Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **16 (1961)**

Heft 2

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Aufgaben

Aufgabe 371. Sind a, b, c, d gerichtete Gerade (Speere) der euklidischen Ebene und sind $\widehat{a\,b}$, $\widehat{a\,c}$, $\widehat{a\,d}$, $\widehat{b\,c}$, $\widehat{b\,d}$, $\widehat{c\,d}$, von 0 und π verschiedene Winkel zwischen 0 und $2\,\pi$, dann ist

$$\sin \widehat{a\,b} \cdot \sin \widehat{c\,d} + \sin \widehat{a\,d} \cdot \sin \widehat{b\,c} = \sin \widehat{a\,c} \cdot \sin \widehat{b\,d}\,.$$

R. LAUFFER, Graz

Lösung: Wir führen in der Ebene ein Vektorsystem mit orthonormierten kartesischen Koordinaten ein, wobei die Lage des Systems willkürlich gewählt werden kann. In diesem System sind dann den gegebenen Speeren $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$, $d = a_4$ in eindeutiger Weise die gleichgerichteten Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_i = (x_i, y_i)$ mit $|\,\boldsymbol{e}_i\,| = 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ zugeordnet. Für den positiv orientierten Winkel zwischen a_i und a_k gilt dann (Flächeninhalt des Parallelogramms!)

$$\sin \widehat{a_i\,a_k} = \sin (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = x_i\,y_k - x_k\,y_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)\,.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\sin \widehat{a\,b} \cdot \sin \widehat{c\,d} + \sin \widehat{a\,d} \cdot \sin \widehat{b\,c} &= (x_1\,y_2 - x_2\,y_1)\,(x_3\,y_4 - x_4\,y_3)\\ &\quad + (x_1\,y_4 - x_4\,y_1)\,(x_2\,y_3 - x_3\,y_2)\\ &= -\,x_1\,x_4\,y_2\,y_3 - x_2\,x_3\,y_1\,y_4 + x_1\,x_2\,y_3\,y_4 + x_3\,x_4\,y_1\,y_2\\ &= (x_1\,y_3 - x_3\,y_1)\,(x_2\,y_4 - x_4\,y_2) = \sin \widehat{a\,c} \cdot \sin \widehat{b\,d}\,, \quad \text{q. e. d.}\end{aligned}$$

O. REUTTER, Ochsenhausen

W. JÄNICHEN (Berlin) beweist eine allgemeinere Formel, in der die a_i vier im Raum gelegene Speere bedeuten. Jedes der drei Sinusprodukte in der Formel der Aufgabe muss dann mit dem Cosinus desjenigen Winkels multipliziert werden, den die durch die Winkel in den Sinusfaktoren bestimmten Ebenen bei passender Orientierung bilden.

Weitere Lösungen sandten B. BOLLOBÁS (Budapest), H. FRISCHKNECHT (Berneck), G. GEISE (Dresden), E. HERRMANN (Porz am Rhein), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München), J. SCHOPP (Budapest), G. N. VLAHAVAS (London), C. VUILLE (La Sagne).

Aufgabe 372. Ein Tetraeder mit den Seitenflächen a_i und den zugehörigen Höhen h_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ habe den Inkugelradius ϱ und den Umkugelradius r. Der Mittelpunkt der Umkugel liege im Innern des Tetraeders. Man beweise folgende Ungleichung:

$$16\,\varrho \leqq 4 \prod_{i=1}^{4} h_i^{1/4} \leqq \sum_{i=1}^{4} h_i \leqq (4 + \sqrt{2})\,r\,.$$

J. BERKES, Szeged

Lösung: Die Ungleichung der Aufgabe lässt sich hinsichtlich der Abschätzung nach oben wesentlich verschärfen. Sind H, G, A und Q harmonisches, geometrisches, arithmetisches und quadratisches Mittel der Höhen h_i, so gilt ohne Einschränkung für den Umkugelmittelpunkt des Tetraeders

$$4\,\varrho = H \leqq G \leqq A \leqq Q \leqq \frac{4}{3}\,r\,,$$

wie an anderer Stelle[1]) gezeigt wurde.

