

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 5

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Kleine Mitteilungen

### Kleine Bemerkung zum Wilsonschen Satz

Seit langem ist es üblich, den Fermatschen Satz in Vorlesungen über Algebra und Zahlentheorie als rein gruppentheoretischen Satz zu bringen. Dass dasselbe auch für den Wilsonschen Satz leicht möglich ist, scheint weniger geläufig zu sein.

**Satz 1:** In einer Abelschen Gruppe bilden die involutorischen Elemente zusammen mit dem Einselement 1 eine Untergruppe.

**Satz 2:** Das Produkt aller Elemente einer endlichen Gruppe  $G$  aus lauter involutorischen Elementen ausser der 1 ist das Einselement, ausser wenn  $G$  genau zwei Elemente hat.

Der Beweis ergibt sich, da eine solche Gruppe elementarabelsch ist, ganz leicht. Die Gruppenordnung sei  $2^m$ . Ist  $U$  eine Untergruppe vom Index 2, also von der Ordnung  $2^{m-1}$ , und  $v \notin U$ , so durchlaufen die Elemente  $u \in U$  und  $u'v$  mit  $u' \in U$  alle Elemente von  $G$ . Ihr Produkt ist  $v$  im Fall  $m = 1$  und 1 in jedem anderen Fall.

**Satz 3:** Das Produkt aller Elemente einer endlichen abelschen Gruppe  $G$  ist gleich dem Produkt ihrer involutorischen Elemente.

Die von 1 und den involutorischen Elementen verschiedenen  $x \in G$  lassen sich nämlich zu Paaren  $x, x^{-1}$  zusammenfassen, deren Produkt 1 ist.

**Satz 4:** Das Produkt aller Elemente einer endlichen abelschen Gruppe  $G$  ist 1, ausser wenn  $G$  genau ein involutorisches Element  $i$  hat. In diesem Fall ist das Produkt aller Gruppenelemente  $i$ .

Das folgt unmittelbar aus den vorigen Sätzen.

Die Gruppe  $G$  der primen Restklassen modulo einer ganzen Zahl  $m$  enthält genau ein involutorisches Element, nämlich die Klasse von  $-1$ , wenn und nur wenn  $G$  zyklisch von gerader Ordnung ist und mindestens zwei Elemente enthält, also für  $m = 4$  oder  $m = p^k$  oder  $2p^k$ , wobei  $p^k$  eine ungerade Primzahlpotenz ist. Dass in allen anderen Fällen mindestens zwei involutorische Elemente auftreten, ergibt sich so: Für  $m = 2^e$ ,  $e > 2$ , sind die beiden  $\pm 5^{2^{e-3}}$  enthaltenden Restklassen involutorisch. Enthält  $m$  zwei verschiedene Primzahlpotenzen  $q$  und  $r > 2$  als Teiler, etwa  $m = qrs$  mit  $(q, r) = (q, s) = 1$ , so hat die Kongruenz  $x^2 \equiv 1$  neben der trivialen auch eine nichttriviale Lösung mod  $q$  und mod  $r$ . Daraus ergeben sich nach dem chinesischen Restsatz in bekannter Weise mindestens zwei nichttriviale Lösungen mod  $m$ . Das Produkt aller primen Reste mod  $m$  ist also kongruent zu  $-1$ , falls  $m = 4$  oder  $m = p^k$  oder  $m = 2p^k$  ist, und zu  $+1$  in allen anderen Fällen. Das ist die Gaußsche Verallgemeinerung des Wilsonschen Satzes (vgl. HARDY-WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3rd ed., Oxford 1954, p. 103). Weitere Sonderfälle von Satz 4 liegen auf der Hand, zum Beispiel: Das Produkt aller quadratischen Reste modulo einer ungeraden Primzahl  $p$  ist kongruent zu  $+1$ , falls  $p \equiv 3 \pmod{4}$  und zu  $-1$ , falls  $p \equiv 1 \pmod{4}$  ist.

HANFRIED LENZ, München

## Aufgaben

**Aufgabe 434.** Man beweise folgende Umkehrformel:  $f$  und  $g$  sind zahlentheoretische Funktionen (das heisst Abbildungen der Menge der nicht negativen ganzen Zahlen in eine additive abelsche Gruppe, zum Beispiel die reellen oder komplexen Zahlen). Dann sind die beiden Aussagen

$$g(x) = \sum_{k=0}^x \binom{x}{k} f(k) \quad (1)$$

und

$$f(x) = \sum_{k=0}^x (-1)^{x+k} \binom{x}{k} g(k) \quad (2)$$

gleichbedeutend.

