Über Summen von Mengen natürlicher Zahlen

Autor(en): **Scherk, Peter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 3

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22635

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XVIII Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 10. Mai 1963

Über Summen von Mengen natürlicher Zahlen[1])

Einige der schönsten Sätze über Dichten von Mengen natürlicher Zahlen lassen sich als Korollare von Ergebnissen auffassen, in die der Begriff der Dichte[2]) garnicht eingeht. In diesem Aufsatz soll über einige hierhin gehörige Resultate und Methoden berichtet werden.

Kleine lateinische Buchstaben bezeichnen nicht-negative ganze Zahlen. Die Zahl n sei stets positiv. Seien $A, B, \ldots$ Mengen von nicht negativen ganzen Zahlen. Hier wie im folgenden lassen wir also die Null als Element unserer Mengen zu. Wir bezeichnen die Elemente etwa von A durch a, also $A = \{a\}$.

Für jede Menge A definieren wir die *Anzahl-Funktion* $A(x)$ als die Anzahl der *positiven* Elemente von A, die nicht grösser sind als x, also

$$A(x) = \sum_{0 < a \leqslant x} 1 .$$

Die Zahl Null wird also nie in $A(x)$ gezählt, auch wenn sie zu A gehört. Definitionsgemäss ist $0 \leq A(x) \leq x$. Es ist $A(x) = 0$ dann und nur dann, wenn keine natürliche Zahl bis x zu A gehört, und es ist $A(x) = x$, wenn alle diese Zahlen in A liegen.

Die *Summe* $A + B$ zweier Mengen A und B besteht aus allen Zahlen, die sich als die Summe einer Zahl $a \in A$ und einer Zahl $b \in B$ darstellen lassen, also $A + B = \{a + b\}$. Entsprechend kann man die Summe von mehr als zwei Mengen definieren.

Enthält A die Null, so enthält $A + B$ alle Zahlen $0 + b$, das heisst es ist $B \subset A + B$. Liegt 0 sowohl in A als auch in B, so ist also $A \cup B \subset A + B$. Dies ist einer der Gründe, weshalb die Null oft als Element zugelassen wird, obwohl wir eigentlich nur an natürlichen Zahlen interessiert sind.

Viele Sätze der additiven Zahlentheorie betreffen die Summen gegebener Mengen. Ist etwa A die Menge der Quadrate, so wissen wir, dass $A + A$ alle Primzahlen der Form $4n + 1$ enthält, und dass $A + A + A + A$ die Menge aller nicht negativen ganzen Zahlen ist. Wir interessieren uns hier jedoch nur für allgemeine Mengen natürlicher Zahlen und für Probleme der folgenden Art: Was kann über die Menge $A + B$ und ihre Anzahlfunktion ausgesagt werden, wenn keine besonderen arithmetischen Eigenschaften von A und B vorausgesetzt werden. Das einfachste Beispiel ist vielleicht das folgende:

[1]) Vortrag am Mathematischen Institut der Universität Mainz am 15. 6. 1962.

[2]) Vgl. dazu E. Trost, *Ein wichtiger Begriff der additiven Zahlentheorie.* El. Math *1* (1946), 57–60.

Satz 1: Es sei $n \notin A + B$. Dann ist

$$A(n-1) + B(n-1) \leq n-1\,. \tag{1}$$

Zum Beweis betrachte man die beiden Mengen

$$\{a \mid 0 < a \leq n-1\} \quad \text{und} \quad \{n-b \mid 0 < n-b \leq n-1\}\,. \tag{2}$$

Gäbe es ein a und ein b, so dass $a = n - b$, so würde $n = a + b \in A + B$ folgen im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Somit haben die beiden Mengen (2) keine Zahlen gemein.

