Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **16 (1961)**

Heft 3

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Für $x = y$ wird $$\varphi_2 = \overline{\varphi_2}\,; \quad \psi_2 = \overline{\psi_2}$$

und $$\varphi_2 - \psi_2 = \frac{x-1}{x+1}$$

Hieraus folgt

$$\varphi_{2n} = \overline{\varphi_{2n}} = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n\right\},$$

$$\psi_{2n} = \overline{\psi_{2n}} = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n\right\}$$

und daraus nach (18) für den Grenzwert des Mischungsverhältnisses im Falle $x = y$:

$$\lim_{n\to\infty} m = \lim_{n\to\infty} \overline{m} = 1$$

Die letzte Beziehung besagt, dass im Falle der Gleichheit von x und y, nach unendlich vielen Operationen, in jedem Behälter gleich viel rote wie grüne Flüssigkeit enthalten ist, was phänomenologisch ohne weiteres verständlich ist. H. BRÄNDLI, Zürich

Aufgaben

Aufgabe 375. Ist p eine Primzahl der Gestalt $4n + 3$ und N die Anzahl der quadratischen Nichtreste von p unter den Zahlen

$$1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2},$$

so besteht die Kongruenz

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv (-1)^N \pmod{p}.$$

R. STEUERWALD †, Alzing (Bayern)

Lösung: Die Reste $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (p-1)/2$ sind mod. p verschieden. Multipliziert man also jeden der N quadratischen Nichtreste aus $1, 2, \ldots, (p-1)/2$ mit dem quadratischen Nichtrest -1, so erhält man sämtliche $(p-1)/2$ quadratischen Reste, die man nach Wahl einer Primitivwurzel q auch in der Form $q^0, q^2, \ldots, q^{p-3}$ aufzählen kann. Bildet man beide Male das Produkt, so ergibt sich

$$(-1)^N\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv q^{0+2+\cdots+p-3} = \left(q^{\frac{p-3}{4}}\right)^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p),$$

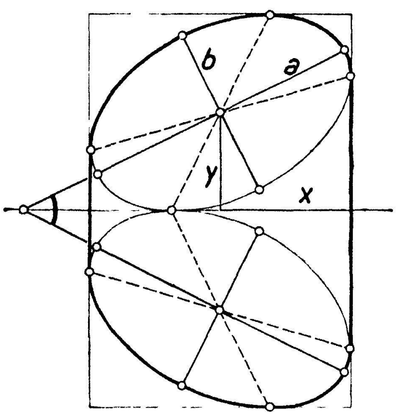
woraus die Behauptung folgt. E. TEUFFEL, Korntal bei Stuttgart

A. MAKOWSKI (Warschau) und E. KRÄTZEL (Jena) bemerken, dass die Aussage der Aufgabe als Satz 114 in HARDY and WRIGHT: An introduction to the theory of numbers, 3. ed., p. 88 (1954) vorkommt (Der Beweis ist vom oben gegebenen verschieden.) W. JÄNICHEN (Berlin) weist auf P. BACHMANN: Niedere Zahlentheorie I, S. 178–179 (1902) hin. Weitere Lösungen sandten J. FIEDLER (Regensburg), H. MEILI (Winterthur) und O. REUTTER (Ochsenhausen).

Aufgabe 376. Zwei Rotationsellipsoide liegen spiegelbildlich in bezug auf eine Tangentialebene. Welchen Winkel müssen die Rotationsachsen bilden, damit der kleinste konvexe Bereich, der die beiden Ellipsoide umfasst, maximales Volumen hat?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: Da die beiden Rotationsellipsoide in bezug auf eine Tangentialebene spiegelbildlich liegen, sind sie kongruent und haben unter sich und mit der gemeinsamen Tangentialebene genau einen Punkt gemeinsam. Ihre Halbachsen seien a und b, wobei a auf der Rotationsachse liege. Der kleinste konvexe Bereich, der die beiden Ellipsoide umfasst, ist ein elliptischer Zylinder, auf dessen Stirnflächen je ein halbes Rotationsellipsoid aufgesetzt ist (vgl. die Figur). Die eine Halbachse des elliptischen Zylinderquerschnittes ist b, die andere sei x. Ferner sei y der Abstand eines Ellipsoidmittelpunktes von der gemeinsamen Tangentialebene. Dann besitzt der genannte konvexe Bereich das Volumen



$$V = \frac{4}{3} \pi a b^2 + 2 \pi b x y .$$

V ist demnach maximal, wenn das Produkt $x y$ maximal ist. Die Lösung der gestellten Aufgabe läuft also darauf hinaus, einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ein Rechteck (Seiten $2x$ und $2y$) mit maximalem Flächeninhalt umzubeschreiben. Dieses Problem besitzt als Lösung bekanntlich ein Quadrat, dessen Diagonalen mit den Ellipsenachsen zusammenfallen und das den Flächeninhalt $4xy = 2(a^2 + b^2)$ hat. Folglich nimmt der kleinste konvexe Bereich, der die beiden Rotationsellipsoide umfasst, das grösste Volumen

$$V_{max} = \frac{4}{3} \pi a b^2 + \pi b (a^2 + b^2)$$

dann an, wenn die Rotationsachsen orthogonal sind.