---

[1]) F. LEUENBERGER, *Extremaleigenschaften der Summe der wichtigsten Ecktransversalen des n-dimensionalen Simplex*, El. Math. *15*, 81–82 (1960).

Für die Abschätzung $A \leqq 4\,r/3$ lässt sich im Andenken an den kürzlich verstorbenen Tetraederspezialisten V. Thébault, der folgende direkte Beweis geben:

Die sechs Ebenen, welche man durch die Mitten der Tetraederkanten normal zu den Gegenkanten legen kann, schneiden sich bekanntlich im Punkte M von Monge. Aus der Relation [2])

$$\sum \overline{MA_i}^2 = 4\,r^2$$

mit A_i als Tetraederecke folgert man wegen $A \leqq Q$ etwa

$$\sum \overline{MA_i} \leqq 4\,r\,, \tag{1}$$

mit Gleichheit nur, wenn M zugleich Umkugelmittelpunkt des Tetraeders ist. Ist H_i der Fusspunkt von h_i, B_i der Schnittpunkt der Höhenverlängerung mit der Umkugel, so gilt offenbar $(h_i + \overline{H_i B_i})/2 \leqq r$. Ist M_i der Fusspunkt der Normalen von M auf die Gegenfläche von A_i, so gilt deshalb wegen $\overline{H_i B_i}/2 = \overline{MM_i}$ [3]) die Ungleichung $h_i/2 + \overline{MM_i} \leqq r$, woraus

$$\frac{1}{2}\sum h_i + \sum \overline{MM_i} \leqq 4\,r \tag{2}$$

folgt. Addition von (1) und (2) liefert

$$\frac{1}{2}\sum h_i + \sum (\overline{MA_i} + \overline{MM_i}) \leqq 8\,r\,. \tag{3}$$

Ersichtlich ist aber $h_i \leqq \overline{MA_i} + \overline{MM_i}$ und deshalb nach Summation dank (3)

$$\frac{3}{2}\sum h_i \leqq 8\,r\,,$$

womit in der Tat die behauptete Relation gilt. Aus dem Beweisgang ergibt sich, dass Gleichheit nur für das reguläre Tetraeder vorhanden ist. F. Leuenberger, Zuoz

Weitere Lösungen mit Verschärfung sandten O. Reutter (Ochsenhausen) und J. Schopp (Budapest).

Aufgabe 373. Ein Rhombus vom Umfang 4 besitze in orthonormierten kartesischen Koordinaten die Eckpunkte (0, 0), (x, ξ), (y, η), (z, ζ). Es sei φ der Rhombuswinkel im Ursprung und

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} x & \xi \\ y & \eta \\ z & \zeta \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass die Eigenwerte von AA' nur von φ, nicht aber von der Lage des Rhombus abhängen. Für welche φ werden die Eigenwerte einander gleich? I. Paasche, München

Lösung: Für die Eigenwerte von AA' gilt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - \lambda & x\,\xi + y\,\eta + z\,\zeta \\ x\,\xi + y\,\eta + z\,\zeta & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Das heisst

$$\lambda^2 - (x^2 + \xi^2 + y^2 + \eta^2 + z^2 + \zeta^2)\,\lambda + (x^2 + y^2 + z^2)\cdot(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (x\,\xi + y\,\eta + z\,\zeta)^2 =$$
$$= \lambda^2 - (x^2 + \xi^2 + y^2 + \eta^2 + z^2 + \zeta^2)\,\lambda + (x\,\eta - y\,\xi)^2 + (x\,\zeta + z\,\xi)^2 + (y\,\zeta - z\,\eta)^2 = 0.$$

[2]) V. Thébault, *Parmi les belles figures de la géométrie dans l'espace (Géométrie du tetraèdre)* Vuibert, Paris 1955, p. 97.

[3]) A. a. O., p. 8.

