Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **13 (1958)**

Heft 4

$n > 4$ und n gerade ist. In der Tat: Es sei $n = 2m > 4$,

$$z_k = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_k u\right) e^{k\pi i/m} \quad \left(i = \sqrt{-1},\ k = 1, \ldots, 2m\right),$$

$$u \geqq 0, \quad \varepsilon_k = 1 \ (k = 1, \ldots, m), \quad \varepsilon_k = -1 \ (k = m+1, \ldots, 2m).$$

Deutet man die komplexen Zahlen z_k als Punkte in der Gaußschen Zahlenebene, so erzeugen diese für $u = 0$ ein reguläres $2m$-Eck vom Durchmesser 1. Aus Stetigkeitsgründen bleibt das $2m$-Eck für ausreichend kleine $u \geqq 0$ konvex und, wie man mühelos bestätigt, bleibt $|z_p - z_q| \leqq 1$ $(p, q = 1, \ldots, 2m)$, so dass der Durchmesser 1 bleibt. Für den Flächeninhalt des erzeugten konvexen $2m$-Ecks ergibt sich dagegen

$$F = \left\{\frac{m}{4} + (m-2)\, u^2\right\} \sin\frac{\pi}{m},$$

so dass abgelesen werden kann, dass wegen $m > 2$ für zulässige $u > 0$ ein grösserer Wert resultiert als für $u = 0$, der dem regulären $2m$-Eck gleichen Durchmessers entspricht. Im Falle $m = 2$ ist F von u unabhängig, was mit der bekannten elementaren Tatsache zusammenhängt, dass das Quadrat nicht das einzige flächengrösste Viereck festen Durchmessers ist.

H. Hadwiger

Nachtrag zu Nr. 21. Von J. J. Schäffer (Montevideo) wurde uns mitgeteilt[4]), dass G. Lumer (Chicago) in einer kürzlich veröffentlichten Note[5]), die uns vom Verfasser auch zugestellt worden ist, die folgenden Ergebnisse erzielte:

1. Wenn ein Polygon in einer Eilinie umgewendet werden kann, so ist dieses einem Kreis einbeschrieben.

2. Jedes reguläre Polygon lässt sich in unendlich vielen verschiedenen Eilinien umwenden. Unter diesen Eilinien gibt es solche, deren Flächeninhalt grösser, und andere, deren Flächeninhalt kleiner ist als derjenige des Umkreises des Polygons.

H. Hadwiger

Aufgaben

Aufgabe 292. Sur un diamètre AB d'un cercle (O), on marque un point C, entre A et B, et l'on décrit sur CB le demi-cercle (O'), au-dessus de AB, puis les cercles (ω_1), $(\omega_2), \ldots, (\omega_n)$ tangents au demi-cercle (O), à la demi-corde CD perpendiculaire à AB et, de proche en proche, aux cercles (O'), (ω_1), $(\omega_2), \ldots, (\omega_{n-1})$, au-dessus de AB. Exprimer le rayon r_n du cercle (ω_n), d'indice donné n. Pour quelle position de C sur AB le cercle (ω_3), d'indice 3, est-il le plus grand? V. Thébault, Tennie (Sarthe, France)

Solution: Soit $\overline{CB} < \overline{AC}$. Désignons par $x = \overline{O'B}$ le rayon du cercle (O') et par y_n l'ordonnée de ω_n. Le lieu géométrique des centres ω_n est la parabole

$$y_n^2 = 4\,(R - x)\,(x - r_n)$$

de foyer O, de sommet O' et de paramètre $p = 2\,(R - x)$. La condition de tangence des cercles (ω_n) et (ω_{n-1}) est

$$(y_n - y_{n-1})^2 = 4\, r_{n-1}\, r_n.$$

---

[4]) Brief vom 5. März 1958 an den Unterzeichneten.

[5]) G. Lumer, *Poligonos inscriptibles en curvas convexas*, Rev. Un. mat. argent. *17*, 97–102 (1955).