Die erste Menge enthält $A(n-1)$ Elemente. Da $0 < n - b \leq n - 1$ äquivalent ist mit $1 \leq b < n$ oder $0 < b \leq n - 1$, enthält die zweite Menge $B(n-1)$ Zahlen. Im ganzen haben wir somit $A(n-1) + B(n-1)$ verschiedene natürliche Zahlen, die alle $\leqq n - 1$ sind. Diese Anzahl ist daher ebenfalls $\leqq n - 1$.

Der Leser wird Satz 1 leicht verallgemeinern:

Satz 1': Es sei $0 \leq m < k < n$; $n \notin A + B$. Dann gilt

$$k - m \geq A(n-m-1) - A(n-k-1) + B(k) - B(m)\,. \tag{3}$$

Die Beweisidee von Satz 1 ist fundamental. Etwas komplizierter ist der Beweis eines im wesentlichen auf Besicovitch zurückgehenden Satzes [1][3]):

Satz 2: Es sei $0 \in A$, $B(n) > 0$, $n \notin C$; $A + B \subset C$,

$$C(n-1) < A(n-1) + B(n-1). \tag{4}$$

Dann gibt es ein $m \notin C$ mit $0 < m < n - 1$, so dass

$$C(n) - C(m) \geq A(n-m-1) + B(n) - B(m). \tag{5}$$

Aus $n \notin C$ folgt natürlich, dass $C(n-1) = C(n)$. Wegen $0 \in A$ ist ferner $B \subset C$, daher $n \notin B$. Somit ist auch $B(n-1) = B(n)$, und (4) kann auch in der Form geschrieben werden

$$C(n) < A(n-1) + B(n)\,. \tag{4'}$$

Der Leser bestätige, dass (5) mit $m = n - 1$ trivial ist.

Zum Beweis von (5) führe man die grösste Zahl k von B ein, die kleiner ist als n, also $k \leq n - 1$. Die Zahlen $k + 1, \ldots, n$ gehören nicht zu B, und es ist $B(n) = B(k)$. Die Menge C enthält die Zahlen $k + a$ mit $k < k + a \leq n$, das heisst $0 < a \leq n - k$. Dies ergibt

$$C(n) - C(k) \geq A(n-k) \geq A(n-k-1) = A(n-k-1) + B(n) - B(k)\,. \tag{6}$$

Wegen (4') ist $k > 0$.

Liegen alle natürlichen Zahlen bis k in C, so setzen wir $m = 0$. Andernfalls sei m die grösste natürliche Zahl unterhalb von k, die nicht in C liegt. Auf jeden Fall ist also $0 \leq m < k < n$, und die Zahlen $m + 1, \ldots, k$ liegen in C. Aus Satz 1' folgt daher

$$C(k) - C(m) = k - m \geq A(n-m-1) - A(n-k-1) + B(k) - B(m)\,.$$

[3]) Vgl. die Bibliographie am Ende dieser Arbeit.

Addieren wir diese Ungleichung zu (6), so erhalten wir

$$\big(C(n) - C(k)\big) + \big(C(k) - C(m)\big) = C(n) - C(m)$$

$$\geq \big(A(n-k-1) + B(n) - B(k)\big) + \big(A(n-m-1) - A(n-k-1) + B(k) - B(m)\big)$$

$$= A(n-m-1) + B(n) - B(m)\,,$$

also (5).

Nachträglich kann der Leser noch den Fall $m = 0$ mit Hilfe von (4′) ausschliessen. Somit folgt aus unserer Konstruktion, dass auch $0 < m < n-1$, $m \notin C$. Hiermit ist Satz 2 bewiesen.

