

# Some congruences involving binomial coefficients

Autor(en): **Carlitz, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **14 (1959)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-20316>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

und der entsprechende Flächeninhalt ist

$$\varrho^2 \pi \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}\right) = \varrho^2 \pi \left(1 - \frac{\sqrt{2} + 2}{4}\right).$$

In bezug auf den totalen Flächeninhalt bekommen wir

$$1 - \frac{\sqrt{2} + 2}{4} \approx 0,146.$$

Z. SCHNEIDER und B. STANKOVITSCH, Beograd

## Some Congruences Involving Binomial Coefficients

GLAISHER<sup>1)</sup> (p. 21) has proved that

$$\binom{n p - 1}{p - 1} \equiv 1 - \frac{1}{3} n (n - 1) p^3 B_{p-3} \pmod{p^4}, \quad (1)$$

where  $p$  is a prime  $> 3$  und  $B_m$  denotes the  $m$ -th Bernoulli number in the even suffix notation. It follows from (1) that

$$\binom{m p - 1}{p - 1} - \binom{n p - 1}{p - 1} \equiv -\frac{1}{3} (m - n) (m + n - 1) p^3 B_{p-3} \pmod{p^4}. \quad (2)$$

In view of (2) it may be of interest to examine the  $r$ -th difference

$$\sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \binom{n p + s p - 1}{p - 1}. \quad (3)$$

Indeed it is no more difficult to discuss

$$\Delta_r = \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \binom{n w + s w - 1}{p - 1}, \quad (4)$$

where  $n$  is an arbitrary integer and

$$p^e \mid w \quad (e \geq 1). \quad (5)$$

Put

$$(x - 1) (x - 2) \cdots (x - p + 1) = x^{p-1} - A_1 x^{p-2} + \cdots + A_{p-1}. \quad (6)$$

Then GLAISHER<sup>2)</sup> has proved that for  $p > 3$ ,  $1 < 2t < p - 1$

$$\frac{1}{p} A_{2t} \equiv -\frac{1}{2t} B_{2t} \pmod{p}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{p^2} A_{2t+1} \equiv \frac{2t+1}{4t} B_{2t} \pmod{p}. \quad (8)$$

<sup>1)</sup> J. W. L. GLAISHER, *Congruences Relating to the Sum of Products of the First  $n$  Numbers and to Other Sums of Products*, Quart. J. Math. 31, 1-35 (1900).

<sup>2)</sup> J. W. L. GLAISHER, *On the Residues of the Sums of Products of the First  $p - 1$  Numbers, and Their Powers, to Modulus  $p^2$  or  $p^3$* , Quart. J. Math. 31, 321-353 (1900).

Now it is clear from (4) that

$$\Delta_r = 0 \quad (r > p - 1). \quad (9)$$

Thus we may confine ourselves to values of  $r$  in the range  $1 \leq r \leq p - 1$ . It follows at once from (4) and (6) that

$$\Delta_r = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=r}^{p-1} (-1)^k A_{p-1-k} \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} (n+s)^k w^k, \quad (10)$$

where for convenience we put  $A_0 = 1$ . Then in the first place, for  $r = p - 1$ , (10) yields [with (12)]

$$\Delta_{p-1} = w^{p-1}. \quad (11)$$

For  $0 < r = 2t < p - 1$ , it follows from (7) and

$$\sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} (n+s)^r = r! \quad (12)$$

that

$$\Delta_{2t} \equiv -\frac{(2t)!}{2t+1} B_{p-2t-1} w^{2t} p \pmod{p^{2te+2}} \quad (0 < 2t < p - 1). \quad (13)$$

For odd values of  $r$  we consider separately the cases  $e > 1$  and  $e = 1$ . For  $e > 1$  it follows from (8) and (12) that

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{2t+1} &\equiv \frac{(2t+2)!}{2(2t+3)} B_{p-2t-3} w^{2t+1} p^2 \pmod{p^{(2t+1)e+3}} \\ &(1 \leq 2t+1 < p - 2, \quad e > 1). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

