# Eine Bemerkung zum Waringschen Problem

Autor(en): **Trost, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **13 (1958)**

Heft 4

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-19775

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik*
*und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*
*Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIII Nr. 4 Seiten 73–96 Basel, 10. Juli 1958


## Eine Bemerkung zum Waringschen Problem

Das Waringsche Problem besteht in der Darstellung einer positiven ganzen Zahl $n$ als Summe einer festen Anzahl $s$ von nichtnegativen $k$-ten Potenzen. $g(k)$ bezeichne für ein gegebenes $k$ die kleinste Anzahl $s$, die zur Darstellung eines jeden $n$ ausreicht. E. WARING vermutete 1770, dass für jedes $k$ eine solche Zahl $g(k)$ existiert. Diese Vermutung wurde aber erst nach mehr als 100 Jahren von D. HILBERT bewiesen[1]). Nachdem die Existenz von $g(k)$ gesichert war, konzentrierte sich das Interesse auf die Bestimmung des numerischen Wertes. $g(2) = 4$ und $g(3) = 9$ sind seit langem bekannt, hingegen kennt man von $g(4)$ und $g(5)$ bis heute nur die Ungleichungen

$$19 \leqq g(4) \leqq 35, \quad 37 \leqq g(5) \leqq 54.$$

Für $k \geqq 6$ ergibt sich aus den Untersuchungen der letzten 25 Jahre folgende Aussage, wobei $[\alpha]$ die grösste ganze Zahl $\leqq \alpha$ bedeutet[2]):

*Für alle $k \geqq 6$, für die die Ungleichung*

$$3^k - 2^k A_k \leqq 2^k - A_k - 2, \qquad A_k = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] \tag{1}$$

*erfüllt ist, gilt*

$$g(k) = 2^k + A_k - 2. \tag{2}$$

Der genaue Wert von $g(k)$ für die (1) allenfalls nicht erfüllenden $k \geqq 6$ ist auch bekannt[1]), so dass sich $g(k)$ für jedes $k \geqq 6$ berechnen lässt.

Dass mindestens $2^k + A_k - 2$ $k$-te Potenzen notwendig sind, zeigt die Zahl

$$m = 2^k A_k - 1 = (A_k - 1) \cdot 2^k + (2^k - 1) \cdot 1^k,$$

die sich wegen $m < 3^k$ nur durch Potenzen von 1 und 2 darstellen lässt. Da $m \equiv -1 \pmod{2^k}$, muss die Anzahl der Potenzen von 1 in dieser Darstellung die Form $t\,2^k - 1$ haben, und die Gesamtzahl $A_k - t + t\,2^k - 1$ der Summanden ist für $t = 1$ minimal.

---

[1]) Eine kurzgefasste Übersicht über die Geschichte des Waringschen Problems mit Literaturangaben findet man in HARDY-WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3. Aufl. (Oxford 1954), S. 335–338. Deutsche Ausgabe, R. Oldenburg, München 1958, S. 382–385.

[2]) Vergleiche die Werke in [1]), S. 337 bzw. 384.

Die Ungleichung (1) ist für $4 \leqq k \leqq 400$ erfüllt, und man vermutet, dass sie für alle $k > 3$ richtig ist. Ein Beweis dafür steht aber, soviel wir wissen, noch aus. Wir wollen hier (1) durch eine etwas durchsichtigere Bedingung ersetzen, aus der man insbesondere leicht erkennen kann, dass (1) sicher für *unendlich viele k* richtig ist[3]). So ergibt sich der

**Satz:** *Ist* $k \geqq 6$ *und gibt es eine natürliche Zahl* $x_k$ *im Intervall*

$$\frac{3^k}{2^k} + \lambda_k \leqq x_k < \frac{3^k}{2^k} + 1, \qquad \lambda_k = \frac{1 + (3/2)^k}{2^k - 1}, \tag{3}$$

*so ist*

$$g(k) = 2^k + x_k - 3.$$

*Beweis:* Um aus (1) die Existenz einer natürlichen Zahl $x_k$ im Intervall (3) abzuleiten, hat man nur in (1) und der evidenten Ungleichung

$$0 < 3^k - 2^k A_k \tag{4}$$

$A_k = x_k - 1$ zu setzen. Setzt man umgekehrt in (3) $x_k = B_k + 1$, so erhält man wieder die Ungleichungen (1) und (4) mit $B_k$ anstelle von $A_k$. Also gilt

$$\frac{3^k}{2^k} > B_k \geqq \frac{3^k - 2^k + 2}{2^k - 1} = \frac{3^k + 1}{2^k - 1} - 1 > \frac{3^k}{2^k} - 1.$$

Ist nun $x_k$ ganz, so ist auch $B_k$ ganz, und es folgt $B_k = [(3/2)^k] = A_k$, da es in einem offenen Intervall der Länge 1 nur eine einzige ganze Zahl geben kann. Damit ist die Äquivalenz von (1) und (3) bewiesen.

