

Sur un problème concernant les nombres

Autor(en): **Sierpiski, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **15 (1960)**

Heft 4

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-20713>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.	Band XV	Nr. 4	Seiten 73–96	Basel, 10. Juli 1960
-----------	---------	-------	--------------	----------------------

Sur un problème concernant les nombres

$$k \cdot 2^n + 1$$

Dans son travail [1] M. R. M. ROBINSON a donné une table de plusieurs nombres premiers de la forme $k \cdot 2^n + 1$. Il résulte de cette table que pour tout nombre naturel $k \leq 100$, sauf, peut-être, pour les nombres $k = 47$ et $k = 94$, il existe au moins un nombre naturel n tel que le nombre $k \cdot 2^n + 1$ est premier (pour $k = 47$ on a trouvé seulement que tous les nombres $47 \cdot 2^n + 1$ pour $n < 512$ sont composés). Cela suggère le problème, s'il existe pour tout nombre naturel k au moins un nombre naturel n pour lequel le nombre $k \cdot 2^n + 1$ serait premier.

Je prouverai ici que la réponse à ce problème est *négative*. Je démontrerai notamment ce

Théorème: *Il existe une infinité de nombres naturels k tels que tous les nombres $k \cdot 2^n + 1$, où $n = 1, 2, \dots$, sont composés.*

*Démonstration*¹⁾. Comme on sait, les nombres $F_m = 2^{2^m} + 1$ sont premiers pour $m = 0, 1, 2, 3$ et 4 et le nombre F_5 est le produit de deux nombres premiers 641 et $p > F_4$. D'après le théorème chinois bien connu sur les restes, il existe une infinité de nombres naturels k satisfaisant aux deux congruences

$$k \equiv 1 \pmod{(2^{32} - 1) \cdot 641} \text{ et } k \equiv -1 \pmod{p}. \quad (1)$$

Je démontrerai que, si k est un entier $> p$ satisfaisant aux congruences (1), les nombres $k \cdot 2^n + 1$, où $n = 1, 2, \dots$, sont composés.

Soit d'abord $n = 2^m(2t + 1)$, où m est un des nombres $0, 1, 2, 3, 4$ et où t est un entier non négatif. D'après (1) on aura $k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^{2^m(2t+1)} + 1 \pmod{2^{32} - 1}$ et, comme $F_m \mid 2^{32} - 1$ et $F_m \mid 2^{2^m(2t+1)} + 1$, on conclut que le nombre $k \cdot 2^n + 1$ est divisible par F_m et plus grand que $p > F_m$, donc composé.

Soit maintenant $n = 2^5(2t + 1)$, où $t = 0, 1, 2, \dots$. D'après (1) on aura $k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^{2^5(2t+1)} + 1 \pmod{641}$ et, comme $641 \mid 2^{2^5} + 1 \mid 2^{2^5(2t+1)} + 1$, on conclut que le nombre $k \cdot 2^n + 1$ est divisible par 641 et plus grand que 641 , donc composé.

Il nous reste évidemment à examiner le cas, où le nombre n est divisible par 2^6 , donc $n = 2^6 t$, où $t = 1, 2, 3, \dots$. D'après (1), on aura $k \cdot 2^n + 1 \equiv -2^{2^6 t} + 1 \pmod{p}$, et comme $p \mid 2^{2^5} + 1 \mid 2^{2^6} - 1 \mid 2^{2^6 t} - 1$, on trouve que le nombre $k \cdot 2^n + 1$ est divisible par p et $> p$, donc composé.

¹⁾ Une simplification de ma démonstration est due à M. A. SCHINZEL.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Le problème reste ouvert quel est le plus petit nombre naturel k tel que les nombres $k \cdot 2^n + 1$, où $n = 1, 2, \dots$ sont tous composés.

Il est à remarquer que M. P. ERDÖS a démontré qu'il existe une infinité de nombres naturels impairs k tels que chacun des nombres $2^n + k$, où $n = 1, 2, \dots$, est composé (divisible par un des nombres 3, 5, 7, 13, 17, 241). Voir P. ERDÖS [2], page 7; voir aussi mon livre [3], page 379, où se trouve la démonstration de A. SCHINZEL d'existence d'une infinité de nombres impairs k tels que chacun des nombres $2^n + k$, où $n = 1, 2, \dots$, est composé et a un diviseur premier < 100 .

Or, M. A. SCHINZEL a démontré que si k est un tel nombre, alors tous les nombres $k \cdot 2^n + 1$, où $n = 1, 2, \dots$, sont composés. Voici sa démonstration:

Supposons que k est un nombre naturel tel que chacun des nombres $2^n + k$, où $n = 1, 2, \dots$, a un diviseur premier $p \mid P$, où P est un nombre naturel impair donné. D'après l'hypothèse, le nombre $2^{n[\varphi(P)-1]} + k$ a un diviseur premier $p \mid P$. Or, on a $2^{n\varphi(P)} \equiv 1 \pmod{P}$, d'où $2^{n\varphi(P)} \equiv 1 \pmod{p}$, et, comme $2^{n[\varphi(P)-1]} + k \equiv 0 \pmod{p}$, on trouve $k \cdot 2^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, c. q. f. d.

W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. M. ROBINSON, *A report on primes and on factors of Fermat numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 9, 673–681 (1958).
- [2] P. ERDÖS, *On integers of the form $2^n + p$ and some related problems*, Summa Brasiliensis Mathematicae Vol. II, Fasc. 8, 119 (1950).
- [3] W. SIERPIŃSKI, *Teoria Liczb*, Cz. II, Monografie Matematyczne t. 38, Varsovie 1959.

Ungelöste Probleme

Nr. 36. Das n -te Distanzpotenzintegral eines eigentlichen konvexen Körpers A des gewöhnlichen Raumes ist durch Ansatz

$$T_n = T_n(A) = \iint r^n dP dQ \quad [n \geq -2, \text{ ganz}]$$

gegeben, wobei P und Q zwei in A unabhängig variierende Punkte, r die Distanz zwischen P und Q und dP und dQ die Volumendifferentiale bezeichnen. Zahlreiche geometrische und physikalische Körperfunktionale hängen mit solchen Distanzpotenzintegralen zusammen. Wenn V das Volumen bedeutet, so gelten beispielsweise die folgenden Beziehungen: $T_{-2} = 4\pi \tilde{r} V$ ($\tilde{r}$ = mittlere Ausstrahlungsweglänge); $T_{-1} = S$ (Newtonsches Selbstpotential); $T_0 = V^2$; $T_2 = 2 I V$ (I = polares Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes). Eine interessante Frage ergibt sich, wenn man nach dem Extremalkörper sucht, der bei vorgeschriebener Norm N ein maximales Distanzpotenzintegral aufweist. Die Norm ist durch $N = 2\pi \bar{b}$ definiert, wo $\bar{b}$ die mittlere Breite des Körpers A bezeichnet; ein anderer Zusammenhang wird mit $N = M$ (Integral der mittleren Krümmung) gegeben. Ist K eine mit A normgleiche Kugel, so steht in erster Linie die Ungleichung

$$T_n(A) \leq T_n(K) \quad [N(A) = N(K)] \quad (*)$$

zur Diskussion, welche die Extremaleigenschaft der Kugel ausdrückt. Nach den heute vorliegenden Ergebnissen zeigt sich, dass Ungleichung (*) sicher richtig ist für