

Sur une propriété des nombres triangulaires

Autor(en): **Sierpiski, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **17 (1962)**

Heft 2

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21906>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur une propriété des nombres triangulaires

Le but de cette note est de donner une démonstration courte et simple de la proposition qu'il existe une infinité des paires de nombres triangulaires dont la somme ainsi que la différence sont des nombres triangulaires.

Je démontrerai notamment qu'il existe une infinité de systèmes des nombres naturels x et y satisfaisants aux équations:

$$t_x + t_{2y} = t_{3y} \quad \text{et} \quad t_x - t_{2y} = t_{y-1} \quad \left(\text{où } t_n = \frac{n(n+1)}{2} \right). \quad (1)$$

On vérifie sans peine que chacune des deux équations (1) est équivalente à l'équation

$$x^2 + x = 5y^2 + y. \quad (2)$$

Il suffira donc de démontrer que l'équation (2) admet une infinité de solutions en nombres naturels x et y .

Il résulte tout de suite de l'identité

$$\begin{aligned} (161x + 360y + 116)^2 + 161x + 360y + 116 - 5(72x + 161y + 52)^2 - \\ - (72x + 161y + 52) = x^2 + x - 5y^2 - y \end{aligned}$$

que si x, y est une solution de l'équation (2) en nombres naturels x et y , les nombres $u = 161x + 360y + 116$ et $v = 72x + 161y + 52$ présentent aussi une solution de l'équation (2) en nombres naturels plus grands respectivement que x et y . Les nombres $x = 2$ et $y = 1$ donnant évidemment une solution de l'équation (2), il en résulte tout de suite que cette équation a une infinité de solutions en nombres naturels x et y . Notre assertion se trouve ainsi démontrée.

En s'appuyant sur les résultats publiés dans l'Intermédiaire des Mathématiciens 12 (1905), p. 207 par P. F. TEILHET, M. J. BROWKIN donne dans le journal Wiadomosci Matematyczne Ser. II, 2 (1957-59), p. 253-255 une méthode de trouver toutes les paires des nombres triangulaires non nuls dont la somme ainsi que la différence sont des nombres triangulaires. Il donne aussi toutes telles paires de nombres triangulaires dont l'indice est < 500 .

On a, par exemple

$$\begin{aligned} t_6 + t_5 = t_8, \quad t_6 - t_5 = t_3 \\ t_{18} + t_{14} = t_{23}, \quad t_{18} - t_{14} = t_{11}. \end{aligned}$$

Quant à l'équation (2) on peut démontrer que toutes ses solutions en entiers ≥ 0 sont contenues dans la suite infinie

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots,$$

où $x_0 = 0, y_0 = 0, x_1 = 2, y_1 = 1$ et, pour $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$x_{k+2} = 161x_k + 360y_k + 116, \quad y_{k+2} = 72x_k + 161y_k + 52.$$

W. SIERPIŃSKI (Varsovie)