

Das axonometrischen Prinzip im Lichte moderner Begriffsbildungen

Autor(en): **Jeger, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **13 (1958)**

Heft 1

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19771>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIII Nr. 1 Seiten 1–24 Basel, 10. Januar 1958

Das axonometrische Prinzip im Lichte moderner Begriffsbildungen

1. Einleitung

Bei den sogenannten linearen (das heisst geradentreuen) Abbildungsverfahren der darstellenden Geometrie findet sich ein Gedanke entwickelt, der unter der Bezeichnung *axonometrisches Prinzip* bekannt ist. Er besteht im wesentlichen darin, die Raumpunkte durch die Koordinaten in bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem festzulegen und die Abbildung der Punkte auf eine Ebene auf Grund dieser Koordinaten zu konstruieren. Die Durchführung dieses Abbildungsverfahrens setzt die Kenntnis des ebenen Abbildes des räumlichen Koordinatensystems voraus; man nennt dieses Gerüst der Abbildung das *axonometrische Achsenkreuz*¹⁾.

Das axonometrische Abbildungsverfahren soll zunächst am bekanntesten Beispiel kurz erläutert werden. Einer Abbildung $\mathfrak{A}$ des Raumes auf eine Ebene $\bar{\alpha}$ sei das folgende axonometrische Achsenkreuz zugrunde gelegt: die Geraden $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ mit dem gemeinsamen Schnittpunkt $\bar{O}$ seien Abbild eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems mit den Achsen x , y und z und dem Ursprung O . Den drei *regulären Skalen* auf x , y und z mit dem Nullpunkt in O sollen wiederum drei reguläre Skalen auf $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ je mit dem Nullpunkt in $\bar{O}$ entsprechen. Die Einheitspunkte der Skalen seien mit X , Y , Z bzw. $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ bezeichnet. Das ebene Bild eines Raumpunktes $P(\xi, \eta, \zeta)$ wird mit Hilfe des sogenannten *Koordinatenquaders* konstruiert. Die drei Koordinaten ξ , η , ζ legen auf $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ die drei Punkte $\bar{P}_x$, $\bar{P}_y$ und $\bar{P}_z$ fest. Durch Ergänzen des Koordinatenquaders geht daraus das Bild $\bar{P}$ hervor. In der Figur 1 ist als Beispiel der Punkte $P(3/2, 2, 4/3)$ abgebildet.

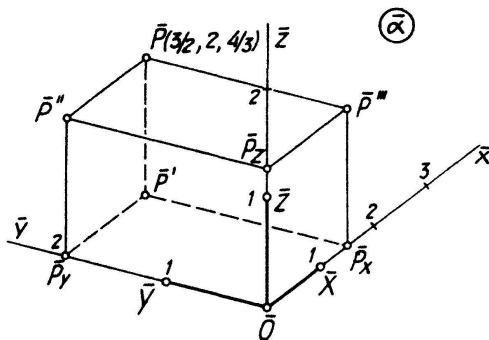
Durch die stillschweigend gemachte Voraussetzung, dass $\mathfrak{A}$ die drei Bündel von Parallelen zu x , y und z wieder in Geraden, und zwar (infolge der speziellen Struktur der Skalen auf dem axonometrischen Achsenkreuz in $\bar{\alpha}$) in die drei Büschel von Parallelen zu $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ überführt, wird der Abbildung ein affines Element aufgeprägt. Inwieweit dadurch die ganze Abbildung affinen Charakter erhält, bringt etwa das bekannte Pohlkesche Theorem zum Ausdruck. Es besagt, dass bei jeder ver-

¹⁾ Als wesentliche Beiträge zum Begriff des axonometrischen Prinzips seien hier erwähnt die Arbeiten von E. KRUPPA [8], E. MÜLLER [9] und E. STIEFEL [10]. Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 12.

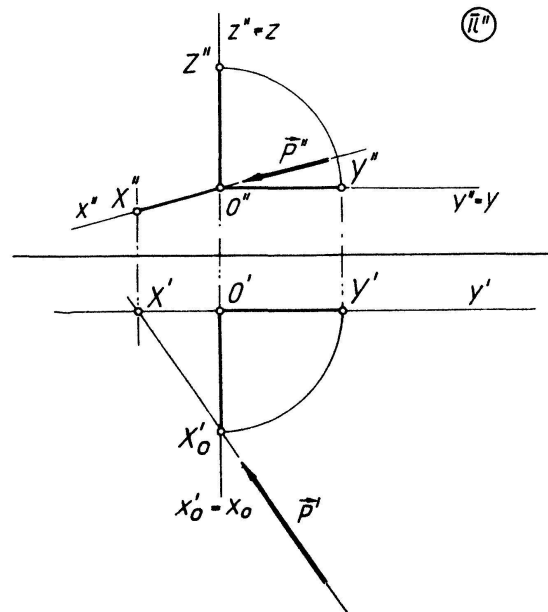
1-6. TJ

№ 2. Jan. 1039

nünftigen Wahl²⁾ des axonometrischen Achsenkreuzes die Abbildung $\mathfrak{U}$ stets auch erzeugt werden kann durch Parallelprojektion des Raumes auf eine geeignete Ebene π und eine nachfolgende ähnliche Abbildung von π auf die Ebene $\bar{\alpha}$. Hieraus ergibt sich, dass $\mathfrak{U}$ eine geradentreue Abbildung des Raumes auf die Ebene $\bar{\alpha}$ ist, mit gleichzeitiger Invarianz der Parallelität. Die Kenntnis dieser Eigenschaften verbürgt die Anwendbarkeit der Gesetze der Parallelprojektion bei der Konstruktion axonometrischer Bilder. Dazu genügt aber auch schon die Tatsache, dass die aus unserem Achsenkreuz hervorgehende Abbildung $\mathfrak{U}$ äquivalent ist mit einer Parallelprojektion



Figur 1



Figur 2

des Raumes auf eine beliebige Ebene π (welche die Projektionsrichtung nicht enthält) und eine nachfolgende affine Abbildung von π auf $\bar{\alpha}$. Bei diesem Sachverhalt schwindet die Bedeutung des Pohlkeschen Satzes für die darstellende Geometrie ganz erheblich³⁾. Die letztere, in bezug auf den Satz von POHLKE schwächere Aussage ist wesentlich leichter zu beweisen. Es sei hier ein Beweis nach einer Idee von E. STIEFEL⁴⁾ wiedergegeben.