A. BAGER, Hjørring, Dänemark

1. Lösung: a) Aus (1) folgt (2):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^x (-1)^{x+k} \binom{x}{k} g(k) &= \sum_{k=0}^x \sum_{s=0}^k (-1)^{x+k} \binom{x}{k} \binom{k}{s} f(s) \\ &= \sum_{n=0}^x f(n) \sum_{r=n}^x (-1)^{x+r} \binom{x}{r} \binom{r}{n} = \sum_{n=0}^x \frac{x! f(n)}{n! (x-n)!} \sum_{r=n}^x (-1)^{x+r} \frac{(x-n)!}{(x-r)! (r-n)!} \\ &= \sum_{n=0}^x f(n) (-1)^{x+n} \binom{x}{n} (1-1)^{x-n} = f(x). \end{aligned}$$

b) Aus (2) folgt (1):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^x \binom{x}{k} f(k) &= \sum_{k=0}^x \sum_{s=0}^k (-1)^{k+s} \binom{x}{k} \binom{k}{s} g(s) \\ &= \sum_{n=0}^x g(n) \sum_{r=n}^x (-1)^{n+r} \binom{x}{r} \binom{r}{n} = \sum_{n=0}^x g(n) \binom{x}{n} (1-1)^{x-n} = g(x). \end{aligned}$$

E. TEUFFEL, Stuttgart

2. Lösung: Betrachtet man die Gleichungen (1) mit  $x = 0, 1, 2, \dots, n$  als Bestimmungsgleichungen für die  $f(k)$  bei gegebenen  $g(0), g(1), g(2), \dots, g(n)$ , so erhält man, da die Determinante des Systems 1 ist,  $f(n)$  eindeutig in der Form

$$f(n) = \sum c_i g(n-i),$$

wobei die  $c_i$  nur von  $i$  und  $n$ , aber nicht von  $g(x)$  abhängen. Wählt man nun speziell  $g(i) = z^i$ , dann sind die Lösungen von (1):  $f(k) = (z-1)^k$ . Man hat also  $(z-1)^n = \sum c_i z^{n-i}$ . Da  $z$  beliebig gewählt werden kann, muss diese Gleichung eine Identität sein, also  $c_i = (-1)^i \binom{n}{i}$ . Die allgemeine Lösung von (1) lautet also

$$f(n) = \sum (-1)^i \binom{n}{i} g(n-i),$$

was mit  $n = x$  und  $n - i = k$  in (2) übergeht. (1) und (2) sind daher, weil die Beziehung zwischen den  $f(k)$  und  $g(x)$  eine lineare Transformation mit nichtverschwindender Determinante darstellt, äquivalent.

C. BINDSCHEDLER, Künsnacht

Weiter Lösungen sandten A. AMMANN (Genf), H. FRASCH (Stuttgart), W. JÄNICHEN (Berlin), A. MAKOWSKI (Warschau), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen, Deutschland).

**Aufgabe 435.** Find the general polynomial solution of

$$\Phi((x+y)^2) \equiv \Phi(x^2) + \Phi(y^2) + 2xy(x^{p-1} - C)(y^{p-1} - C) \pmod{p},$$

where  $p$  is a prime  $> 2$  and  $C$  is independent of  $x$ .

L. CARLITZ, Duke University, Durham N.C. USA.

Lösung: Zunächst folgt aus  $x = y = 0$ , dass das absolute Glied des Polynoms  $\equiv 0 \pmod{p}$  ist. Setzt man nun  $y = -x$ , so folgt

$$2\Phi(x^2) - 2x^2(x^{p-1} - C)^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wegen  $p > 2$  darf durch  $p$  dividiert werden und man erhält

$$\Phi(x^2) \equiv x^2(x^{p-1} - C)^2 \pmod{p}.$$

Hieraus folgt sofort

$$\Phi(x) \equiv x(x^{(p-1)/2} - C)^2 \pmod{p}.$$

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

**Aufgabe 436.** Einer Ellipse ist eine Reihe von sie doppelt berührenden Kreisen  $K_1, K_2, \dots, K_n$  einbeschrieben, von denen  $K_1$  und  $K_n$  die Hauptscheitel-Krümmungskreise sind, während jeder andere die beiden Nachbarkreise berührt. Man zeige, dass die numerische Exzentrizität der Ellipse den Wert  $\varepsilon = \cos(\pi/2n)$  hat. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