Nach den Voraussetzungen gelten die folgenden Gleichungen:

$$x^2 + \xi^2 = z^2 + \zeta^2 = 1\,, \quad y^2 + \eta^2 = 4\cos^2\frac{\varphi}{2}\,,$$

$$|\,x\,\eta - y\,\xi\,| = |\,x\,\zeta - z\,\xi\,| = |\,y\,\zeta - z\,\eta\,| = \sin\varphi\,.$$

Folglich ist

$$\lambda^2 - \left(2 + 4\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)\lambda + 3\sin^2\varphi = 0\,.$$

Daraus folgt, dass die Eigenwerte nur von φ abhängen.

Die Eigenwerte sind einander gleich, wenn die Diskriminante der obigen Gleichung gleich Null ist; das heisst

$$1 + 4\cos^2\frac{\varphi}{2} + 4\cos^4\frac{\varphi}{2} - 3\sin^2\varphi =$$

$$= 1 + 4\cos^2\frac{\varphi}{2} + 4\cos^4\frac{\varphi}{2} - 12\cos^2\frac{\varphi}{2} + 12\cos^4\frac{\varphi}{2} =$$

$$= 16\cos^4\frac{\varphi}{2} - 8\cos^2\frac{\varphi}{2} + 1 = \left(4\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right)^2 = 0\,.$$

Also ist dann

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \pm\frac{1}{2}$$

und

$$\varphi = \frac{2\,\pi}{3}\,.$$

B. BOLLOBÁS, Budapest

Weitere Lösungen sandten E. HERRMANN (Porz am Rhein), W. JÄNICHEN (Berlin), L. KIEFFER (Luxemburg), O. REUTTER (Ochsenhausen), R. STEUERWALD † (Alzing/Deutschland), H. VOGLER (Wien).

Aufgabe 374. Es bedeute $d(m)$ die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl m. Man beweise, dass, abgesehen von einigen wenigen Ausnahmen, $d(n!)$ ein Teiler von $n!$ ist. Welches sind die Ausnahmewerte für n? P. ERDÖS

Lösung: Alle lateinischen Buchstaben bedeuten nichtnegative ganze Zahlen und alle griechischen Buchstaben reelle Zahlen. $p_1, p_2, \ldots$ sei die Folge der Primzahlen. Bekanntlich ist

$$n! = \prod_{s=1}^{\infty} p_s^{a_s}\,, \quad a_s = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p_s^m}\right],$$

wobei $[\alpha]$ die grösste ganze Zahl $\leqq \alpha$ bedeutet. Die Anzahl der natürlichen Teiler von $n!$ ist dann

$$d(n!) = \prod_{s=1}^{\infty}(a_s + 1) = \prod_{s=1}^{\infty} p_s^{b_s}\,,$$

und wir haben $b_s \leqq a_s$ für jedes s zu zeigen. Ist r eine vorgegebene positive Zahl, so bedeute $N(r)$ die Anzahl der Primfaktoren von $n!$, für die $a_s = r$ ist. Man hat somit zu zeigen, dass

$$b_s = \sum_{i,k} N\,(k\,p_s^i - 1) \leqq \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p_s^m}\right]$$

für jedes s gilt. Wir beweisen, dass allgemeiner

$$\sum_{k=1}^{\infty} N\,(k\,q - 1) \leqq \left[\frac{n}{q}\right] \qquad (1)$$

für jedes $q \geqq 2$ und $n > n_0$ gilt. Alle N mit $k > n/q$ verschwinden in (1), denn aus

$$k\,q - 1 = \left[\frac{n}{q}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots < \frac{n}{p-1} \leqq n$$

folgt $kq \leqq n$. Wir werden also k nur von 1 bis $[n/q]$ laufen lassen.

