations simultanées aux q-différences, théorèmes qui, à notre connaissance, n'ont jamais été démontrés.

1. *L'opérateur* $A(q)$

Cet opérateur est défini, pour un nombre donné q, par la relation

$$A(q)\, f(x) = f(q\,x) \,. \tag{1}$$

Nous observons immédiatement que

(i) pour $q = 0$, $A(0)\, f(x) = f(0) =$ constante,

(ii) pour $q = 1$, $A(1)\, f(x) = f(x)$, si bien que, $A(1) = I$, l'opérateur identique,

(iii) $A(q)$ est un opérateur linéaire puisque pour des constantes α et β, nous aurons, $A(q)\,[\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)] = \alpha\, f(q\,x) + \beta\, g(q\,x) = \alpha\, A(q)\, f(x) + \beta\, A(q)\, g(x)$,

(iv) d'après (1), $A(p)\, A(q)\, f(x) = f(p\,q\,x) = f(q\,p\,x) = A(q)\, A(p)\, f(x)$, si bien que, $A(p)\, A(q) = A(q)\, A(p)$, et, $A(p)\,[A(q)\, A(r)] = [A(p)\, A(q)]\, A(r)$. Il s'ensuit que les opérateurs A pour différents q ont des produits commutatifs et associatifs,

(v) pour $q \neq 0$, $A(q)\, A(1/q) = I$, si bien que $A(1/q) = A(q)^{-1}$,

(vi) pour $q \neq 0$, si $A(q)\, f(x) = 0$, $f(x) = 0$,

(vii) $A(q)\, x^k = q^k x^k$, donc x^k est une fonction propre de l'opérateur $A(q)$ avec valeur propre q^k,

(viii) si $\omega_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ sont les n racines n-ièmes de l'unité, alors $A(\omega_{n,j})^n = A(\omega_{n,j}^n) = I$, donc, $A(\omega_{n,j}) = I^{1/n}$.

---

[1]) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie, page 87.