Da das axonometrische Achsenkreuz zu $\mathfrak{U}$ den Rang 2 hat, gibt es zwei Koordinatenachsen, deren Bilder nicht in derselben Geraden liegen; es seien dies etwa $\bar{y}$ und $\bar{z}$. Es existiert nun stets eine affine Abbildung von $\bar{\alpha}$ auf eine Ebene π'' , bei der das axonometrische Achsenkreuz die spezielle Gestalt der Figur 2 annimmt: y'' und z'' sind orthogonal und $\bar{O}''Y'' = \bar{O}''Z'' = 1$. Der Geraden $\bar{x}$ entspricht eine bestimmte Gerade x'' durch O'' ; X'' sei das Bild des Einheitspunktes $\bar{X}$. Das spezielle Achsenkreuz in π'' ist nun aber Parallelprojektion eines räumlichen Dreiecks. Man erkennt dies so, indem man die beiden Geraden $y'' = y$ und $z'' = z$ in π'' durch eine dritte,

²⁾ Als vernünftig gilt jedes axonometrische Achsenkreuz $\bar{O}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, für welches das Bild des Raumes die ganze Ebene $\bar{\alpha}$ bedeckt. Dies bedeutet, dass $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ nicht in eine einzige Gerade zusammenfallen dürfen. Man spricht in diesem Falle von einem Achsenkreuz mit dem Rang 2.

³⁾ Dieser Standpunkt wird unseres Wissens erstmals vertreten von E. STIEFEL in [10]. Man vergleiche auch [11].

⁴⁾ Vergleiche [10], Seite 131.

zur Zeichenebene normale Gerade x_0 zu einem räumlichen System ergänzt. In der Zeichnung wird diese Ergänzung deutlicher, wenn wir dem Aufriss π'' noch einen Grundriss beifügen. Aus der derart erweiterten Figur 2 entnimmt man jetzt sofort, dass $O''(x'', y'', z'')$ Parallelprojektion des räumlichen Achsensystems $O(x_0, y, z)$ ist; der Vektor $\vec{p}$ gibt die Projektionsrichtung an. In der Formulierung der den Pohlkeschen Satz umgehenden Aussage über unsere Abbildung $\mathfrak{A}$ war von einer mehr oder weniger beliebigen Ebene π die Rede. Dass man anstelle von π'' eine beliebige andere, die Projektionsrichtung $\vec{p}$ nicht enthaltende Ebene π nehmen kann, folgt aus der Bemerkung, dass die Parallelprojektionen des Raumes auf π und π'' untereinander affin sind.

Definiert man die axonometrische Abbildung des Raumes auf eine Ebene $\bar{\alpha}$ als Abbildung mit dem Gerüst $\bar{O}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, so stellt sich zunächst eine Schwierigkeit ein, auf die wir bis jetzt noch gar nicht hingewiesen haben. Es ist nämlich gar nicht so selbstverständlich, dass sich die *Koordinatenquader-Figur* in $\bar{\alpha}$ ohne weiteres schliesst. Damit soll der folgende Sachverhalt zum Ausdruck gebracht werden: Durch die Koordinaten von P sind die Punkte $\bar{P}_x, \bar{P}_y$ und $\bar{P}_z$ festgelegt (Figur 1). Diese wiederum bestimmen die Punkte $\bar{P}', \bar{P}''$ und $\bar{P}'''$, die man durch Ziehen von Parallelen erhält. Wir haben nun bis jetzt stillschweigend angenommen, dass sich die Parallelen zu $\bar{z}$ durch $\bar{P}'$, zu $\bar{y}$ durch $\bar{P}''$ und zu $\bar{x}$ durch $\bar{P}'''$ sich in einem Punkte $\bar{P}$ treffen. Durch den Nachweis, dass $\bar{O}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ durch affine Deformation einer Parallelprojektion des kartesischen Systems $O(x, y, z)$ auf die Ebene π erhalten werden kann, ist aber gleichzeitig auch die Schliessung der Koordinatenquaderfigur mit bewiesen. Die Schliessung der Quaderfigur über dem Achsenkreuz $O(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ist eine Inzidenzfrage in der Ebene $\bar{\alpha}$, die wir erledigt haben durch ein Aufsteigen in den dreidimensionalen Raum. Wir werden im folgenden noch unter etwas andern Gesichtspunkten an dieses Problem herantreten.

Eine Abbildung des Raumes auf eine Ebene $\bar{\alpha}$ kann infolge des Verlustes einer Dimension niemals eindeutig sein; es gibt getrennte Punkte im Raum, die dasselbe Bild ergeben. In der Figur 3a ist ein Punkt P gezeichnet, dessen Bild $\bar{P}$ mit $\bar{O}$ zusammenfällt.

Sämtliche Punkte P , die das gleiche Bild $\bar{P}$ aufweisen, liegen auf einer Raumkurve p . Betrachtet man zu allen Punkten der Bildebene die zugehörigen Raumkurven p , so erhält man die sogenannte *projizierende Kurvenkongruenz der Abbildung*. Es ist dies eine zweiparametrische Kurvenschar⁵⁾.

Nach unsern Feststellungen gehört zum axonometrischen Achsenkreuz der Figur 1 eine Abbildung $\mathfrak{A}$, deren projizierende Kongruenz ein Parallelenbündel ist.