Zum Beweise von (1) brauchen wir einige Hilfssätze:

I. Sind p_i und p_k zwei verschiedene Primzahlen, so folgt aus

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p_i^m}\right] = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p_k^m}\right],$$

dass nur die ersten Glieder der Summen von Null verschieden sein können. Diese ersten Glieder müssen jedenfalls gleich sein, also $n/p_i = t + \vartheta_1$, $n/p_k = t + \vartheta_2$ $(0 \leqq \vartheta_{1,2} < 1)$. Ist nun $k > i$ und $t \geqq p_i$, das heisst $[n/p_i^2] \neq 0$, so ergibt sich die unmögliche Beziehung

$$t\,(p_k - p_i) = \vartheta_1\,p_i - \vartheta_2\,p_k < p_i.$$

II. Für $n \geqq 6$ enthalten die durch $n/(r+1) < \xi \leqq n/r$ definierten Intervalle J_r für kein r die Primzahlen 2 und 3. Sonst wäre nämlich $r > 0{,}5\,n - 1$ und $r \leqq n/3$, also $n < 6$.

III. Ist $n \geqq 12$ und die Länge von J_r mindestens 2, dann ist $n/(r+1) \geqq 4$. Man hat nur $r \geqq 3$ zu betrachten, und dann folgt aus $n \geqq 2\,r\,(r+1)$ $n \geqq 3\,(r+1)^2/2$, somit $n/(r+1) \geqq 3\,(r+1)/2 > 4$.

IV. Z_r bedeute die Anzahl der in J_r enthaltenen natürlichen Zahlen. Es ist stets $Z_r < n/r - n/(r+1) + 1$.

a) Ist die Intervallänge mindestens 2 und $r \geqq 3$, dann ist $Z_r < 2\,n/(r+1)^2$. Aus $n/r - n/(r+1) + 1 > 2\,n/(r+1)^2$ würde nämlich in Verbindung mit $n \geqq 2\,r\,(r+1)$ folgen, dass $r < 3$.

b) Für $n \geqq 12$ und $r = 2$ ist ersichtlich $Z_r < \dfrac{9}{8}\,\dfrac{2\,n}{(r+1)^2}$.

c) Für $n \geqq 12$ und $r = 1$ ist ersichtlich $Z_r < \dfrac{7}{6}\,\dfrac{2\,n}{(r+1)^2}$.

Durch eine einfache Siebbetrachtung ergibt sich, dass unter m $(m \geqq 2)$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, unter denen 2 und 3 nicht vorkommen, sich höchstens $2\,m/3$ Primzahlen befinden. Unter m $(m \geqq 15)$ konsekutiven natürlichen Zahlen befinden sich höchstens $2\,m/5$ Primzahlen. Mit P_r bezeichnen wir nun die Anzahl der Primzahlen in J_r.

V. Ist $n \geqq 12$ und die Intervallänge mindestens 2, dann ist $P_r \leqq n/2\,(r+1)$.

Beweis: J_r enthält nach Voraussetzung mehr als eine natürliche Zahl, unter denen wegen (III) 2 und 3 nicht vorkommen.

a) $r \geqq 3$. Nach (IV*a*) erhält man $P_r \leqq 2\,Z_r/3 < 4\,n/3\,(r+1)^2 < n/2\,(r+1)$.

b) $r = 2$. Nach (IV*b*) erhält man $P_r \leqq 2\,Z_r/3 < 3\,n/2\,(r+1)^2 \leqq n/2\,(r+1)$.

c) $r = 1$. Für $n \geqq 30$ ist $P_1 \leqq 2\,Z_1/5$. Von $n = 12$ bis $n = 29$ gilt $P_1 \leqq 3\,Z_1/7$.

Nach (IVc) gilt somit auch hier $P_r \leqq 3\,Z_1/7 < n/2\,(r+1)$.

VI. Ist $n \geqq 6$ und die Intervallänge kleiner als 2, dann ist $P_r \leqq 1$, denn es ist $Z_r \leqq 2$ und J_r enthält wegen (II) die Zahlen 2 und 3 nicht beide.

