Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **17 (1962)**

Heft 3

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Une conséquence immédiate de notre théorème est que le problème s'il existe une infinité de nombres triangulaires qui ne sont pas sommes de deux nombres triangulaires >0 équivaut au problème s'il existe une infinité de nombres premiers qui sont sommes de carrés de deux nombres naturels consécutifs. Il résulte sans peine de l'hypothèse H_0 de M. A. SCHINZEL, exprimée dans les Acta Arithmetica IV (1958), p. 188, qu'il existe une infinité de tels nombres premiers. Pour $n \leqq 10$ on obtient les nombres premiers de la forme $n^2 + (n+1)^2$ seulement pour $n = 1, 2, 4, 5, 7$ et 9: ce sont les nombres 5, 13, 41, 61, 113, 181. W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

Ungelöste Probleme

Nr. 43. Ein dem Unterzeichneten von A. J. H. M. VAN DE VEN mitgeteiltes Problem lautet wie folgt: Gibt es in der euklidischen Ebene sechs nicht auf ein und demselben Kegelschnitt gelegene Punkte derart, dass alle sechs durch je fünf der Punkte bestimmten Kegelschnitte untereinander kongruent sind? – Prinzipiell lässt sich dieses Problem in endlich vielen Schritten auf algebraischem Wege entscheiden, die Rechnungen sind aber kaum zu übersehen. Dasselbe Problem für vier Punkte und Kreise führt auf die vollständige Lösung, die durch drei beliebige Punkte und das Orthozentrum des durch sie gebildeten Dreiecks gegeben ist.

J. J. SCHÄFFER, Montevideo

Kleine Mitteilungen

Einige Bemerkungen zu einer Aufgabe von L. CARLITZ

Die in einer Aufgabe von L. CARLITZ [1] gestellte Frage nach der Bestimmung der Anzahl N der Lösungen der Kongruenz

$$(x^2 - 1)\,(x^2 - 2) \ldots \left(x^2 - \frac{p-1}{2}\right) \equiv 0 \pmod p$$

erfordert für die beiden Fälle $p \equiv 1 \pmod 4$ und $p \equiv 3 \pmod 4$ eine ganz verschiedenartige Behandlung. Für den ersten Fall ergibt sich ohne weiteres

$$N = \frac{p-1}{2}\,, \quad p \equiv 1(4)\,, \tag{1}$$

da es für $p = 4z + 1$ zwischen 0 und $p/2$ gleich viele quadratische Reste und Nichtreste gibt. Für den Fall $p = 4z + 3$ kann man die zuerst von DIRICHLET bewiesenen Formeln für die Klassenzahl des quadratischen Körpers $R(\sqrt{-p})$ benutzen, da in ihnen der Überschuss der Anzahl der zwischen 0 und $p/2$ liegenden quadratischen Reste über die Anzahl der Nichtreste, also der Ausdruck $N - (p-1)/2$ auftritt [2]. Man erhält so die Formeln [3]

$$\begin{aligned} N &= \frac{p-1}{2} + 3\,h(-p)\,, \quad p \equiv 3(8)\,, \\ N &= \frac{p-1}{2} + h(-p)\,, \quad p \equiv 7(8)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Im folgenden wollen wir zeigen, dass sich für den Fall $p = 4z + 3$ N auch unabhängig von der Klassenformel bestimmen lässt und zwar als mod p kleinster positiver Rest eines geschlossenen Ausdrucks, der im wesentlichen von einer gewissen Bernoullischen Zahl abhängt. Umgekehrt ergibt sich daraus eine interessante Kongruenz, der im Falle $p = 4z + 3$ die Klassenzahl $h(-p)$ genügt.