O. Reutter, Ochsenhausen/Deutschland

Fast dieselbe Lösung sandte J. Erdösi (Budapest). H. Meili (Winterthur) gibt folgende Formel für das Volumen des kleinsten konvexen Bereiches, wobei φ der Winkel ist, den die Rotationsachsen bilden:

$$V = \frac{4}{3} \pi a b^2 + \pi b \sqrt{4 a^2 b^2 + (a^2 - b^2)^2 \sin \varphi} .$$

Aufgabe 377. Man beweise: Sind die Eckpunkte eines Dreiecks Gitterpunkte und enthalten die Seiten sonst keine Gitterpunkte und liegt im Innern des Dreiecks genau ein Gitterpunkt S, so ist S der Schwerpunkt des Dreiecks. J. Surányi, Budapest

1. Lösung: Sind P, Q, R die Eckpunkte (Ortsvektoren), so gilt $S = a P + b Q + c R$ ($a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$). Zunächst folgt $a, b, c < 1/2$. In der Tat: Wäre etwa $a \geqq 1/2$, so müsste $T = 2S - P = (2a - 1) P + 2bQ + 2cR$ ein dem Dreieck angehörender Gitterpunkt sein, so dass eine der vier Beziehungen $T = P, Q, R, S$ oder $S = P$, $2S = P + Q$, $2S = P + R$, $S = P$ zu gelten hätte, die aber alle der Voraussetzung widersprechen. Nun bilden wir den Gitterpunkt $P + Q + R - 2S = (1 - 2a) P + (1 - 2b) Q + (1 - 2c) R$, der wegen $(1 - 2a)$, $(1 - 2b)$, $(1 - 2c) > 0$ und $(1 - 2a) + (1 - 2b) + (1 - 2c) = 1$ im Innern des Dreiecks liegt und demnach mit S zusammenfallen muss. Hieraus resultiert $3S = P + Q + R$, was zu zeigen war. H. Hadwiger, Bern

2. Lösung: Es seien A, B, C die Eckpunkte des Dreiecks. Unter den Voraussetzungen der Aufgabe haben die Dreiecke ASB, BSC, CSA im Innern keine Gitterpunkte. Sie haben deshalb bekanntlich denselben Flächeninhalt (1/2), der also ein Drittel des Inhaltes des Dreiecks ABC ist. Der Abstand des Punktes S von einer Dreieckseite ist deshalb ein Drittel der zu dieser Seite gehörenden Höhe. Hieraus folgt, dass S der Schwerpunkt ist.

B. Bollobás, Budapest

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), E. Herrmann (Porz a. Rhein). W. Jänichen (Berlin), R. Reutter (Ochsenhausen), E. Teuffel (Korntal/Stuttgart).

Neue Aufgaben

403. Démontrer que si n, n_1 et n_2 sont des entiers positifs, $n \mid n_1 n_2$ et aucun des nombres n_1 et n_2 n'est divisible par n, alors

$$d = \frac{n_1}{\left(n_1, \frac{n_1 n_2}{n}\right)}$$

est un diviseur de n, tel que $1 < d < n$. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

404. Démontrer que si

$$n = a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$

où a, b, c, d sont des entiers positifs, tels que $a \geqq b$, $c \geqq d$, $a > c$, $(a, b) = (c, d) = 1$, alors

$$d = \frac{a\,c + b\,d}{(a\,c + b\,d,\, a\,b + c\,d)}$$

est un diviseur de n tel que $1 < d < n$. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

405. Gegeben sind eine Fläche zweiter Ordnung F und n Punkte P_i ausserhalb derselben. Gesucht ist ein (im allgemeinen windschiefes) n-Seit, dessen Seiten der Reihe nach durch die Punkte P_i gehen und die Fläche F berühren. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

406. Aufgabc über die Lagebeziehung eines Vierecks zu vier Parabeln: Bilden vier Punkte einer Ebene ein konvexes Polygon, dann lassen sich durch jeden der vier Punkte im allgemeinen zwei reelle Parabeln legen, die die Verbindungsgeraden der drei anderen Punkte berühren. Bezeichnet man die Parabeln durch den Punkt P_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ mit p_k und p'_k, die Berührungspunkte von p_k bzw. p'_k mit der Geraden $[P_{k+p}, P_{k+p+1}]$ mit $T_{k,k+2p+1}$ bzw. $T'_{k,k+2p+1}$*) $(p = 1, 2)$ so gilt

$$(T_{k,k+1}\, P_{k-2} \cdot P_{k-1}) = \frac{1}{(T_{k,k-1}\, P_{k-2} \cdot P_{k-3})} \tag{1}$$

das heisst die von einem Eckpunkt P_{k-2} an die Parabel p_k ausgehenden Tangentenstrecken werden von den Punkten P_{k-1} und P_{k-3} in reziprokem Verhältnis geteilt. Ferner gilt

$$(T_{k,k+1}\, P_{k-2} \cdot P_{k-1}) = (T_{k+1,k}\, P_{k-1} \cdot P_{k-2}) \tag{2}$$

das heisst die Berührungspunkte $T_{k,k+1}$, $T_{k+1,k}$ der Parabeln p_k und p_{k+1} mit der Seite $[P_{k+2}, P_{k+3}]$ liegen symmetrisch bezüglich des Halbierungspunktes der Seite $[P_{k+2}, P_{k+3}]$. E. SCHRÖDER, Dresden

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Addiert man zur Hälfte der verflossenen Tage des Jahres 1961 einen Drittel der noch kommenden, so erhält man die Zahl der verflossenen Tage. Welches Datum schreibt man? (Der angebrochene Tag gilt als verflossen.)