VII. Ist $\alpha > 2$ so ist die Anzahl der Primzahlen p, für die $p - 1 \leqq \alpha$ ist, höchstens $3\,\alpha/4$. *Beweis:* Für $\alpha \geqq 14$ übertrifft die Anzahl der zusammengesetzten Zahlen die Anzahl der Primzahlen $\leqq \alpha$ um mehr als 1. Daher ist die fragliche Anzahl für $\alpha \geqq 14$ sogar $\leqq \alpha/2$. Für $2 < \alpha < 14$ sieht man die Richtigkeit sofort ein.

Wir zeigen nun zuerst, dass $N_r \leqq \mathrm{Max}(1, P_r)$. Ist $N_r \neq 0$ und auch das Glied $[n/p^2]$ im Ausdruck für $a_s = r$ von Null verschieden, so ist nach (I) $N_r = 1$. Ist aber allein $[n/p]$ ungleich Null, also $[n/p] = r$, so ist $n/(r+1) < p \leqq n/r$, das heisst $N_r \leqq P_r$.

Wir beweisen jetzt

$$\sum_{k=1}^{[n/q]} N(k\,q-1) \leqq \left[\frac{n}{q}\right] \qquad n \geqq 12\,, \quad q \geqq 2\,. \tag{2}$$

a) $n/(q-1) - n/q \geqq 2$. Wegen (III) und (V) ist jetzt

$$N(q-1) \leqq \operatorname{Max}(1, P_{q-1}) \leqq n/2\,q\,.$$

Also ergibt sich

$$\sum N(k\,q-1) \leqq \frac{u}{2\,q} + R\,,$$

wo R die Anzahl der p sei, für die $r \geqq 2\,q-1$ ist. R ist nicht grösser als die Anzahl der Primzahlen, die der Ungleichung $n/(p-1) \geqq 2\,q-1$ oder $p-1 \leqq n/(2\,q-1)$ genügen. Nach (III) gilt $n/(2\,q-1) > 2$, also ist nach (VII) $R \leqq 3\,n/(8\,q-4) \leqq n/2\,q$. Somit ist (2) in diesem Fall bewiesen.

b) $n/(q-1) - n/q < 2$. Jetzt ist für jedes k die Ungleichung $n/(k\,q-1) - n/k\,q < 2$ richtig und nach (VI) ist $P_{kq-1} \leqq 1$ und somit $N(k\,q-1) \leqq 1$. Also gilt (2) auch hier.

Es bleibt noch die Untersuchung der Zahlen $n < 12$ übrig. Man findet, dass für $n = 3$ und $n = 5$ die Behauptung nicht gilt. J. FIEDLER, Regensburg

Neue Aufgaben

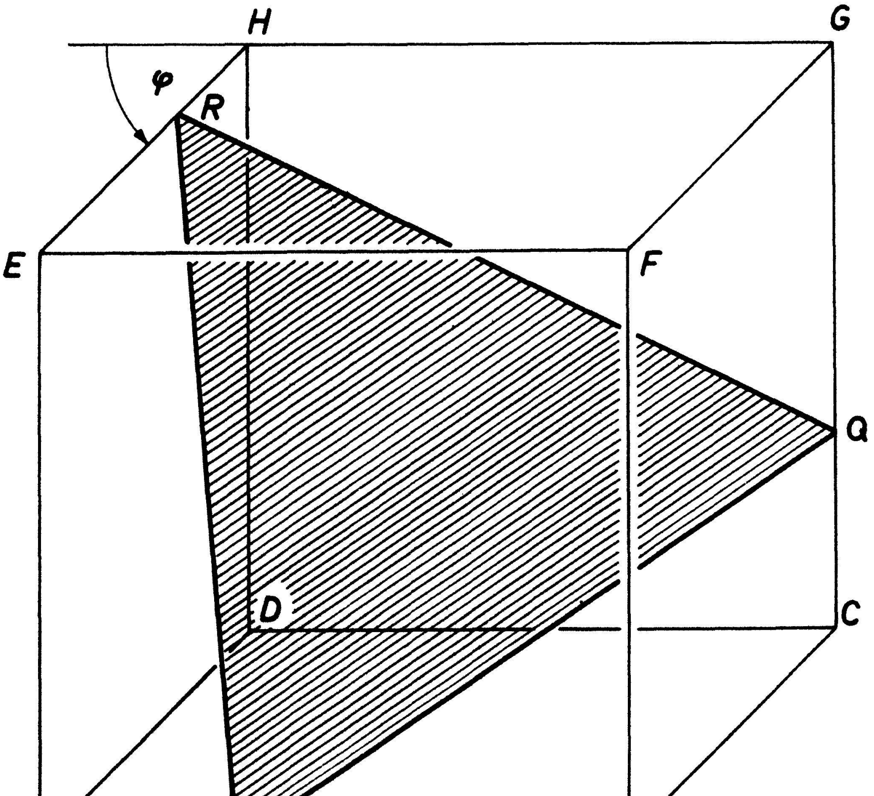
399. Find the general polynomial solution of