1. *Lösung:* Wir gehen aus vom Aufriss und Kreuzriss einer Kugel vom Radius  $r$ . Auf dem zur Grundrissebene senkrechten Durchmesser nehmen wir die Kugelpunkte  $N$  und  $S$  an. Wir schneiden die Kugel durch eine Schar von  $n$  zweitprojizierenden parallelen Ebenen  $\varepsilon_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ). Die Mittelpunkte der Schnittkreise  $K_\nu$  liegen auf einem Kugeldurchmesser  $OO'$ , der mit dem Durchmesser  $NS$  den Winkel  $\alpha$  bildet. Wir wählen  $\varepsilon_1$  so, dass  $\varepsilon_1$  durch  $N$  geht.  $\varepsilon_\nu$  werde für  $\nu = 2, 3, \dots, n$  so angenommen, dass der höchste Punkt  $H_\nu$  des Schnittkreises  $K_\nu$  in derselben horizontalen Ebene liegt wie der tiefste Punkt  $T_{\nu-1}$  des Kreises  $K_{\nu-1}$ . Ferner werde  $\alpha$  so gewählt, dass  $\varepsilon_n$  durch  $S$  geht und damit  $T_n$  und  $S$  zusammenfallen. Dann gilt

$$N'' H_2'' = H_2'' H_3'' = \dots = H_n'' S'' = 2 r \alpha \quad (\text{Peripheriewinkelsatz!}).$$

Für die Summe  $N'' S''$  aller dieser Bögen erhalten wir:  $2 \alpha n r = \pi r$  oder  $\alpha = \pi/2 n$ .

Im Kreuzriss hat man als Kugelumriss einen Kreis vom Radius  $r$ . Die Kreise  $K_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) stellen sich als  $n$  ähnliche Ellipsen  $K_\nu'''$  dar. Die Mittelpunkte liegen auf dem Durchmesser  $N''' S'''$ .  $K_\nu'''$  berührt für  $\nu = 2, 3, \dots, n-1$  den Kugelumriss in je zwei auf einem (horizontalen) Ordner liegenden Punkten.  $K_\nu'''$  und  $K_{\nu+1}'''$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ ) berühren sich gegenseitig in den Punkten  $T_\nu''' = H_{\nu+1}'''$ .  $K_1'''$  und  $K_n'''$  berühren den Kugelumriss in  $N'''$  bzw.  $S'''$  und haben dort dieselbe Krümmung wie der Kugelumriss. Dies ergibt sich aus dem Zusammenfallen der Umrisspunkte oder aus dem Satz von MEUSNIER, wenn man den Kreis  $K_1$  mit dem Radius  $A$  und die Ellipse  $K_1'''$  als Flächenkurven auf dem im Kreuzriss mit  $K_1'''$  sich deckenden elliptischen Zylinder betrachtet. Ist  $R$  der Krümmungsradius des Normalschnittes in  $N$ , so hat man  $1/R = A^{-1} \cos(90^\circ - \alpha) = 1/r$ , also  $R = r$ . Für das Achsenverhältnis  $B/A$  der ähnlichen Ellipsen  $K_\nu'''$  ergibt sich  $\sin \alpha = \sin(\pi/2 n)$ .

Unterwerfen wir den Kreuzriss einer Affinität mit der Affinitätsachse  $N''' S'''$  und dem Affinitätsverhältnis  $B/A$ , so geht der Kugelumriss in eine Ellipse  $e_u$  mit den Halbachsen  $a = r$ ,  $b = r \sin(\pi/2 n)$  über. Die Ellipsen  $K_\nu'''$  ( $\nu = 2, 3, \dots, n-1$ ) werden zu Kreisen  $c_\nu$ , die  $e_u$  in je zwei Punkten berühren. Die Ellipsen  $K_1'''$ ,  $K_n'''$  werden zu den Krümmungskreisen in den Hauptscheiteln  $N$  und  $S$  von  $e_u$ , da die Urbilder von  $c_1$ ,  $c_2$  und  $e_u$  dort auch gleiche Krümmung haben. Für die numerische Exzentrizität von  $e_u$  erhalten wir den Wert  $\cos(\pi/2 n)$ .

Da sich dieser Gedankengang umkehren lässt, ist der verlangte Beweis erbracht.