For  $e = 1$  we need both (7) and (8) as well as (12) and

$$\sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} (n+s)^{r+1} = (r+1)! \left(n + \frac{1}{2}r\right). \quad (15)$$

Thus (10) yields for  $1 \leq 2t+1 < p - 2$

$$\begin{aligned} \Delta_{2t+1} &\equiv \frac{1}{(p-1)!} \left\{ -(2t+1)! A_{p-2t-2} w^{2t+1} + (2t+2)! \left(n + t + \frac{1}{2}\right) A_{p-2t-3} w^{2t+2} \right\} \\ &\equiv (2t+1)! \frac{2t+2}{2(2t+3)} B_{p-2t-3} w^{2t+1} p^2 \\ &\quad - (2t+2)! \frac{n+t+\frac{1}{2}}{2t+3} B_{p-2t-3} w^{2t+2} p \pmod{p^{2t+4}} \end{aligned}$$

so that

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{2t+1} &\equiv \frac{(2t+2)!}{2(2t+3)} \left[ p - 2 \left(n + t + \frac{1}{2}\right) w \right] B_{p-2t-3} w^{2t+1} p \pmod{p^{2t+4}} \\ &(1 \leq 2t+1 < p - 2, \quad e = 1). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

As for the excluded case  $r = p - 2$ , it is clear from (10), (12) and (15) that

$$\Delta_{p-2} = \frac{1}{(p-1)!} \left\{ - (p-2)! A_1 w^{p-2} + (p-1)! \left( n + \frac{p}{2} - 1 \right) w^{p-1} \right\},$$

which reduces to

$$\Delta_{p-2} = \left\{ (n-1) w + \frac{p}{2} (w-1) \right\} w^{p-2}. \tag{17}$$

L. CARLITZ, Durham (N. C., USA)

## Ungelöste Probleme

**Nr. 27.** Es bedeute  $n$  eine beliebige natürliche Zahl. Mit  $s_n$  werde die Summe der sämtlichen Teiler von  $n$  bezeichnet, mit  $p_n$  die Anzahl der Darstellungen von  $n$  als Summe von natürlichen Zahlen, wobei die Reihenfolge der Summanden als unwesentlich gilt. Also

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 3, \quad p_4 = 5, \quad p_5 = 7, \quad p_6 = 11, \quad p_7 = 15, \\ p_8 = 22, \quad p_9 = 30, \quad p_{10} = 42, \quad p_{11} = 56, \quad p_{12} = 77 \quad \text{usw.}$$

Für die Darstellung von  $n$  als Summe von lauter *verschiedenen* natürlichen Zahlen spielen nach dem Pentagonalersatz EULERS die Pentagonalzahlen

$$\frac{1}{2} k (3k - 1) \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} k (3k + 1) \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

oder zusammengefasst

$$\frac{1}{2} l (3l - 1) \quad \text{mit } l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

eine ausgezeichnete Rolle. Es sind dies die Zahlen

$$0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, \dots$$

Zwischen  $s_n$  und den Pentagonalzahlen sowie zwischen  $p_n$  und den Pentagonalzahlen bestehen bekanntlich die Beziehungen (alternierend  $++$  und  $--$ ):

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} - s_{n-5} - s_{n-7} + s_{n-12} + s_{n-15} \dots, \tag{1}$$

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + p_{n-12} + p_{n-15} \dots. \tag{2}$$

Dabei ist in (1) für eine Pentagonalzahl  $n$  für das dann formal auftretende letzte Glied  $s_0$  die Zahl  $n$  selbst zu setzen. In (2) ist im gleichen Falle für  $p_0$  der Wert 1 zu nehmen.

Unschwer erhält man die weitere merkwürdige Beziehung:

$$s_n = p_{n-1} + 2 p_{n-2} - 5 p_{n-5} - 7 p_{n-7} + 12 p_{n-12} + 15 p_{n-15} \dots. \tag{3}$$