Ist $B(m) > 0$ und $C(m) < A(m-1) + B(m)$, so kann Satz 2 auf $m = m_1$ statt n angewandt werden, usf. Auf diese Weise kann der Leser leicht die folgende Bemerkung aus Satz 2 ableiten:

Satz 2′: Es sei $0 \in A$, $0 \in B$ oder $1 \in B$, $n \notin C$; $A + B \subset C$. Dann gibt es eine Folge

$$m_0 = n,\ m_1,\ m_2, \ldots, \quad m_i,\ m_{i+1} = 0\,, \tag{7}$$

so dass $m_\lambda \notin C$, $m_\lambda - m_{\lambda+1} - 1 > 0$; $(\lambda = 0, 1, \ldots, i)$ und

$$C(n) \geq B(n) + A(n - m_1 - 1) + A(m_1 - m_2 - 1) + \ldots + A(m_i - m_{i+1} - 1). \tag{8}$$

Wählen wir A, B, C alle gleich der Menge der geraden Zahlen, so sind die Voraussetzungen von Satz 2′ erfüllt. Es wird dann $m_\lambda - m_{\lambda+1} - 1 = 1$, und in (8) gilt das Gleichheitszeichen. Kein -1 kann in diesem Falle aus (8) weggelassen werden. In diesem Sinne ist (8) scharf. Das Gleiche gilt erst recht für Satz 2.

Aus Satz 2 können wir andere Ungleichungen ableiten. Für diese Zwecke ist es bequem, unsere Definitionen etwas anders zu fassen:

Es sei n fest und $I = \{0, 1, \ldots, n\}$ sei die Menge aller nicht negativen ganzen Zahlen bis n. $A = \{a\}$, $B = \{b\}, \ldots$ seien Untermengen von I. Wir definieren etwa

$$A \oplus B = \{a + b \mid a + b \in I\}, \quad \text{also } A \oplus B = (A + B) \cap I\,.$$

Nach KHINTCHINE [4] wird die *Umkehrung* $\tilde{A}$ der Menge A definiert mittels

$$\tilde{A} = \{\tilde{a}\} = \{n - \bar{a} \mid \bar{a} \in I,\ \bar{a} \notin A\}.$$

Khintchines Formel lautet dann

$$A \oplus B \subset C \leftrightarrow \tilde{C} \oplus B \subset \tilde{A}\,. \tag{9}$$

Der Beweis von (9) ist eine leichte Übungsaufgabe.

Wir machen in Satz 2 die Substitutionen $A \to \tilde{C}$, $B \to B$, $C \to \tilde{A}$.

Die Voraussetzung $0 \in A$ geht über in $0 \in \tilde{C}$. Dies ist äquivalent mit $n \notin C$. Ebenso geht $n \notin C$ über in $0 \in A$. Weiter geht (4) über in

$$\tilde{A}(n-1) < \tilde{C}(n-1) + B(n-1)\,. \tag{10}$$

Hier ist etwa

$$\tilde{A}\,(n-1) = \sum_{0<\tilde{a}<n} 1 = \sum_{\substack{0<n-\bar{a}<n \\ \bar{a}\notin A}} 1 = \sum_{\substack{0<\bar{a}<n \\ \bar{a}\notin A}} 1$$

$$= (n-1) - \sum_{0<a<n} 1 = n - 1 - A\,(n-1)\,.$$

Ebenso ist

$$\tilde{C}(n-1) = n - 1 - C(n-1) ,$$

und (10) lautet

$$n - 1 - A(n-1) < n - 1 - C(n-1) + B(n-1) .$$

Somit ist (10) gleichwertig mit (4).

Formel (5) geht über in

$$\tilde{A}(n) - \tilde{A}(m) \geq \tilde{C}(n - m - 1) + B(n) - B(m) .$$

Diese Ungleichung lässt sich ähnlich wie (10) bearbeiten. Setzen wir dann noch $k = n - m$, so erhalten wir:

Satz 2a: Unter den Voraussetzungen von Satz 2 gibt es ein $k \in A$ mit $1 < k < n$, so dass

$$C(n) - C(n-k) \geq A(k-1) + B(n) - B(n-k) .$$

Ähnlich zeigt man mit Hilfe von (9) und den Substitutionen $A \to A$, $B \to \tilde{C}$, $C \to \tilde{B}$:

Satz 2b: Es sei $0 \in A$, $0 \in B$, $A \oplus B \subset C \neq I$. Ferner gelte (4).