$$\{\Phi((x+y)^2) - \Phi(x^2) - \Phi(y^2)\}^2 \equiv 4\,\Phi(x^2)\,\Phi(y^2) \pmod{p}\,,$$

where p is a prime > 2. L. CARLITZ, Duke University, Durham, N. C. USA

400. Auf den drei zueinander windschiefen Kanten AB, CG, HE eines Würfels wird je ein Punkt derart angenommen, dass die drei Teilverhältnisse

$$(AB \cdot P) = (CG \cdot Q) = (HE \cdot R)$$



Figur 1

gleich gross sind. Die Punkte P, Q, R bilden sodann bekanntlich ein gleichseitiges Dreieck. Zeichnet man von dieser Konfiguration einen Schrägriss mit dem Verzerrungswinkel $\varphi = 45°$ und dem Verkürzungsverhältnis $\lambda = 1/2$, so bilden die Schrägbilder P^s, Q^s, R^s, wenn man den Würfel in einfachste Lage zur Bildebene bringt, ein Dreieck, das sich nur wenig von einem gleichseitigen unterscheidet. Wie müssen φ und λ gewählt werden, damit der Schrägriss des Dreiecks P, Q, R tatsächlich ein gleichseitiges Dreieck wird? (vgl. Fig. 1). R. BEREIS, Dresden

401. Aus drei gegebenen, sich gegenseitig schneidenden Kugeln sollen durch eine Ebene drei sich gegenseitig berührende Kreise herausgeschnitten werden.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

402. Es ist

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\theta_n(x)\,x^n}{n}, \quad 0 \leqq x \leqq 1,$$

wobei $0 < \theta_n(x) < 1$. Man beweise, dass bei festem x die Folge $\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x), \ldots$ monoton fallend ist. W. JÄNICHEN, Berlin

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Ein Kreis hat den Mittelpunkt M und einen Durchmesser $AB = 2r$. Auf der Verlängerung des Durchmessers wird $MZ = u$ gewählt und durch Z eine Sekante gezogen, die den Kreis in C_1 und C_2 schneidet. Es ist

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sphericalangle ZMC_1 \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\sphericalangle ZMC_2$$

konstant für jede Lage der Sekante durch Z.

▶ Die Konstante hat den Wert $(u-r)/(u+r)$.

2. Verhalten sich die Seiten eines Dreiecks wie 6:5:4, so ist $\alpha = 2\gamma$.

3. Gilt in einem Dreieck

$$b = 4c\cos\left(30° + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30° - \frac{\alpha}{2}\right),$$

so ist auch

$$\alpha = 2\gamma \quad \text{und} \quad a^2 = c(b+c).$$

4. Gilt in einem Dreieck

$$3b = a + c,$$

so ist auch

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = 2,$$

$$3(1+\cos\alpha\cos\gamma) = 5(\cos\alpha + \cos\gamma),$$

$$\varrho_b = 2\varrho,$$

$$\frac{1}{\varrho_b} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_c}.$$

5. Die Mittellinien eines Dreiecks bilden mit den von ihnen halbierten Seiten im gleichen Sinne die Winkel u, v und w. Es ist

$$\operatorname{ctg} u + \operatorname{ctg} v + \operatorname{ctg} w = 0.$$