Nachdem die aus der Figur 1 hervorgehende Abbildung als Parallelprojektion erkannt ist⁶⁾, lässt sich aus dem axonometrischen Achsenkreuz nun auch die Projektionsrichtung entnehmen. Für den Punkt P der Figur 3a ist $\bar{P} = \bar{O}$. Seine Koordinaten lassen sich auf den Skalen $\bar{x}, \bar{y}$ und $\bar{z}$ ablesen: P hat die Koordinaten (3, 4, 2), der Vektor $\vec{OP} = \vec{r}$ mithin die Komponenten (3, 4, 2). Die Projektionsrichtung ist parallel zum Vektor $\vec{r} = (3, 4, 2)$.

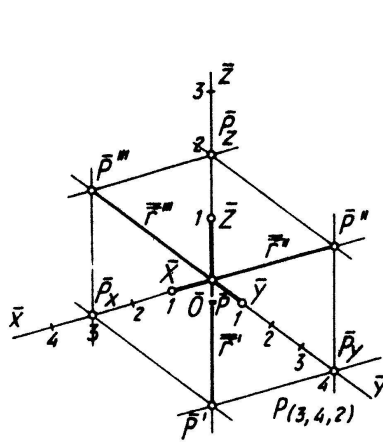
⁵⁾ Zum Begriff der Kurven-Kongruenz vergleiche etwa [1], § 49.

⁶⁾ Wir fassen den Begriff Parallelprojektion etwas allgemeiner, als es sonst üblich ist; jede Abbildung, deren projizierende Kongruenz ein Parallelenbündel ist, soll eine Parallelprojektion genannt werden.

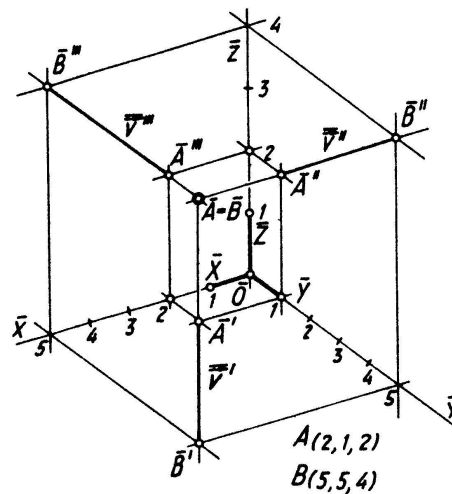
Dass es sich um eine Parallelprojektion handeln muss, lässt sich auch ohne ein Aufsteigen in den dreidimensionalen Raum direkt aus der Ebene $\bar{\alpha}$ entnehmen. Zwei Punkte mit gleichen Bildern, wie etwa A und B der Figur 3b, haben stets einen zu $\vec{r}$ parallelen Verbindungsvektor $\vec{v}$. Hieraus folgt aber, dass die projizierende Kongruenz ein Parallelenbündel mit der Richtung $\vec{r}$ ist. Der Figur 3b liegt dasselbe axonometrische Achsenkreuz zugrunde wie der Figur 3a; für die beiden gezeichneten Punkte A und B ist speziell $\vec{v} = \vec{r}$. Der vollständige Vergleich der beiden Figuren 3a und 3b sei dem Leser überlassen.

Wir schliessen unsere Ausführungen über die Parallelprojektionen mit einem Hinweis auf den folgenden

Satz 1: *Zwei axonometrische Abbildungen vom Typus der Figur 1 auf zwei Ebenen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$, deren projizierende Kongruenzen übereinstimmen, sind affin-äquivalent⁷⁾.*



Figur 3a



Figur 3b

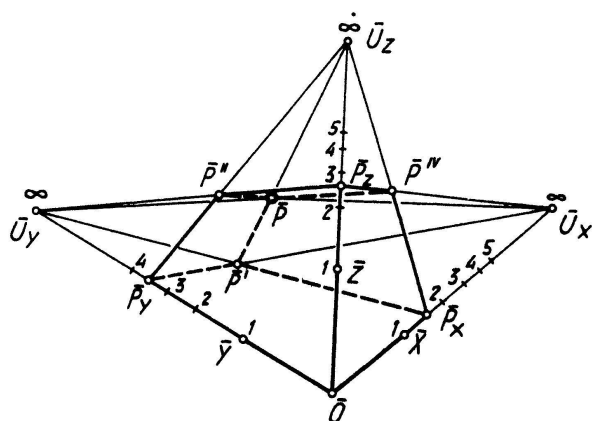
Dieser Sachverhalt lässt sich ohne weiteres aus den vorstehenden Überlegungen über die Ebenen π und $\bar{\alpha}$ entnehmen. Man kann ihn aber auch einsehen, ohne den dreidimensionalen Raum beizuziehen. Haben nämlich zwei axonometrische Abbildungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dieselbe projizierende Kongruenz, so bedeutet dies, dass die zugehörigen Sechsecke der Figur 3a auf den drei Skalen von $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ in $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ proportionale Koordinatenwerte festlegen. Es gibt daher in $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ Sechsecke, die gleiche Koordinatenwerte bestimmen, und man erkennt leicht, dass zwei derartige Figuren in ihrer Gesamterstreckung affin-äquivalent sind.

Die nächstliegende Verallgemeinerung des axonometrischen Achsenkreuzes führt auf drei mit einem Punkte $\bar{O}$ inzidente Geraden $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$, die je eine *projektive Skala*⁸⁾ mit dem Nullpunkt $\bar{O}$ tragen. Eine projektive Skala ist durch drei ihrer Punkte bestimmt; dementsprechend geben wir neben $\bar{O}$ noch die Einheitspunkte $\bar{X}$, $\bar{Y}$ und $\bar{Z}$ und die Fluchtpunkte $\bar{U}_x$, $\bar{U}_y$ und $\bar{U}_z$ (Bilder der unendlichfernen Punkte auf x , y und z) vor. In Analogie zur Axonometrie der Parallelprojektion setzen wir jetzt voraus, dass die 3 Bündel von Parallelen zu x , y und z in drei Geradenbüschel mit