W. SCHÖNE, Leipzig

2<sup>e</sup> *Démonstration:* Soit

$$1 = x_0 > x_1 = 1 - 2 b^2 > x_2 > \dots > x_m > x_{m+1} > \dots > x_{n-1} = -1 + 2 b^2 > x_n = -1$$

la suite des abscisses des points d'intersection des  $n$  cercles en question  $K_1, \dots, K_n$  avec le grand axe de l'ellipse  $b^2 x^2 + y^2 = b^2$ . Le cercle  $K_{m+1}$  ( $m = 0, 1, \dots, n-1$ ) a pour rayon  $r_{m+1} = (x_m - x_{m+1})/2$ , pour centre le point  $(x_m - r_{m+1}, 0)$  et pour équation

$$[x - (x_m - r_{m+1})]^2 + y^2 = r_{m+1}^2.$$

Pour qu'il soit bitangent à l'ellipse, il faut et il suffit que

$$r_{m+1}^2 - 2 b^2 x_m r_{m+1} + b^2 (x_m^2 - c^2) = 0, \quad \text{où } c^2 = 1 - b^2.$$

On vérifie aisément que l'existence de la suite des cercles  $K_1, \dots, K_n$  implique les relations  $b^2 \leq 1/2$  et  $x_m^2 - c^2 < 0$  pour  $m = 1, 2, \dots, n-1$ .

Donc, pour  $m = 1, 2, \dots, n-1$  nous avons

$$r_{m+1} = b^2 x_m + \sqrt{b^4 x_m^2 - b^2 (x_m^2 - c^2)} = b [b x_m + \sqrt{1 - b^2} \sqrt{1 - x_m^2}],$$

ce qui est encore valable pour  $m = 0$ , puisque  $x_0 = 1$  et  $r_1 = b^2$ . Par conséquent, si nous posons  $\cos \varphi_m = x_m$  pour  $m = 0, 1, \dots, n$ , ( $0 \leq \varphi_m \leq \pi$ ) et  $\cos \omega = b$ , ( $\pi/4 \leq \omega < \pi/2$ ), nous aurons

$$r_{m+1} = b \cos (\varphi_m - \omega), \quad (m = 0, 1, \dots, n - 1).$$

Mais  $2 r_{m+1} = x_m - x_{m+1}$ ; donc  $x_{m+1} = x_m - 2 b \cos (\varphi_m - \omega)$  et, par conséquent, pour  $m = 0, 1, \dots, n - 1$ ,

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{m+1} &= \cos \varphi_m - 2 \cos \omega \cos (\varphi_m - \omega) \\ &= \cos \varphi_m - \cos \varphi_m - \cos (2 \omega - \varphi_m) = \cos (\pi + \varphi_m - 2 \omega). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $\varphi_{m+1} = \varphi_m + \pi - 2 \omega$ , pour  $m = 0, 1, \dots, n - 1$ , car, pour  $m = 0, 1, \dots, n - 2$ , nous avons

$$0 < \varphi_{m+1} + \varphi_m + \pi - 2 \omega < \varphi_n + \varphi_{n-1} + \pi - 2 \omega = \pi + 2 \omega + \pi - 2 \omega = 2 \pi.$$

Nous en tirons

$$\pi - 0 = \varphi_n - \varphi_0 = \sum_{m=0}^{n-1} (\varphi_{m+1} - \varphi_m) = n (\pi - 2 \omega),$$

d'où, successivement, nous obtenons  $\pi/n = \pi - 2 \omega$ , et

$$\cos \frac{\pi}{2 n} = \sin \omega = \sqrt{1 - b^2} = c = \varepsilon, \quad \text{c. q. f. d.}$$

D. GIOKAS, Athènes

Weitere Lösungen sandten K. GRUN (Linz) und L. KIEFFER (Luxembourg).

**Aufgabe 437.** Let  $f(z)$  be a polynomial in the complex variable  $z$  with complex coefficients and put  $f(z) = U + iV$ , where  $U, V$  are real polynomials in  $x, y$ . If

$$U + iV = (P + iQ)(R + iS),$$

where  $P, Q, R, S$  are polynomials in  $x, y$  with real coefficients, show that  $P + iQ = g(z)$ , where  $g(z)$  is a polynomial in  $z$ . L. CARLITZ, Duke University, Durham N.C. USA

*Proof:* The identity

$$f(x + iy) = G(x, y) H(x, y)$$

(where  $G$  and  $H$  are polynomials in  $x, y$  with complex coefficients) remains valid when we replace  $x$  by  $z_1 - iz_2$  and  $y$  by  $z_2$  ( $z_1, z_2$  two independent complex variables).