L'élimination des ordonnées y_n et y_{n-1} entre les deux équations

$$y_n^2 = 4\,(R-x)\,(x-r_n), \qquad y_{n-1}^2 = 4\,(R-x)\,(x-r_{n-1})$$

et la condition de tangence des cercles (ω_n) et (ω_{n-1}) conduisent à l'équation

$$(R-x)^2\,(r_{n-1}-r_n)^2 - 2\,(R-x)\,(2\,x - r_{n-1} - r_n)\,r_{n-1}\,r_n + r_{n-1}^2\,r_n^2 = 0,$$

puis à la formule de récurrence

$$r_n = \frac{(R-x)\,r_{n-1}}{[\sqrt{R}+\sqrt{x-r_{n-1}}]^2}, \qquad r_0 = x.$$

Nous en tirons

$$r_1 = \frac{(R-x)\,x}{R}, \qquad r_2 = \frac{(R-x)^2\,x}{(R+x)^2}, \qquad r_3 = \frac{(R-x)^3\,x}{R\,(R+3\,x)^2}, \;\ldots .$$

r_3 atteind le maximum pour

$$x = \frac{-7+\sqrt{73}}{12}\,R = 0{,}1287\,R.$$

R. ROSE, Leubringen, Biel

Der Aufgabensteller gewinnt durch Inversion die Formel

$$r_n = \frac{4\,x\,(R-x)^n}{[(\sqrt{R}+\sqrt{x})^n + (\sqrt{R}-\sqrt{x})^n]^2},$$

die sich mit der obigen Rekursionsformel leicht durch vollständige Induktion verifizieren lässt. Weitere Lösungen legten R. LAUFFER (Graz) und F. LEUENBERGER (Zuoz) vor.

Aufgabe 293. Man zerlege für jede Primzahl p das zwölfte Kreisteilungspolynom

$$\Phi_{12} \equiv x^4 - x^2 + 1$$

so explizit wie möglich mod p in irreduzible Faktoren mod p.

A. BAGER, Hjørring (Dänemark)

Solution: For $p = 2$ we have

$$x^4 - x^2 + 1 \equiv (x^2 - x + 1)^2 \qquad (\mathrm{mod}\ 2),$$

while for $p = 3$

$$x^4 - x^2 + 1 \equiv (x^2 + 1)^2 \qquad (\mathrm{mod}\ 3).$$

For $p > 3$ we may specialize theorems on the general cyclotomic polynomial to obtain the following criterion. If

$$p \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ 12)$$

then

$$x^4 - x^2 + 1 \equiv (x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d) \qquad (\mathrm{mod}\ p), \tag{1}$$

where we may assume $a\,b \equiv c\,d \equiv 1$; if

$$p \not\equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ 12)$$

then

$$x^4 - x^2 + 1 \equiv f(x)\,g(x) \qquad (\mathrm{mod}\ p), \tag{2}$$

where $f(x)$ and $g(x)$ denote distinct irreducibles (mod p). To be more explicit suppose

$$p \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)\ \text{and let}\ -3 \equiv k^2\ (\mathrm{mod}\ p); \tag{i}$$

then

$$4\,(x^4 - x^2 + 1) \equiv (2\,x^2 - 1)^2 - k^2 \equiv (2\,x^2 - 1 - k)\,(2\,x^2 - 1 + k) \qquad (\mathrm{mod}\ p). \tag{3}$$

Further factorization will depend on whether $p \equiv 1$ or $7 \pmod{12}$; in the first case (3) reduces to (1), while in the second it coincides with (2).

$$p \equiv 11 \pmod{12} \text{ so that } 3 \equiv k^2 \pmod{p}. \tag{ii}$$

Then

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - 3\,x^2 \equiv (x^2 + k\,x + 1)\,(x^2 - k\,x + 1) \qquad \pmod{p}.$$

This is an instance of (2); each quadratic factor is irreducible.

$$p \equiv 5 \pmod{12} \text{ so that } -1 \equiv k^2 \pmod{p}. \tag{iii}$$

Then

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2-1)^2 + x^2 \equiv (x^2 + k\,x - 1)\,(x^2 - k\,x - 1) \qquad \pmod{p}.$$

This again is an instance of (2). L. Carlitz, Durham, N. C. (USA)

Aufgabe 294. Prove the proposition: If a side of a triangle is less than the average (arithmetic mean) of the two other sides, the opposite angle is less than the average of the two other angles. G. Pólya, Palo Alto (California, USA)

1. *Lösung:* Aus $a < (b+c)/2$ folgt nach dem Sinussatz

$$\sin\alpha < \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{2} = \sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \leqq \sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