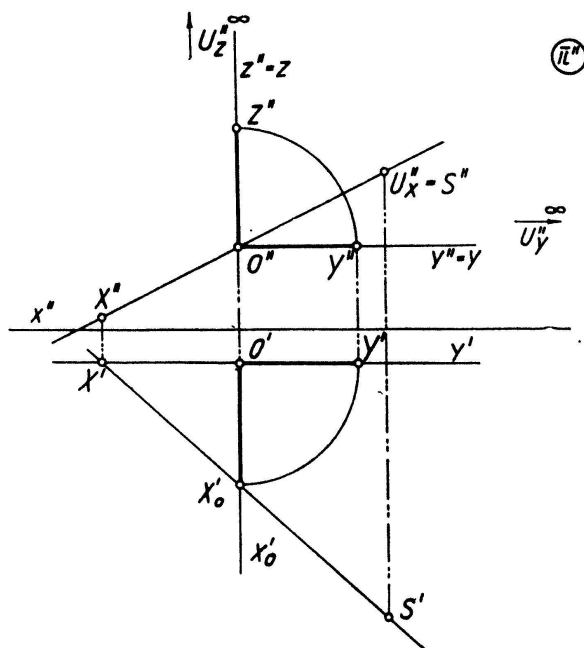
⁷⁾ Das heisst, die Figuren in $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ gehen durch eine Affinität auseinander hervor.

⁸⁾ Unter einer projektiven Skala versteht man das projektive Bild einer regulären Skala.

den Trägern $\bar{U}_x$, $\bar{U}_y$ und $\bar{U}_z$ übergehen sollen. Die Abbildung eines Raumpunktes $P(\xi, \eta, \zeta)$ vollzieht sich wiederum auf Grund der durch seine Koordinaten ξ, η, ζ auf den Skalen von x, y und z festgelegten Punkte $\bar{P}_x, \bar{P}_y$ und $\bar{P}_z$ und der daraus hervorgehenden Quaderfigur in $\bar{\alpha}$. Dass sich diese Konfiguration bei jeder vernünftigen Annahme⁹⁾ des axonometrischen Achsenkreuzes¹⁰⁾ schliesst, ist jetzt nicht mehr so naheliegend wie bei der Parallelprojektion (Figur 1). E. STIEFEL gibt dafür in [10]¹¹⁾ einen rein planimetrischen Beweis unter Verwendung des Desarguesschen Dreiecksatzes der projektiven Geometrie sowie einen weitem Beweis, der den Charakter der Abbildung $\mathfrak{A}$ vollständig aufdeckt. Beim letztern handelt es sich um den Beweis, der



Figur 4



Figur 5

uns im Falle der Parallelprojektion auf die Figur 2 geführt hat; er sei im Hinblick auf die nachfolgenden Ausführungen hier kurz wiederholt.

Eine projektive Abbildung von $\bar{\alpha}$ auf eine Ebene π'' ist durch vier Punkte in allgemeiner Lage und deren Bilder bestimmt. Es existiert demnach stets eine Projektivität, die das axonometrische Achsenkreuz der Figur 4 auf die spezielle Gestalt der Figur 5 abbildet. In π'' sind die Achsen y'' und z'' orthogonal, $\bar{O}''\bar{Y}'' = \bar{O}''\bar{Z}'' = 1$ und es sind $\bar{U}_y$ und $\bar{U}_z$ unendlichferne Punkte. Die Projektivität zwischen $\bar{\alpha}$ und π'' lässt sich nämlich durch $\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{U}_y, \bar{U}_z$ und die Bilder Y'', Z'', U_y'', U_z'' festlegen. Die projektiven Skalen auf $\bar{y}$ und $\bar{z}$ werden dabei regulär. Die Skala auf $\bar{x}$ hingegen bleibt im allgemeinen projektiv. X'' sei das Bild ihres Einheitspunktes, U_x'' dasjenige ihres Fluchtpunktes.

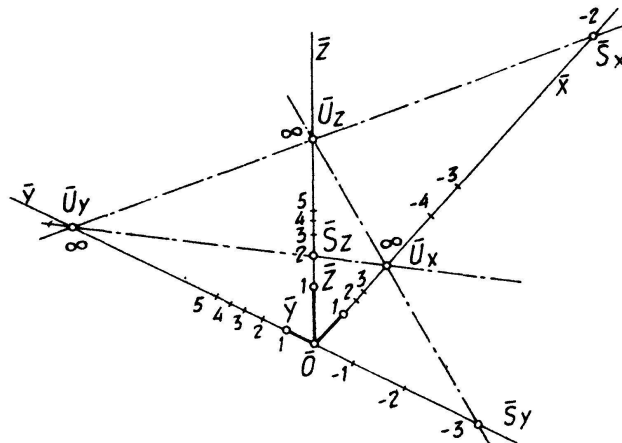
Aus der Figur 5 ergibt sich leicht, dass das axonometrische Achsenkreuz $O''(x'', y'', z'')$ Zentralprojektion des räumlichen Achsensystems $O(x_0, y, z)$ von S aus auf die Aufrissebene π'' ist. Mit dieser Erkenntnis ist jetzt die Schliessung der Quader-

⁹⁾ Vernünftig bedeutet hier wiederum, dass das Achsenkreuz den Rang 2 aufweist.

¹⁰⁾ E. STIEFEL spricht in diesem Falle von einem perspektivischen Achsenkreuz. Vergleiche [10], Seite 124.

