

# Ungelöste Probleme

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **14 (1959)**

Heft 3

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

- [12] KAKUTANI, S., *A Proof that There Exists a Circumscribing Cube Around any Closed Bounded Convex Set in  $R^3$* , Ann. Math., Princeton 43, 739–741 (1942).
- [13] LIVESAY, G. R., *On a Theorem of F. J. Dyson*, Ann. Math., Princeton, 227–229 (1954).
- [14] MIRA FERNANDES, A. DE, *Funzioni continue sopra una superficie sferica*, Portugaliae Math. 5, 132–134 (1946).
- [15] POINCARÉ, H., *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (3<sup>e</sup> partie), J. Math. pures appl. [4] 7, 167–244 (1885).
- [16] SPERNER, E., *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 6, 265–272 (1928).
- [17] YAMABE, H., and Z. YUJOGO, *On the Continuous Function Defined on a Sphere*, Osaka math. J. 2, 19–22 (1950).

## Ungelöste Probleme

**Nr. 29.** Existe-t-il une infinité de nombres premiers  $p$  de la forme  $8k + 1$  tels que le nombre 2 appartient mod  $p$  à un exposant impair? (Tels sont par exemple les nombres 17, 41, 97.)

On peut démontrer que pour  $p$  premiers de la forme  $8k + 3$  ou  $8k + 5$  le nombre 2 appartient à un exposant pair et que pour  $p$  premiers de la forme  $8k + 7$  le nombre 2 appartient à un exposant impair. MM. BROWKIN et MAKOWSKI ont remarqué qu'il existe une infinité de nombres premiers  $p$  de la forme  $8k + 1$  tels que le nombre 2 appartient mod  $p$  à un exposant pair: tels sont, par exemple, tous les facteurs premiers des nombres de FERMAT  $2^{2^n} + 1$ , où  $n = 2, 3, \dots$ .

Il est encore à remarquer que M. A. SCHINZEL a déduit de son hypothèse  $H$  sur les nombres premiers [énoncée dans Acta Arithmetica 4, 188 (1958)] que la réponse à notre problème est positive.

W. SIERPIŃSKI

**Nr. 30.** M. S. ROLEWICZ a demandé si l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sigma(n)}{n} = +\infty,$$

où  $\sigma(n)$  désigne la somme des diviseurs naturels du nombre  $n$ . La réponse à cette question est négative. En effet, A. RÉNYI a démontré (dans le journal Izwiestia A. N. SSSR. 1948, 57–78) qu'il existe une infinité de nombres premiers  $n$  tels que  $n + 2$  a au plus  $k$  diviseurs premiers (où  $k$  est une constante absolue). Pareillement on peut démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers  $n$  tels que  $n + 1$  a au plus  $k$  diviseurs premiers. Pour un tel  $n$ ,  $\sigma(n)$  a au plus  $k$  diviseurs premiers et le nombre  $\sigma \sigma(n)/\sigma(n)$  est borné, d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sigma(n)}{n} < +\infty.$$

Le problème se pose si l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sigma \sigma(n)}{n} < +\infty$$

et, généralement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\sigma \sigma \dots \sigma}^{k \text{ fois}}(n)}{n} < +\infty.$$

Je ne connais pas la réponse à ce problème, mais je pense qu'elle est positive.

A. SCHINZEL

## Kleine Mitteilungen

### Extremaleigenschaften der Ecktransversalen des $n$ -dimensionalen Simplex

Die Ecktransversalen durch einen beliebigen inneren Punkt  $P$  des  $n$ -dimensionalen Simplex  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) schneiden die entsprechenden gegenüberliegenden Grenzräume in  $B_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ). Bezeichnen wir mit  $R_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) die Strecke  $\overline{PA_i}$ , mit  $d_i$  die Strecke  $\overline{PB_i}$ , so gilt bekanntlich<sup>1)</sup> die Ungleichung

$$\frac{R_i}{d_i} \geq \frac{n(x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_{n+1})^{1/n}}{x_i},$$

wenn man die entsprechenden baryzentrischen Koordinaten von  $P$  bezüglich der Simplexeckpunkte mit  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) bezeichnet. Nach einfacher Umformung folgt aus obiger Ungleichung

$$\frac{R_i}{d_i} \geq \frac{n \left( \prod_{i=1}^{n+1} x_i \right)^{1/n}}{x_i^{(n+1)/n}}. \quad (1)$$

Sei nun

$$S_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{R_{i_1} \cdots R_{i_k}}{d_{i_1} \cdots d_{i_k}} \quad (i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n+1), \quad (2)$$

dann gilt die folgende Ungleichung:

$$S_k \geq \binom{n+1}{k} n^k. \quad (3)$$

*Beweis:* Wendet man die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel auf (2) an, so folgt, dass

$$S_k \geq \binom{n+1}{k} \left( \prod_{i_1 < \dots < i_k} \frac{R_{i_1} \cdots R_{i_k}}{d_{i_1} \cdots d_{i_k}} \right)^{1/\binom{n+1}{k}}, \quad (i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n+1), \quad (4)$$

da die Gliederanzahl von  $S_k$  sich als die Anzahl der Kombinationen  $k$ -ter Ordnung aus  $n+1$  Elementen ergibt.

Aus (1) folgt, dass

$$\frac{R_{i_1} \cdots R_{i_k}}{d_{i_1} \cdots d_{i_k}} \geq \frac{n^k \left( \prod_{i=1}^{n+1} x_i \right)^{k/n}}{\left( \prod_{i=i_1}^{i_k} x_i \right)^{(n+1)/n}}. \quad (5)$$

<sup>1)</sup> J. SCHOPP, *Über eine Extremaleigenschaft des Simplex im  $n$ -dimensionalen Raum*, *El. Math.* 13, 106–107 (1958).