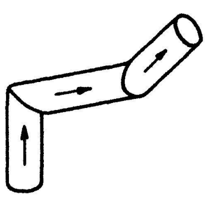
Da α und $(\beta+\gamma)/2$ spitze Winkel sind, folgt $\alpha < (\beta+\gamma)/2$. A. Hess, Dietikon

2. *Lösung:* Ist $a < (b+c)/2$, so ist die Behauptung gleichbedeutend mit $\alpha < 60°$. Zeichnen wir über a den Fasskreisbogen zu 60°, so weist von den eingeschriebenen Dreiecken mit der Seite a das gleichseitige den grössten Umfang auf, wobei a gleich dem arithmetischen Mittel der beiden andern Seiten ist. Soll aber $a < (b+c)/2$ sein, so muss die Gegenecke A ausserhalb des Fasskreisbogens liegen, womit die Behauptung bewiesen ist. F. Leuenberger, Zuoz

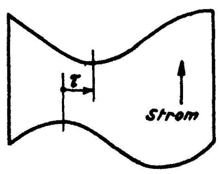
Die Umkehrung der Aussage ist nicht richtig, hingegen folgt aus $\alpha > (\beta+\gamma)/2$ stets $a > (b+c)/2$.

Weitere Lösungen sandten A. André (Zürich), A. Bager (Hjørring), J. Berkes (Szeged), J. Erdösi (Budapest), H. Faehndrich (Bern), M. Frei (Zürich), A. Hess (Dietikon), R. Lauffer (Graz), H. Meili (Winterthur), J. G. Obádovics (Miskolc, Ungarn), R. Rose (Biel), J. Schopp (Budapest), Z. Zsombok (Budapest).

Aufgabe 295. Die Stellung dreier aufeinanderfolgender «Schüsse» einer Rohrleitung sei durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ festgelegt, die zu den Zylinderachsen parallel sind (Figur 1). Diese 3 Vektoren sollen nicht in einer Ebene liegen, so dass die 3 Schüsse einen «Raumkrümmer» bilden.



Figur 1



Figur 2

Die Randlinien des mittleren Schusses sind in der Abwicklung Sinuslinien, die um einen Winkel τ gegeneinander verschoben sind (Figur 2). Wie gross ist dieser Winkel? W. Kissel, Zürich

Lösung: Die Scheitelpunkte der Sinuslinie liegen in der Ebene der beiden Achsen der Rotationszylinder. Die Verschiebung der Scheitel ist gleich dem Winkel der Ebenen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. Die Normalen dieser Ebenen ergeben sich als äussere Vektorprodukte: $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$. Das innere Produkt der Normalen ist $\mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2 = |\mathfrak{n}_1| \, |\mathfrak{n}_2| \cos\tau$, und hieraus folgt

$$\cos\tau = \frac{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2}{|\mathfrak{n}_1| \, |\mathfrak{n}_2|} = \frac{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \, (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})}{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| \, |\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}|}.$$

J. SCHOPP, Budapest

Weitere Lösungen sandten A. ANDRÉ (Zürich), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 296. Man beweise, dass für alle nichtnegativen ganzen x, y, z gilt

$$5^{3^x 5^y z} \equiv 7^x 5^y (5^z - 1) + 1 \quad (\mathrm{mod}\ 32),$$
$$5^{7^x 5^y z} \equiv 3^x 5^y (5^z - 1) + 1 \quad (\mathrm{mod}\ 32),$$
$$5^{7^x 3^y z} \equiv 3^x 7^y (5^z - 1) + 1 \quad (\mathrm{mod}\ 32).$$

A. BAGER, Hjørring (Dänemark)

A. ANDRÉ (Zürich) beweist folgenden allgemeinen

Satz: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Kongruenz

$$\left. \begin{array}{l} b^{p^x q^y z} \equiv p_1^x q_1^y (b^z - 1) + 1 \qquad (\mathrm{mod}\ 2\,(b-1)^2), \\ p\, q\, p_1 q_1 > 0, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad z \geqq 0, \quad b \neq 1 \text{ ungerade}, \end{array} \right\} \quad (1)$$

sind

$$\left. \begin{array}{l} p - p_1 \begin{array}{l} \equiv 0 \\ \equiv b-1 \end{array} \ (\mathrm{mod}\ 2\,(b-1)) \quad \text{für } p \begin{array}{l} \equiv 0{,}1 \\ \equiv 2{,}3 \end{array} \ (\mathrm{mod}\ 4), \\ q - q_1 \begin{array}{l} \equiv 0 \\ \equiv b-1 \end{array} \ (\mathrm{mod}\ 2\,(b-1)) \quad \text{für } q \begin{array}{l} \equiv 0{,}1 \\ \equiv 2{,}3 \end{array} \ (\mathrm{mod}\ 4). \end{array} \right\} \quad (2)$$