¹¹⁾ Vergleiche [10], Seiten 125 und 131.

figur in $\bar{\alpha}$ sichergestellt. Gleichzeitig entnehmen wir aber noch, dass unsere Abbildung $\mathfrak{A}$ des Raumes auf die Ebene $\bar{\alpha}$ mit dem Gerüst $\bar{O}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ äquivalent ist mit einem projektiven Abbild der Zentralprojektion des Raumes auf die Ebene π . Projiziert man den Raum von S aus auf eine beliebige andere (mit S nicht inzidente) Ebene π , so sind die Bilder in π und π'' projektiv-äquivalent. Jede axonometrische Abbildung $\mathfrak{A}$, die aus einem Achsenkreuz vom Typus der Figur 4 hervorgeht, kann daher auch erzeugt werden durch Zentralprojektion des Raumes auf eine mit dem Projektionszentrum nicht inzidente Ebene π und eine nachfolgende projektive Abbildung von π auf die Ebene $\bar{\alpha}$. Die projizierende Kongruenz der Abbildung $\mathfrak{A}$ ist ein Geradenbündel. Speziell liegt ein Parallelenbündel vor, wenn der Punkt S und damit auch der



Figur 6

Punkt U_x'' der Figur 5 unendlichferne Punkte sind. Dies trifft nur dann zu, wenn die drei Fluchtpunkte $\bar{U}_x$, $\bar{U}_y$ und $\bar{U}_z$ kollinear sind.

Nennen wir eine geradentreue Abbildung des Raumes auf die Ebene in etwas verallgemeinertem Sinne eine Zentralprojektion¹²⁾, wenn die projizierende Kongruenz ein Geradenbündel ist, so ergibt sich

Satz 2: Jede axonometrische Abbildung vom Typus der Figur 4¹³⁾ ist eine Zentralprojektion. Insbesondere liegt eine Parallelprojektion vor, wenn die 3 Fluchtpunkte $\bar{U}_x$, $\bar{U}_y$ und $\bar{U}_z$ auf einer Geraden liegen.

In gleicher Weise, wie sich bei der Parallelprojektion die Projektionsrichtung aus dem axonometrischen Achsenkreuz entnehmen lässt, kann auch bei der eigentlichen Zentralprojektion¹⁴⁾ die Lage des Projektionszentrums S aus dem axonometrischen Achsenkreuz herausgelesen werden. S ist als Raumpunkt dadurch gekennzeichnet, dass er kein ebenes Bild besitzt, das heisst, die Quaderfigur in $\bar{\alpha}$ degeneriert für S . Dies trifft zu, wenn die Punkte $\bar{S}_x$, $\bar{S}_y$ und $\bar{S}_z$ so liegen wie in der Figur 6. Auf den projektiven Skalen von $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ lassen sich die Koordinaten von S ablesen; im gezeichneten Beispiel ist $S(-2, -3, +3)$.

¹²⁾ Üblicherweise spricht man nur dann von einer Zentralprojektion, wenn sich die Ebene $\bar{\alpha}$ so in den Raum legen lässt, dass die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte P und $\bar{P}$ durch einen festen Punkt laufen.

¹³⁾ E. STIEFEL nennt diese Axonometrie eine Perspektive. Vergleiche [10], Seite 124.

¹⁴⁾ Wir wollen dann von einer eigentlichen Zentralprojektion sprechen, wenn das Projektionszentrum im Endlichen liegt, das heisst, wenn die projizierende Kongruenz ein eigentliches Geradenbündel ist.

In Analogie zu Satz 1 besteht für die Zentralprojektion der

Satz 3: Sind für zwei Zentralprojektionen auf die Bildebenen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ die projizierenden Kongruenzen identisch, so sind die ebenen Bilder in $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ projektiv-äquivalent.

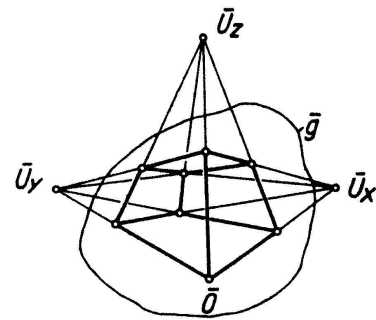
Der Beweis steckt in den festgestellten Zusammenhängen zwischen den Ebenen $\bar{\alpha}$ und π . Es sei aber erwähnt, dass man auch hier wiederum das Dreidimensionale vollständig umgehen kann, das heisst, dass man sich ganz auf die Betrachtung der ebenen Bilder in $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ verlegen kann. Insbesondere hat man die Figur 6 in $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ zu beachten.

Projektiv-äquivalente Abbilder des Raumes erhält man etwa, wenn eine Photographie $\bar{\alpha}$ nochmals photographiert und damit auf eine zweite Bildebene $\bar{\varrho}$ bezogen wird. Die projizierende Kongruenz im Raume bleibt dabei bestehen, das heisst, man erhält durch Photographieren einer Photographie niemals eine Ansicht von einer andern Stelle aus. Zu diesem Thema sei auf einige bemerkenswerte Arbeiten von U. GRAF hingewiesen¹⁵⁾.

2. Topologische Verallgemeinerungen

E. STIEFEL machte in einem Anhang seines bereits zitierten Lehrbuches der darstellenden Geometrie [11] darauf aufmerksam, dass die Theorie der axonometrischen Abbildungen zahlreiche Berührungspunkte mit einem Zweige der modernen Geometrie – der sogenannten *Gewebegeometrie* – aufweist. Man versteht darunter, etwas summarisch ausgedrückt, eine Topologie von mehreren gleichzeitig nebeneinander bestehenden Kurven- bzw. Flächenscharen in beliebigen Dimensionen¹⁶⁾.

Den beiden in Abschnitt 1 auseinandergesetzten axonometrischen Abbildungstypen liegt gemeinsam die Annahme zugrunde, dass die drei Bündel von Parallelen zu den Koordinatenachsen x , y und z als ebene Bilder in $\bar{\alpha}$ drei voneinander verschiedene Geradenbüschel aufweisen. Innerhalb eines Gebietes $\bar{G}$, das die Büschelträger (das sind die Punkte $\bar{U}_x$, $\bar{U}_y$ und $\bar{U}_z$) nicht enthält, bilden diese drei einparametrischen Kurvenscharen ein ebenes *Kurven-3-Gewebe* (Figur 7). Drei miteinander inzidente Geraden aus verschiedenen Scharen sind dabei ausgezeichnet als Träger von projektiven Skalen; diese drei Geraden (man könnte sie etwa als Null-Linien bezeichnen) machen zusammen das axonometrische Achsenkreuz aus.