$\lambda_k$ strebt monoton gegen Null und kann für grosse $k$ durch $(3/4)^k$ ersetzt werden. So ist zum Beispiel $\lambda_{400} = 1{,}06 \cdot 10^{-50}$.

Zum Beweis, dass (2) für unendlich viele $k$ gilt, benutzen wir folgendes

**Lemma:** *Setzt man*

$$3^k = 2^k A_k + r_k, \qquad 0 < r_k < 2^k,$$

*so ist*

$$r_{k+1} = 3 r_k + \varepsilon \cdot 2^k,$$

*wo*

$$\varepsilon = -2, -1, 0, 1.$$

*Beweis:* Es ist $0 < 3 r_k < 2^{k+1} + 2^k$. Für $A_k = 2u + 1$ wird

$$3^{k+1} = (3u + 1)\, 2^{k+1} + 2^k + 3 r_k.$$

Hieraus folgt

$$r_{k+1} = 3 r_k + 2^k \qquad \text{für } 3 r_k < 2^k,$$

$$r_{k+1} = 3 r_k - 2^k \qquad \text{für } 3 r_k > 2^k.$$

Für $A_k = 2u$ wird

$$3^{k+1} = 3u \cdot 2^{k+1} + 3 r_k,$$

---

[3]) Diese Bemerkung fehlt auch im neuesten, sehr ausführlichen Übersichtsartikel von G. PALAMÀ, *Il problema di Waring*, Boll. Un. mat. ital. [Ser. III] *12*, 83–100 (1957).

und man hat

$$r_{k+1} = 3\,r_k \quad \text{für } 3\,r_k < 2^{k+1}, \qquad r_{k+1} = 3\,r_k - 2^{k+1} \quad \text{für } 3\,r_k > 2^{k+1}.$$

Wir setzen jetzt

$$\delta_k = 1 - \frac{r_k}{2^k} = x_k - \frac{3^k}{2^k}, \qquad 0 < \delta_k < 1.$$

Nach dem Lemma ist

$$\delta_{k+1} = \frac{3}{2}\,\delta_k - \frac{\varepsilon+1}{2}, \qquad \varepsilon = -2,\ -1,\ 0,\ 1. \tag{5}$$

Im Intervall (3) liegt dann und nur dann eine ganze Zahl $x_k$, wenn $\lambda_k \leqq \delta_k$. Wir nehmen jetzt an, dass für $k > k_0 > 400$ stets $\delta_k < \lambda_k$ gilt, dass also (2) nur für endlich viele $k$ richtig ist. Insbesondere hat man dann für alle $k > k_0$ die grobe Abschätzung $\delta_k < 1/3$, die wegen $\delta_{k+1} > 0$ zur Folge hat, dass in (5) nur $\varepsilon = -2$ und $\varepsilon = -1$ möglich sind. Für $\delta_{k+1}$ kommen also nur die Werte

$$\frac{3}{2}\,\delta_k \qquad \text{oder} \quad \frac{3}{2}\,\delta_k + \frac{1}{2}$$

in Frage, und man hat also für $k > k_0$ und $i \geqq 1$

$$\delta_{k+1} \geqq \frac{3}{2}\,\delta_k, \qquad \delta_{k+i} \geqq \left(\frac{3}{2}\right)^i \delta_k.$$

Bestimmt man $i$ so, dass

$$\left(\frac{3}{2}\right)^i \geqq \frac{\lambda_k}{\delta_k} > 1,$$

dann ist aber

$$\delta_{k+i} \geqq \left(\frac{3}{2}\right)^i \delta_k \geqq \lambda_k > \lambda_{k+i}$$

im Widerspruch zu unserer Annahme. E. TROST

# Überraschende Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wird eine symmetrische Münze $2n$-mal geworfen, so hat unter allen möglichen Ergebnissen die Gleichverteilung mit $n$-mal Kopf und $n$-mal Schrift die grösste Wahrscheinlichkeit. Sind 200 Kugeln auf 20 Fächer zu verteilen, dann kommt der Gleichverteilung mit 10 Kugeln pro Fach die grösste Wahrscheinlichkeit zu. Zieht man aus einer Urne, welche die Nummern 1–100 enthält, zehn Nummern, so verteilen sie sich mit der grössten Wahrscheinlichkeit auf die zehn Zehner. Beim Jass wird man mit der grössten Wahrscheinlichkeit zwei Karten einer bestimmten Sorte erwarten dürfen. Immer kommt der Gleichverteilung die grösste Wahrscheinlichkeit zu.

Peter und Paul werfen mit einer Münze und wetten um die Geldeinheit. Peter setzt auf Kopf, und sein gesamter Gewinn bzw. Verlust bis und mit dem $n$-ten Spiel werde mit $S_n$ bezeichnet und dementsprechend der Gewinn von Paul mit $-S_n$. Um