Beweis: Es sei zunächst $z = 1$. In der linken Seite von (1) wird $b = (b-1) + 1$ gesetzt und nach dem binomischen Satz entwickelt. Berücksichtigt man, dass $b - 1$ gerade ist, so ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für (1)

$$p^x q^y (p^x q^y - 1)\,(b-1)^2 + 2\,(p^x q^y - p_1^x q_1^y)\,(b-1) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 4\,(b-1)^2). \quad (3)$$

Hieraus folgt

$$p^x q^y - p_1^x q_1^y \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ b - 1).$$

Für $x = 0, y = 1$ bzw. $x = 1, y = 0$ ergibt sich als notwendige Bedingung die Teilbarkeit von $p - p_1$ und $q - q_1$ durch $b - 1$. Man hat also

$$p_1 = p + m\,(b-1), \qquad q_1 = q + n\,(b-1),$$

somit

$$p^x q^y - p_1^x q_1^y \equiv -(b-1)\,(m\,x\,p^{x-1} q^y + n\,y\,p^x q^{y-1}) \quad (\mathrm{mod}\ (b-1)^2). \quad (4)$$

Setzt man (4) in (3) ein und dividiert durch $(b-1)^2$, so folgt

$$p^x q^y (p^x q^y - 1) \equiv 2\,(m\,x\,p^{x-1} q^y + n\,y\,p^x q^{y-1}) \quad (\mathrm{mod}\ 4).$$

$x=0$, $y=1$ bzw. $x=1$, $y=0$ gibt die Bedingungen

$$q(q-1)\equiv 2n \pmod 4, \qquad p(p-1)\equiv 2m \pmod 4.$$

m ist also gerade für $p\equiv 0,1 \pmod 4$ und ungerade für $p\equiv 2,3 \pmod 4$, und dasselbe gilt für n und q. Hieraus ergeben sich sofort die Bedingungen (2).

Wir zeigen jetzt, dass die Bedingungen (2) auch hinreichend für die Gültigkeit von (3) sind.

a) $p\equiv 0,1 \pmod 4$, $q\equiv 0,1 \pmod 4$. (3) ist erfüllt, weil

$$p^x q^y (p^x q^y-1)\equiv 0 \pmod 4 \qquad \text{und } p\equiv p_1,\ q\equiv q_1 \pmod{2(b-1)}.$$

b) $p\equiv 0,1 \pmod 4$, $q\equiv 2,3 \pmod 4$. Man erhält die Bedingung

$$p^x q^y (p^x q^y-1)+2\,y\,q^{y-1}p^x\equiv 0 \pmod 4.$$

Für $p\equiv 0 \pmod 4$ und $x\neq 0$ ist diese Bedingung trivialerweise erfüllt. Für $x=0$ ist

$$q^y(q^y-1)+2\,y\,q^{y-1}\equiv 0 \pmod 4 \tag{5}$$

zu verifizieren. (5) ergibt sich auch für $p\equiv 1 \pmod 4$. Für $y=0$ und $y=1$ ist (5) erfüllt. Ist $q\equiv 2 \pmod 4$ und $y\geqq 2$, so sind q^y und $2\,q^{y-1}$ durch 4 teilbar, also ist (5) erfüllt. Die Gültigkeit von (5) für $q\equiv -1 \pmod 4$ ergibt sich unmittelbar.

c) $p\equiv 2,3 \pmod 4$, $q\equiv 2,3 \pmod 4$. Als Bedingung ergibt sich

$$p^x q^y(p^x q^y-1)+2\,(x\,p^{x-1}q^y+y\,q^{y-1}p^x)\equiv 0 \pmod 4. \tag{6}$$

Es sei zunächst $p\equiv 2 \pmod 4$. Für $x=0$ geht (6) in (5) über, und für $x=1$ verifiziert man (6) sofort. Für $x\geqq 2$ geht 4 in p^x und $2\,p^{x-1}$ auf, so dass (6) erfüllt ist. Ebenso schliesst man, wenn $q\equiv 2 \pmod 4$. Im Fall $p\equiv -1$, $q\equiv -1 \pmod 4$ erhält man die richtige Kongruenz

$$(-1)^{x+y}(1+2\,(x+y))\equiv 1 \pmod 4.$$

Die Gültigkeit von (1) folgt aus dem Spezialfall $z=1$ mittels folgendem

Lemma: Sind a, b, t, v ganz, t positiv, so gilt die Kongruenz

$$a^{tz}\equiv v\,(b^z-1)+1 \pmod{2\,(b-1)^2} \tag{7}$$

für jedes natürliche z, wenn sie für $z=1$ gilt.