Figur 7

Wie man sofort einsieht, hängt die für die Konstruktion der Abbildung so wichtige Quaderfigur nicht von den genannten drei Skalen ab. Die Existenz dieser Figur ist eine Eigenschaft des Gewebes allein. In der Gewebegeometrie ist sie unter dem Namen Reidemeister-Konfiguration bekannt¹⁷⁾. Wir

¹⁵⁾ Vergleiche U. GRAF [3, 4].

¹⁶⁾ Die erste zusammenfassende Darstellung der Gewebegeometrie ist das grosse Gewebebuch [3] von BLASCHKE und BOL. Es sei auch auf die kürzlich erschienene Schrift [1] von W. BLASCHKE hingewiesen, die bedeutend weniger umfangreich und dementsprechend leichter verdaulich ist. Zum Verständnis der nachfolgenden Ausführungen dürfte aber auch schon der vor einiger Zeit in dieser Zeitschrift erschienene Aufsatz [6] des Verfassers genügen.

¹⁷⁾ Die Reidemeister-Konfiguration spielt bei gruppentheoretischen Fragen der Gewebegeometrie eine wichtige Rolle. Vergleiche etwa [2].

bezeichnen sie im folgenden kurz als Konfiguration R . Die Figur 8a zeigt sie in einem krummlinigen Gewebe.

Existiert in einem 3-Gewebe die Konfiguration R an jeder Stelle und in jeder Grösse, so muss auch die in Figur 8b wiedergegebene Sechseckkonfiguration (Konfiguration S) an jeder Stelle und in jeder Grösse bestehen. Es geht nämlich S aus R hervor, wenn wir die Punkte A und B zusammenfallen lassen. In Anlehnung an die Figur 8b bezeichnet man derartige Kurven-3-Gewebe als *Sechseckgewebe*.

Ein wichtiges Ergebnis der Gewebegeometrie besagt, dass die Sechseckkonfiguration notwendig und hinreichend dafür ist, dass sich das betreffende Gewebe auf drei Parallelenbüschel topologisch abbilden lässt¹⁸⁾. Hieraus schliessen wir sofort, dass die beiden Konfigurationen R und S geometrisch äquivalent sind; die Existenz der einen in einem Gewebe zieht die Existenz der andern nach sich. Unsere Quader-Figur bei der axonometrischen Abbildung kennzeichnet die Topologie des auftretenden Kurven-3-Gewebes; dieses ist stets ein *Sechseckgewebe*¹⁹⁾.

Schliesslich sollen auch noch die Verhältnisse im Raum kurz unter den neuen Gesichtspunkten gewürdigt werden. Die axonometrische Abbildung zeichnet dort vier Kurvenscharen aus, nämlich die drei Bündel von Parallelen zu den Achsen x , y und z und die projizierende Kongruenz. Die letztere ist entweder ebenfalls ein Parallelenbündel (Fall der Parallelprojektion) oder dann ein eigentliches Geradenbündel (Fall der Zentralprojektion). In beiden Fällen hat man vier zweiparametrische Kurvenscharen, die topologisch dadurch ausgezeichnet sind, dass je zwei Kurvenscharen unter sich an jeder Stelle und in jeder Grösse ebene Vierecke aufspannen, das heisst also nicht windschief sind. Es lässt sich im Raume ein in bezug auf alle vier Kurvenscharen konvexes Gebiet $\mathfrak{G}$ ²⁰⁾ angeben, innerhalb von dem keine Dreiecke aus Geraden unseres 4-Gewebes vorkommen. Im Gebiete $\mathfrak{G}$ bilden die vier genannten Kurvenscharen ein sogenanntes *Vierseit-4-Gewebe*²¹⁾. Das ebene Bild von $\mathfrak{G}$ ist ein Gebiet $\bar{\mathfrak{G}}$, innerhalb von dem die drei Geradenbüschel durch $\bar{U}_x$, $\bar{U}_y$ und $\bar{U}_z$ ein Sechseckgewebe ausmachen.

Nach der Idee von E. STIEFEL²²⁾ lässt sich das axonometrische Prinzip unter Verwendung gewebegeometrischer Begriffsbildungen stark verallgemeinern. Als Gerüst der Abbildung belassen wir im Raume das kartesische Koordinatensystem mit den Achsen x , y und z . Das ebene Bild der drei Parallelenbündel zu x , y und z sei jetzt aber ein beliebiges Kurven-3-Gewebe, von dem wir allerdings – soll die Konstruktion der Bildpunkte in $\bar{\alpha}$ wie bisher vor sich gehen – verlangen müssen, dass sich in ihm die Quaderfigur schliesst. Wir müssen somit ein Sechseckgewebe voraussetzen. In

¹⁸⁾ Diese Aussage ist bekannt als Satz von BLASCHKE-THOMSEN.

¹⁹⁾ Für die Gewebegeometrie lässt sich aus den Darlegungen des Abschnittes 1 die Tatsache entnehmen, dass jedes Gewebe aus drei Geradenbüscheln ein Sechseckgewebe ist. Dies ist ein Spezialfall eines viel umfassenderen Theorems. Nach einem Satz von GRAF-SAUER ist nämlich jedes Tangentengewebe an eine Kurve 3. Klasse ein Sechseckgewebe. In dem für die Axonometrie interessanten Falle ist die Kurve 3. Klasse ausgeartet; ihr Hüllgebilde besteht aus drei Punkten.

²⁰⁾ Durch die Forderung der Konvexität wird vermieden, dass einzelne Gewebekurven durch den Rand des Gebietes zerschnitten werden.

²¹⁾ Vergleiche [3], erster Abschnitt, § 6.

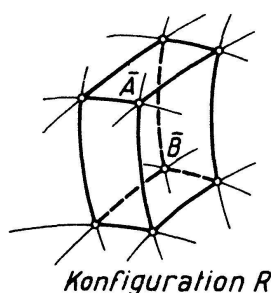
Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Vierseit-4-Gewebe den Sechseck-Geweben in der Ebene topologisch sehr nahe stehen. Jedes Vierseit-4-Gewebe ist nämlich 4 Bündeln von parallelen Geraden topologisch äquivalent.