Hence

$$f(z_1) = G(z_1 - iz_2, z_2) H(z_1 - iz_2, z_2).$$

The left-hand side of the last identity is a function only of  $z_1$ . Thus  $G$  and  $H$  cannot depend on  $z_2$ , which proves the statement. D. DJOKOVIC, Belgrade

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) und E. TEUFFEL (Stuttgart).

**Aufgabe 438.** Es sei  $p$  eine natürliche Zahl. Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Exponentialgleichung

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} k^x = 0.$$

A. BAGER, Hjørring

*Lösung:* Die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} k^x,$$

deren ganzzahlige Nullstellen gesucht sind, ist für  $x \geq 0$  definiert. Ihre Werte für ganzzahlige Argumente  $x \geq 0$  lassen sich mit Hilfe der Funktion

$$g(x) = (1 - x)^p = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} x^k$$

und deren Ableitungen darstellen: Zunächst erkennt man unmittelbar, dass  $f(0) = g(1) = 0$  ist. Ist  $x$  eine beliebige natürliche Zahl, dann gilt für die Potenz  $k^x$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) die Entwicklung  $k^x = \sum_{i=1}^x c_{xi} \binom{k}{i}$ , wobei die Koeffizienten  $c_{xi}$  die Anfangsglieder der Differenzenfolgen erster bis  $x$ -ter Ordnung der Folge  $0^x, 1^x, 2^x, 3^x, \dots$  sind. Folglich ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \sum_{i=1}^x c_{xi} \binom{k}{i} = \sum_{i=1}^x c_{xi} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{i} = \sum_{i=1}^x c_{xi} \frac{g^{(i)}(1)}{i!}$$

für alle natürlichen Zahlen  $x$ . Wegen

$$g^{(i)}(1) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq p \\ p! (-1)^p & \text{für } i = p \end{cases}$$

ist also  $f(x) = 0$  für  $x = 1, 2, 3, \dots, p - 1$  aber  $f(x) = c_{xp} (-1)^p \neq 0$  für alle ganzen  $x \geq p$ , da  $c_{xp} > 0$  ist. Demnach besitzt die Gleichung  $f(x) = 0$  genau die ganzzahligen Lösungen  $x = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ .

O. REUTER, Ochsenhausen/Deutschland

I. PAASCHE (München) benutzt aus der Differenzenrechnung die Formel

$$(-1)^p \Delta^p f(z_0) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} f(z_k), \quad z_k = z_0 + k h.$$

Setzt man  $f(z) = z^x, z_0 = 0, h = 1$ , so folgt aus  $\Delta^x f(z_k) = x!$  sofort, dass die rechte Seite – die mit der linken Seite der Gleichung der Aufgabe übereinstimmt – nur für  $p = x + 1, x + 2, \dots$  verschwindet. Wegen  $x \geq 0$  ergeben sich die Lösungen  $p - 1, p - 2, \dots, 1, 0$ .

L. CARLITZ (Duke University, Durham/USA) zeigt zusätzlich, dass für natürliche Zahlen  $n, p$  der Ausdruck  $\sum_{k=1}^p (-1)^k \binom{p}{k} k^{-n}$  stets negativ ist.

Weitere Lösungen sandten A. AMMANN (Genf), W. JÄNICHEN (Berlin), E. TEUFFEL (Stuttgart).

**Aufgabe 439.** Eine Gerade  $e_1$  werde längs einer anderen Geraden  $g_1$  mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_1$  und eine Gerade  $e_2$  werde längs einer anderen Geraden  $g_2$  mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_2$  parallel verschoben.

Von einem Punkt  $O$ , der ausserhalb der (voneinander verschiedenen) Ebenen  $\varepsilon_i = [e_i g_i]$  liegen möge, werden in jedem Augenblick der Bewegung die Treffgeraden  $s$  an die  $e_i$  gelegt.

Welche Kurven beschreiben die Schnittpunkte  $T_i = [s e_i]$  in den Ebenen  $\varepsilon_i$  bei Ablauf der geschilderten Bewegung?