Beweis: Wir nehmen (7) als Induktionsvoraussetzung und leiten daraus die Gültigkeit für $z+1$ her. Beachtet man, dass

$$v\,(v-1)\,(b-1)\,(b^z-1)\equiv 0 \pmod{2\,(b-1)^2},$$

so ist

$$\begin{aligned} a^{t(z+1)} &\equiv a^{tz}a^t\equiv [v\,(b^z-1)+1]\,[v\,(b-1)+1]\\ &\equiv v\,(b^z-1)+1+v\,(b-1)\,[v\,(b^z-1)+1]-v\,(v-1)\,(b-1)\,(b^z-1)\\ &\equiv v\,(b^z-1)+1+v\,(b-1)\,b^z\equiv v\,(b^{z+1}-1)+1 \pmod{2\,(b-1)^2}. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Weitere Lösungen sandten R. Lauffer (Graz) und H. Meili (Winterthur).

Neue Aufgaben

331. Es sei p eine Primzahl, $n = p^r h$, $(p, h) = 1$. Man zeige, dass für das Kreisteilungspolynom $\Phi_n(x)$ vom Grad $\varphi(n)$ in einem Körper der Charakteristik p die Zerlegung

$$\Phi_n(x) = [\Phi_h(x)]^{\varphi(n/h)}$$

gilt (vgl. Aufgabe 293). A. BAGER, Hjørring

332. Show that

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{\pi}\sin\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\pi\right\}.$$

L. CARLITZ, Durham, N.C. (USA)

333. Es sei $A = (a_{ik})$ die Stifel-Pascalsche Dreiecksmatrix, also $a_{ik} = \binom{i}{k}$ für $i, k = 0, 1, 2, \ldots$. Man beweise für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ die Formel

$$A^n = (a_{ik}\, n^{i-k}).$$

I. PAASCHE, München

334. In einer Ebene sind sechs Punkte $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ gegeben. Gesucht werden zwei Kegelschnitte, die sich in A_1 und A_4 berühren und von denen der eine noch durch A_2 und A_3, der andere durch A_5 und A_6 geht. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

335. Man beweise: Ist α eine irrationale Zahl zwischen Null und Eins, dann gibt es eine Folge von Stammbrüchen $1/z_k$, $k = 1, 2, \ldots$, derart, dass

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{z_i} \quad \text{und} \quad z_{k+1} > z_k^2 - z_k.$$

R. LAUFFER, Graz

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. $$a_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad a_2 = 1{,}8 + \sqrt{1{,}8}, \quad a_3 = \left(3 + \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{4}{10000}\right)$$

sind Näherungswerte von π. Bestimme die relativen Fehler.

▶ $-0{,}0015$, $-1{,}6 \cdot 10^{-5}$, $-2{,}35 \cdot 10^{-6}$. a_3 eignet sich in dieser Form vorzüglich zur raschen Multiplikation mit π.

2. Die Gleichung

$$12\,x^6 - 7\,x^4 + x^2 - 3000 = 0$$

hat eine einzige reelle positive Wurzel $x \approx 3{,}141\,544$.

3. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem liegen zwei Strecken $A_1B_1 = 10$, $A_2B_2 = 8$. $A_1(0; 0)$ liegt im Ursprung, $B_2(u; 0)$ auf der x-Achse. A_2 liegt auf der Gerade $x = 0$, B_1 auf $x = u$. Der Schnittpunkt der beiden Strecken hat die Ordinate 2. Berechne u.

▶ Die Aufgabe führt auf eine Gleichung vierten Grades mit zwei reellen Lösungen. $u_1 = 7{,}4710$. Für $u_2 = 7{,}8560$ liegt der Schnittpunkt ausserhalb der beiden Strecken.