   ▶ 26. Mai 1961.

2. Früher mussten die an den Parkplätzen einer Stadt aufgestellten Park-Uhren alle 10 Tage geleert werden, wobei von einem Polizeimann 150 Uhren innert zwei Stunden geleert werden konnten. Nachdem ein neues Fabrikat in Gebrauch steht, müssen die Uhren nur alle 25 Tage geleert werden, wobei innert zwei Stunden 250 Leerungen erfolgen können. Wieviel Prozent beträgt die Arbeitseinsparung?

   ▶ 76%.

---

*) **Bei Summation der Indizes ist stets die Indexzahl modulo vier zu setzen.**

3. Die sechsstellige Zahl

$$N = (2\,a)\ (2\,b)\ (2\,c)\ a\,b\,c$$

ist stets durch 23 und durch 29 teilbar.

▶ $N = a\,b\,c \cdot 2001 = a\,b\,c \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29$.

4. Für die Fläche des Kreissegments mit dem Radius r, dem Bogen b und dem Zentriwinkel α gilt für kleines α die Näherungsformel

$$f \approx \frac{b^3}{12\,r}\,.$$

Wie gross ist der prozentuale Fehler für $\alpha = 30°$?

▶ $-\ 1{,}35\%$.

5. Bestimme ohne Gebrauch von Tafeln einen Näherungswert von

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 3 - \ln 2}\,.$$

▶ $5 = \left(\frac{3}{2}\right)^x \approx \frac{81}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^4\,; \quad x \approx 4$ (genauer 3,9694) .

Literaturüberschau

Algebra. Zweiter Teil. Von B. L. VAN DER WAERDEN. Vierte Auflage. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 34. 275 S. DM 29.60. Springer-Verlag, Berlin 1959.

Das vorliegende Buch weist gegenüber den vorangegangenen Auflagen verschiedene wesentliche Änderungen auf. Das Kapitel «Eliminationstheorie» ist weggefallen, dafür sind die Kapitel «Algebraische Funktionen einer Variablen» und «Topologische Algebra» neu hinzugekommen. Das erste dieser neuen Kapitel führt bis zum Riemann-Roch'schen Satz, der nach der Methode von A. WEIL bewiesen wird. Von besonderem Interesse sind im zweiten neuen Kapitel die Ausführungen über die durch Bewertungen eines Schiefkörpers definierten Topologien. Das bemerkenswerteste Resultat ist hier der Satz von PONTRJAGIN, nach dem jeder hinsichtlich einer Ringtopologie lokal bikompakte zusammenhängende Schiefkörper stetig isomorph ist zum Körper der reellen oder der komplexen Zahlen oder zum Schiefkörper der Quaternionen. Beim Beweis dieses Satzes muss allerdings an einigen Stellen auf die Literatur verwiesen werden.

Auch die «alten» Kapitel sind nicht unverändert geblieben, sondern wurden hinsichtlich Form und Inhalt auf den neuesten Stand gebracht. So ist zum Beispiel im Kapitel «Algebren» (früher: Theorie der hyperkomplexen Grössen) das Radikal von JACOBSON eingeführt worden. Die Vermehrung von Hinweisen auf grundlegende Arbeiten der modernen Literatur wird der Leser sehr begrüssen.

Trotz dieser Änderungen im zweiten Teil ist der Charakter dieses Standardwerkes derselbe geblieben. Das ursprüngliche Ziel, den Leser auf eine möglichst einfache, elegante und doch absolut strenge Weise in die modernen algebraischen Begriffe und Methoden einzuführen, wird gerade in den neuen Kapiteln in schönster Weise erreicht. E. TROST

Algebra. Erster Teil. Von B. L. VAN DER WAERDEN. Fünfte Auflage. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 33. 292 S. DM 22.–. Springer-Verlag, Berlin 1960.

Die vierte Auflage der ursprünglichen «Modernen Algebra» erschien 1955 und wurde in El. Math. *11*, 67 (1956) besprochen. Die fünfte Auflage ist ein unveränderter Abdruck.
E. TROST

Mechanik deformierbarer Körper. Von MAX PÄSLER. 199 Seiten mit 48 Figuren. DM 5.80. Sammlung Göschen, Band 1189/1189a, Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 1960.

Eine knapp gefasste mathematische Einleitung lässt erkennen, dass im nachfolgenden Text erhebliche mathematische Anforderungen gestellt werden. Es werden Formeln und