E. SCHRÖDER, Dresden

*Lösung des Aufgabenstellers:* Man lege durch den Punkt  $O$  eine Testebene  $\beta$ . Diese schneidet die Geraden  $e_i$  in den Punkten  $E_i$ , d. h. es gilt  $E_i = [e_i \beta]$ .

Verbindet man  $E_i$  mit  $O$ , so ergeben sich in  $\beta$  zwei konlokale Strahlbüschel  $[O E_i] = (s_i)$ , wenn sich die  $e_i$  längs der  $g_i$  parallel verschieben. Die beiden Strahlbüschel bilden in  $\beta$  eine (1-1)-Korrespondenz. Nach dem Chasles'schen Korrespondenzprinzip gibt es zwei Doppелеlemente, welche die beiden in  $\beta$  liegenden Treffgeraden von  $O$  an  $e_1$  und  $e_2$  darstellen. Jede der beiden Kurven  $[T_i]$  hat folglich zwei Punkte mit  $\beta$  gemein. Daraus resultiert, dass die  $[T_i]$  Kurven zweiter Ordnung der Ebenen  $\varepsilon_i = [e_i g_i]$  darstellen.

Legt man durch  $O$  die Hilfsebenen  $\bar{\varepsilon}_i$  parallel zu  $\varepsilon_i$ , so ist der Fernpunkt der Schnittgeraden  $e = [\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2]$  gemeinsamer Punkt der  $[T_i]$ . Die Asymptote von  $[T_1]$  parallel zu  $e$  ist die Schnittgerade  $a_{11} = [\varepsilon_1 \bar{\varepsilon}_2]$ . Ist im Verlaufe der Bewegung die Ebene  $\gamma = [O e_2]$  parallel

zu  $e_1$ , ist  $T_1$  ein Fernpunkt auf  $e_1$ . Da  $e_1$  in dieser Stellung keinen im Endlichen gelegenen Schnittpunkt  $T_1$  aufweist, ist  $e_1$  in dieser Stellung die Asymptote  $a_{12}$  der Kurve  $[T_1]$ .

Im allgemeinen sind also die  $[T_i]$  in  $\varepsilon_i$  gelegene Hyperbeln. Ist  $e_1$  parallel zu  $e = [\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2]$ , erhält man für  $[T_1]$  eine Parabel. Ellipsen scheiden für die  $[T_i]$  aus, da die  $e_i$  höchstens einen im Endlichen gelegenen Schnittpunkt  $T_i = [s e_i]$  aufweisen.  $[T_1]$  zerfällt in zwei Gerade, wenn  $O$  auf  $\varepsilon_2$  liegt und umgekehrt.

Eine rechnerische Lösung sandte H. MEILI (Winterthur).

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 461.** a) Die variable Sehne  $\overline{AB}$  eines Kreises vom Radius  $r$  ist Basis eines Quadrates. Wenn  $\overline{AB}$  in paralleler Lage die ganze Kreisfläche überstreicht, so überstreicht die Quadratseite  $\overline{CD}$  eine Fläche, deren Inhalt zu berechnen ist.

b) Der Schnittkreis  $K$  einer variablen Ebene mit einer Kugel vom Radius  $r$  ist Basis eines geraden Zylinders, dessen Höhe gleich dem Durchmesser von  $K$  ist. Wenn diese Ebene sich parallel verschiebt und dabei die ganze Kugel überstreicht, so überstreicht die Deckfläche des Zylinders einen Raum, dessen Volumen zu berechnen ist.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

**Aufgabe 462.** Démontrer que,  $k$  étant un entier donné quelconque  $> 1$  et  $c$  un chiffre donné quelconque du système décimal, il existe un nombre naturel  $n$  tel que le  $k$ -ième chiffre du nombre  $2^n$ , en comptant de droite à gauche, est  $c$ . W. SIERPIŃSKI, Varsovie

**Aufgabe 463.** Démontrer que dans la représentation décimale  $c_8 c_{8-1} \dots c_4 c_3 c_2 c_1$  ( $c_1 = 2, 4, 6, 8$ ) du nombre  $2^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ )  $c_2$  et  $c_3$  peuvent être tous les deux des chiffres quelconques, tandis que  $c_4 c_3 c_2 = 111$  est impossible. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

**Aufgabe 464.** Es bedeute  $d_k(n)$  für  $k = 2; 3$  die Anzahl der Darstellungen von  $n$  als Produkt von  $k$  Faktoren mit Berücksichtigung der Reihenfolge. Dann gilt

$$[d_3(n)]^2 = \sum_{q|n} [d_2(q)]^3$$

F. GÖTZE, Jena

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Die Potenzen aller Zahlen, die auf

$$12890625 \quad \text{oder} \quad 87109376$$

enden, besitzen dieselben acht Endziffern.