²²⁾ Vergleiche [11], Seite 166.

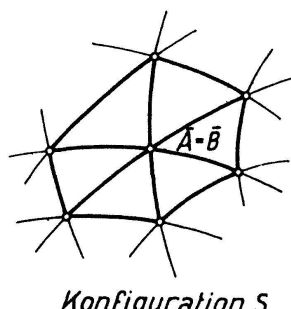
jeder Kurvenschar ist dabei eine Linie als Bild der Achsen x , y und z ausgezeichnet. Die Linien $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ tragen je eine monotone Skala (die Bilder der regulären Skalen von x , y und z), deren Nullpunkt im gemeinsamen Schnittpunkt $\bar{O}$ der drei Linien liegt. Dieses Sechseckgewebe mit drei ausgezeichneten Nulllinien als Skalenträger tritt jetzt an die Stelle des axonometrischen Achsenkreuzes (Figur 9).

STIEFEL bezeichnet die aus einem solchen Gerüst hervorgehende Abbildung des Raumes auf eine Ebene $\bar{\alpha}$ als eine *stetige Perspektive*.

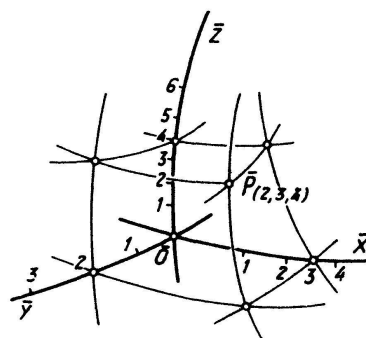
Zu unserem Sechseckgewebe in $\bar{x}$ lässt sich stets ein Gebiet $\mathfrak{G}$ im Raume finden, innerhalb von dem die projizierende Kongruenz der Abbildung zusammen mit den drei Parallelenbündeln zu x , y und z ein Vierseit-4-Gewebe aufspannt. Wählt man $\mathfrak{G}$



Figur 8a



Figur 8b



Figur 9

konvex in bezug auf sämtliche vier Kurvenscharen, so ist sein Bild ein Gebiet $\bar{\mathfrak{G}}$ in der Ebene $\bar{\alpha}$, und unsere axonometrische Abbildung bildet die Kurven der projizierenden Kongruenz eineindeutig auf die Punkte in $\bar{\mathfrak{G}}$ ab. Diese Einschränkung der Abbildung zwischen Raum und Ebene müssen wir bei unserer Verallgemeinerung in Kauf nehmen; wir können im allgemeinen nur noch von einer Abbildung eines Gebietes $\mathfrak{G}$ des Raumes auf ein Gebiet $\bar{\mathfrak{G}}$ der Ebene $\bar{\alpha}$ sprechen.

Es sei noch bemerkt, dass nicht jede Abbildung Raum-Ebene als eine stetige Perspektive aufgezo-gen werden kann; dieses Abbildungsverfahren funktioniert nur, wenn die projizierende Kongruenz mit den drei Parallelenbündeln zu x , y und z ein Vierseit-4-Gewebe erzeugt.

In Verallgemeinerung der beiden Sätze 1 und 3 schliesst man aus den vorstehenden Bemerkungen ohne weiteres auf den

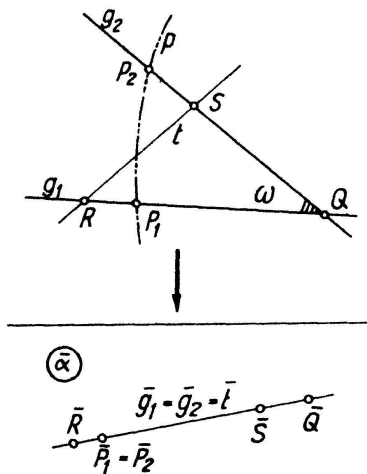
Satz 4: *Zwei stetige Perspektiven mit den Bildebenen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$, deren projizierende Kongruenzen in einem in bezug auf sie konvexen Gebiet $\mathfrak{G}$ übereinstimmen, sind in den beiden zusammengehörigen Bildgebieten topologisch äquivalent.*

3. Lineare Abbildungen im erweiterten Sinne

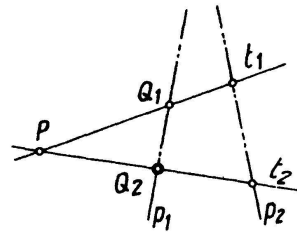
Wir betrachten jetzt eine stetige und eindeutige Abbildung des Raumes auf die Ebene $\bar{\alpha}$, die jede Raumgerade entweder auf eine Gerade oder auf einen Punkt abbildet. Wir sprechen in diesem Falle von einer *geradentreuen Abbildung* des Raumes auf die Ebene $\bar{\alpha}$.

Satz 5: *Die projizierende Kongruenz einer geradentreuen Abbildung des Raumes auf eine Ebene ist stets ein Geradenbündel.*

Wir führen den Beweis in zwei Schritten und zeigen zunächst, dass die projizierende Kongruenz eine Geradenschar ist. Es sei p eine Kurve aus der projizierenden Kongruenz; g_1 und g_2 seien zwei inzidente Raumgeraden durch zwei verschiedene Punkte von p . Das ebene Abbild einer Transversalen t von g_1 und g_2 fällt ebenfalls auf $g_1 = g_2$. Legt man diese Transversale so, wie in Figur 10 gezeichnet, so liegt zwischen R und S ein Punkt, dessen Bild mit $P_1 = P_2$ zusammenfällt, das heisst aber, dass p mit t inzident sein muss. Wir schliessen daraus, dass die Kurve p in der Ebene $\omega = (g_1, g_2)$ liegt. Da die Geraden g_1 und g_2 beliebig sind, folgt nun aber sofort, dass p auch noch in andern Ebenen liegen muss, was aber nur möglich ist, wenn sie eine Gerade ist.