Dann gibt es ein $k \in B$ mit $1 < k < n$, so dass

$$C(k-1) \geq A(k-1) + B(k-1) .$$

Der Leser bestimme noch die Ungleichung, die aus Satz 2, – ohne Benutzung von (9), – hervorgeht, wenn er die Substitution $A \to A$, $B \to B$, $C \to \tilde{C}$ ausführt. Sie ist insofern von Interesse als die Bedingung $A \oplus B \subset C$ übergeht in $n \notin A \oplus B \oplus C$.

Gelegentlich muss die Voraussetzung $A \oplus B \subset C$ durch die schärfere $A \oplus B = C$ ersetzt werden. Um ein Analogon von (9) zu erhalten, führen wir die *Differenz* zweier Zahlenmengen ein. Dieser Begriff, der der Theorie der konvexen Körper entlehnt wurde, kann folgendermassen gefasst werden.

A, B seien wieder Untermengen von I. Ihre Differenz $A \ominus B$ wird definiert als die grösste Menge $D \subset I$ mit $D \oplus B \subset A$. Sie besteht also aus allen $d \in I$, für die $d + b \in A$ für alle $b \in B$ mit $b \leq n - d$. Offensichtlich gilt

$$A \oplus B \subset C \leftrightarrow A \subset C \ominus B .$$

Das Analogon von (9) ist dann gegeben durch

$$A \ominus B = (\tilde{A} \oplus B)^{\sim} \quad \text{oder auch} \quad (A \oplus B)^{\sim} = \tilde{A} \ominus B .$$

Der Leser beweise diese Identität und überlege sich, dass (9) tatsächlich aus ihr und der vorangehenden Beziehung folgt.

Der Begriff der Differenz wird bei einer Ungleichung benutzt, die wohl eine der schärfsten bekannten Formulierungen des berühmten Mannschen Satzes[4]) ist; vgl. [3] und [5]:

---

[4]) Eine Kurzfassung eines Van der Corputschen Beweises wurde in El. Math. *2* (1947), 102–103 gegeben, vgl. Fussnote [2]).

Satz 3: Es sei $0 \in A$, $0 \in B$, $n \notin C$; $A + B \subset C$. Dann gibt es ein m mit

$$m = n \quad \text{oder} \quad 0 < m < \frac{n}{2}, \tag{11}$$

$$n - m \in C \ominus A, \quad n - m \in C \ominus B,$$

so dass

$$C(n) - C(n - m) \geq A(m) + B(m).$$

Wir können auf den schwierigen Beweis dieses Satzes mittels der Mannschen Methode hier nicht eingehen. Jedoch wollen wir das Ergebnis angeben, das man erhält, wenn C in Satz 3 durch $\tilde{C}$ ersetzt wird:

Satz 3a: Es sei

$$0 \in A, \quad 0 \in B, \quad 0 \in C, \quad n \notin A + B + C. \tag{12}$$

Dann gibt es ein m, das (11) und

$$m \notin A + B, \quad m \notin A + C \tag{13}$$

befriedigt, so dass

$$m > A(m) + B(m) + C(m).$$

Abgesehen von (13) ist diese Formulierung des Mannschen Satzes symmetrisch in A, B und C. Man könnte sie völlig symmetrisch machen, wenn man verlangte, dass überdies $m \notin B + C$. Diese Vermutung scheint unter anderem insofern von Interesse, als sie sich anscheinend nicht mit Herrn MANNS Methode beweisen lässt, und auf dieser Methode beruht der einzige bekannte direkte Beweis von Satz 3a.