► Es genügt, zu zeigen, dass das Quadrat diese Eigenschaft hat.

2.  $2\sqrt{12 + 6\sqrt{3} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{15}} = \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{30}.$

3. Für drei beliebige Zahlen  $a, b, c$  gilt

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c).$$

► Aus der Behauptung folgt

$$2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) - 2 a b c (a + b + c) \geq 0$$

$$a^2 (b - c)^2 + b^2 (c - a)^2 + c^2 (a - b)^2 \geq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für  $a = b = c$ .

4. Bilden die ganzen Zahlen  $x, y, z$  ein pythagoreisches Tripel ( $x^2 + y^2 = z^2$ ), so sind die Ausdrücke

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} \quad \text{und} \quad z^{2n} - x^{2n} - y^{2n}$$

durch  $x + y + z$  teilbar.

► Alle pythagoreischen Tripel werden dargestellt durch

$$x = u^2 - v^2; \quad y = 2 u v; \quad z = u^2 + v^2,$$

und man findet  $x + y + z = 2 u (u + v)$ .

Nun sieht man leicht ein, dass die beiden Ausdrücke den Faktor 2 enthalten und sowohl für  $u = 0$  als auch für  $u = -v$  verschwinden.

5. Die Seite  $AB$  eines Dreiecks  $ABC$  wird durch die Höhe  $h_c$  in die Abschnitte  $AP = u$  und  $PB = v$  geteilt. Wie ist  $h_c$  zu wählen, damit gilt  $AC = BC + BP$ ? Für welche Wahl von  $u$  und  $v$  wird das Dreieck bei  $C$  rechtwinklig?

►  $h_c = \frac{u}{2v} \sqrt{u^2 - 4v^2}$ . Die Forderung  $h_c^2 = uv$  und der Ansatz  $u = kv$  liefern die Gleichung

$$k^3 - 4k - 4 = 0$$

mit der einzigen reellen Lösung  $k \approx 2,383$ .

## Literaturüberschau

*Œuvres de Camille Jordan*. Herausgegeben von J. DIEUDONNÉ. 1. Bd. 542 S., 2. Bd. 556 S., 3. Bd. 574 S. je NF 80.-. Gauthier-Villars, Paris 1961/62.

Die Gesamtausgabe der Schriften C. JORDANS, die auf vier Bände veranschlagt ist, enthält 129 in Zeitschriften erschienene Arbeiten. Der berühmte *Cours d'Analyse*, in dem auch der «Jordansche Kurvensatz» steht, sowie der *Traité des Substitutions* sind kürzlich in Reproduktionen neu publiziert worden.

Die ersten beiden Bände umfassen die Beiträge Jordans zur Gruppentheorie. Wie G. JULIA in seinem Vorwort betont, sind diese Untersuchungen heute aktueller als zur Zeit ihres Entstehens, und sie erscheinen erst heute in ihrer wahren Bedeutung. In einer meisterhaften Vorrede kommentiert der Herausgeber J. DIEUDONNÉ das gruppentheoretische Werk Jordans und zeigt die Beziehungen zum heutigen Stand der Theorie auf. Diese Arbeiten lassen sich in fünf Klassen einteilen, wobei einige Arbeiten in verschiedenen Klassen erscheinen: 1. Allgemeines; Anwendungen auf algebraische Gleichungen. 2. Lineare Gruppen über einem endlichen Primkörper. 3. Untergruppen der linearen komplexen Gruppen. 4. Transitiv und primitive Gruppen. 5. Konstruktion von auflösbaren Gruppen.

Der dritte Band enthält die Arbeiten zur Algebra und Zahlentheorie. Der Kommentar des Herausgebers gliedert sich in folgende Abschnitte: 1.  $n$ -dimensionale Geometrie. 2. Bilineare und quadratische Formen. 3. Invariantentheorie. 4. Arithmetische Äquivalenz der Formen. 5. Zahlentheorie.

Alle Arbeiten sind nach dem Original photomechanisch reproduziert. Die Druckfehler werden in einer Liste angegeben. Im ersten Band findet man eine Photographie Jordans, und der letzte soll eine Biographie enthalten.

E. TROST