4. Ein Kreis (r) soll durch konzentrische Kreisbögen um einen Punkt A der Peripherie in n gleiche Teile geteilt werden.

▶ Die Aufgabe kann nur näherungsweise gelöst werden. Sei λ der Bruchteil von πr^2, der durch den Kreisbogen um A mit dem Zentriwinkel α abgeschnitten wird.

Man stellt zum Beispiel

$$\lambda = 1 - \frac{1}{\pi} (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$

graphisch dar und findet aus der regulären Teilung auf der λ-Achse die gewünschte Teilung auf der α-Achse.

5. Eine Hochspannungsleitung in horizontalem Gelände hat eine Spannweite von 200,0 m und einen Durchhang von 10,0 m. Wie lang sind die Drähte von einem Mast zum andern?

▶ Sowohl durch näherungsweise Lösung der exakten Gleichung als auch bei Ersatz der Kettenlinie durch einen Kreisbogen findet man mit sachgemässer Genauigkeit $s = 201,3$ m.

Literaturüberschau

Karl Strubecker: *Einführung in die höhere Mathematik*
Band I: *Grundlagen*
XV und 821 Seiten mit 338 Figuren. Verlag R. Oldenbourg, München 1956

Man kann drei Sorten von Büchern unterscheiden: erstens solche Bücher, die man nach dem aufmerksamen Durchblättern ungelesen auf die Seite legt, zweitens solche, bei denen die erste Durchsicht zum Entschluss führt, dies und jenes gelegentlich genauer zu lesen, bei der dritten Sorte erweckt schon die flüchtige Einsichtnahme den Wunsch, das Buch unbedingt selbst zu besitzen. Das vorliegende Werk von Strubecker gehört ohne Zweifel zur letztgenannten Sorte. Es bietet die Grundlagen für den auf drei Bände geplanten *Grundriss der höheren Mathematik*.

Die Überschriften der vier Kapitel des ersten Bandes, nämlich I. *Zahlen und Zahlenrechnen* (134 Seiten), II. *Elementare algebraische Funktionen* (327 Seiten), III. *Grenzwerte. Unendliche Reihen* (112 Seiten), IV. *Elementare transzendente Funktionen. Stetige Funktionen. Umkehrfunktionen* (238 Seiten), lassen freilich nicht ahnen, welche Fülle von Materialien das Buch enthält. Um diese Fülle wenigstens anzudeuten, seien als Beispiele nur einige Themata aufgezählt, die man neben den üblichen Grundlagen hier behandelt findet: Abgekürztes Zahlenrechnen – Das Verfahren der Wurzelziehung von Collatz – Rechenmaschinen – Ausgleichsrechnung – Kettenbrüche – Zerlegung grosser Zahlen der Form $4n+1$ in Primfaktoren – Geometrie der isotropen Ebene – Das Graeffesche Verfahren – Die Interpolationsformeln von Newton, Stirling, Gauss und Bessel – Kurbelgetriebe – Die wichtigsten Konvergenzkriterien – Lissajoussche Kurven – Die Gruppe der Lorentz-Transformationen – Logarithmische Funktionspapiere usw.

Die Darstellung ist breit gehalten, so dass man ein eigentliches Lesebuch, im Unterschied zur gedrängten Monographie, in der Hand hat. Der Sprachstil ist angenehm fliessend. Fast allen Lehrsätzen sind Beispiele, auch viele aus technischen Gebieten, numerischer oder konstruktiver Art beigegeben. Die vielen Figuren sind durchwegs vorzüglich.

Man spürt, dass der Verfasser nicht nur eine ausserordentliche Menge von Material zusammengetragen, sondern alles persönlich durchgeackert hat, bis zu den einzelnen numerischen Rechnungen und bis zu den einschlägigen Konstruktionen. Man steht bewundernd vor dieser erstaunlichen, immensen Arbeitsleistung und freut sich auf die weiteren beiden Bände.

Der Verlag hat das Buch vorzüglich ausgestattet. Auch ihm gebührt hohe Anerkennung für den Mut, ein so umfangreiches Werk zu wagen. Der Preis von DM 36.– ist ganz ausserordentlich niedrig. Mit diesen wenigen Worten möchte der Rezensent recht viele Lehrer auf diese hervorragende Publikation von pädagogisch meisterlicher Hand aufmerksam machen.

L. Locher-Ernst