Eine Zeitlang vermutete man, dass (13) durch die stärkere Forderung

$$m \notin A + B + C \tag{14}$$

ersetzt werden kann. Merkwürdigerweise kann man zeigen, dass Satz 3a mit (14) statt (13) für $n \leq 14$ richtig ist, jedoch für $n = 15$ falsch wird. Ein von Herrn MANN gegebenes Gegenbeispiel ist das folgende:

$$A = \{0, 1, 8, 10, 12, 14\}; \quad B = \{0, 2, 8, 9, 12, 13\}; \quad C = \{0, 4, 8, 9, 10, 11\}.$$

Bei der Suche nach dem Gegenbeispiel konnte man ausser (12) noch voraussetzen, dass n die kleinste nicht in $A + B + C$ enthaltene Zahl ist, dass also

$$\{0, 1, \ldots, n - 1\} \subset A + B + C. \tag{15}$$

Dann hatte man nur zu zeigen, dass

$$n \leq A(n) + B(n) + C(n). \tag{16}$$

Dies führt zu der Frage, was sich über die rechte Seite von (16) aussagen lässt, wenn (12) und (15) vorausgesetzt werden.

Wegen $n \notin A + B$ ist jedenfalls $A(n) + B(n) \leq n - 1$. Ebenso gilt natürlich $B(n) + C(n) \leq n - 1$, $C(n) + A(n) \leq n - 1$. Addition dieser drei Ungleichungen ergibt

$$A(n) + B(n) + C(n) \leq \frac{3}{2}(n - 1).$$

Sonderbarerweise ist diese anscheinend recht grobe Abschätzung in dem folgenden Sinne scharf:

(i) Es gibt ein $\gamma > 0$, so dass für jedes Tripel A, B, C, das die Voraussetzungen (12) und (15) erfüllt, gilt

$$A(n) + B(n) + C(n) < \frac{3}{2}\, n - \gamma\, n^{2/3}.$$

(ii) Es gibt ein von n unabhängiges $\alpha > 0$ und zu jedem n drei Mengen A, B, C, die (12) und (15) befriedigen, so dass

$$A(n) + B(n) + C(n) > \frac{3}{2}\, n - \alpha\, n^{2/3}.$$

Peter Scherk, University of Toronto, Kanada

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. S. Besicovitch, *On the density of the sum of two sequences of integers.* J. London Math. Soc. *10* (1935), 246–248.
[2] P. Erdös and P. Scherk, *On a question of additive number theory.* Acta Arithmetica *5* (1958), 45–55.
[3] J. H. B. Kemperman and P. Scherk, *On sums of integers.* Canad. J. Math. *6* (1954), 238–252.
[4] A. Khintchine, *Zur additiven Zahlentheorie.* Mat. Sbornik *39* (1932), 27–34.
[5] H. B. Mann, *A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers.* Ann. of Math. *43* (1942), 523–527.

Trois nombres tétraédraux en progression arithmétique

Le but de cette note est de donner une démonstration élémentaire de la proposition suivante:

Théorème. *Il existe une infinité de progressions arithmétiques formées de trois nombres tétraédraux distincts*[1].

Démonstration. Définissons les suites infinies d'entiers positifs a_n et b_n ($n = 1, 2, \ldots$) par les conditions:

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1, \quad a_{n+1} = 73\, a_n + 148\, b_n, \quad b_{n+1} = 36\, a_n + 73\, b_n. \tag{1}$$

On aura évidemment

$$a_n > b_n \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

On vérifie sans peine l'identité

$$[3\,(73\, a + 148\, b)]^2 - 37\,(36\, a + 73\, b)^2 = (3\, a)^2 - 37\, b^2$$

d'après laquelle il résulte de (1) que

$$(3\, a_{n+1})^2 - 37\, b_{n+1}^2 + 1 = (3\, a_n)^2 - 37\, b_n^2 + 1 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

et, comme $(3\, a_1)^2 - 37\, b_1^2 + 1 = 6^2 - 37 + 1 = 0$, il résulte par l'induction que

$$(3\, a_n)^2 - 37\, b_n^2 + 1 = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

[1]) On appelle *tétraédral* (ou *pyramidal*) tout nombre de la forme $T_n = [(n+1)^3 - (n+1)]/6$. Voir ma note dans les Elemente der Math. XVII (1962), p. 29.