Figur 10



Figur 11

Die projizierende Kongruenz ist also eine Geradenschar. Es seien nun p_1 und p_2 zwei projizierende Geraden, ferner sei t_1 eine beliebige Transversale. Durch den Punkt P von t_1 sei eine Gerade t_2 gelegt, die p_1 im Punkte Q_2 schneidet (Figur 11). t_1 und t_2 haben dasselbe ebene Bild; hieraus folgt nun aber, dass t_2 auch mit p_2 inzident ist. p_1 und p_2 liegen daher in einer Ebene, das heisst, sie schneiden sich. Wenn aber jedes Paar von projizierenden Geraden inzident ist, so ist die projizierende Kongruenz notwendigerweise ein Geradenbündel.

Die Forderung der Geradentreue ist für die darstellende Geometrie eine Frage der Zweckmässigkeit; wir stellen fest, dass unter dieser Annahme die Parallelprojektion und die Zentralprojektion die einzigen vernünftigen Abbildungen Raum–Ebene sind. Abgesehen von den projizierenden Geraden ist eine solche Abbildung auch doppelverhältnistreu. Man spricht daher auch von einer *projektiven Abbildung des Raumes auf die Ebene*.

Die topologische Verallgemeinerung der geradentreuen Abbildung führt auf die sogenannte *geodätische Abbildung*. Bei dieser werden die Geraden des Raumes (geodätische Linien) auf ein *quasigeodätisches Kurvensystem* in der Ebene $\bar{\alpha}$ abgebildet. Man versteht darunter ein zweiparametriges Kurvensystem in $\bar{\alpha}$, das etwa bei Zugrundelegung eines kartesischen Koordinatensystems mit den Achsen u und v durch eine Differentialgleichung vom Typus

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + A(u, v) \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + B(u, v) \left(\frac{dv}{dv} \right)^2 + C(u, v) \frac{du}{dv} + D(u, v) = 0$$

beschrieben wird. Wie sich leicht zeigen lässt, bilden die Gleichungen dieser Art eine gegenüber topologischen Abbildungen invariante Klasse von Differentialgleichungen 2. Ordnung²³⁾. Sie sind geometrisch durch die folgenden beiden Eigenschaften ausgezeichnet:

Von jedem Punkte aus gibt es in jeder Richtung eine Systemkurve (Integralkurve);
Im Kleinen geht durch zwei Punkte stets genau eine Systemkurve.

Die geodätischen Linien auf einer Fläche sind von dieser Art, was die Bezeichnungsweise *quasigeodätische Systeme* nahelegt.

Ist speziell $A \equiv B \equiv C \equiv D \equiv 0$, so erhält man die Differentialgleichung der Geraden in $\bar{\alpha}$:

$$\frac{d^2u}{dv^2} = 0.$$

Ein quasigeodätisches System, das mit den Geraden der Ebene topologisch äquivalent ist (das heisst auf diese topologisch abbildbar ist), wird *projektiv-euklidisch* genannt.

Es ist leicht einzusehen, dass jede geodätische Abbildung die Raumgeraden innerhalb eines Gebietes $\mathfrak{G}$ auf ein projektiv-euklidisches quasigeodätisches System innerhalb eines Gebietes $\bar{\mathfrak{G}}$ abbildet. Ist nämlich etwa ε eine Ebene des Raumes, die innerhalb eines Gebietes $\mathfrak{G}^* \subset \mathfrak{G}$ die projizierende Kongruenz nicht tangiert, so werden die Geraden von ε in $\mathfrak{G}^*$ auf die Linien des quasigeodätischen Systems innerhalb eines bestimmten ebenen Gebietes $\bar{\mathfrak{G}}^*$ bezogen, das heisst, die letzteren sind topologisch äquivalent mit den Geraden von ε . Daraus ergibt sich nun

Satz 6: *Jede geodätische Abbildung des Raumes auf eine Ebene $\bar{\alpha}$ ist äquivalent mit einer topologischen Verzerrung eines geradentreuen (projektiven) Bildes auf eine Ebene α .*

Die projizierende Kongruenz einer geodätischen Abbildung ist stets ein Geradenbündel.

Satz 6 berechtigt uns, die geodätischen Abbildungen als lineare Abbildungen in erweitertem Sinne zu bezeichnen.

Prinzipiell sind zwei Typen von geodätischen Abbildungen auseinanderzuhalten, nämlich Zentralprojektionen und Parallelprojektionen, je nachdem die projizierende Kongruenz ein eigentliches oder ein uneigentliches Bündel ist. Es sei nun noch kurz auf eine topologische Unterscheidungsmöglichkeit der beiden zugehörigen axonometrischen Abbildungen hingewiesen.

Bei der axonometrischen Darstellung einer geodätischen Abbildung gehen die drei Parallelenbündel zu den Achsen x , y und z in ein Sechseckgewebe über. Die Bilder aller Raumgeraden spannen ein quasigeodätisches Kurvensystem auf, das dieses Sechseckgewebe vollständig enthält. Liegt nun eine Parallelprojektion vor, so lässt sich die Figur in der Bildebene $\bar{\alpha}$ durch topologische Abbildung auf eine andere Ebene α stets so vereinfachen, dass das Sechseckgewebe ein regelmässiges wird und dass das quasigeodätische System das System der Geraden in α ist (isometrische Axonometrie, vergleiche Figur 12). In bezug auf das Sechseckgewebe ist eine einzelne

²³⁾ Zum Begriff quasigeodätisches System vergleiche etwa [3], § 29. Vielfach spricht man auch von einem *projektiven Zusammenhang*.

Wenn hier im letzten Teile von topologischen Abbildungen die Rede ist, so ist dabei – wie dies aus unsern Betrachtungen sich zwangsläufig ergibt – die Differenzierbarkeit der Abbildungsfunktionen vorauszusetzen. Es handelt sich also genau genommen stets um differenzierbare topologische Abbildungen.

Gerade g' der Ebene α dadurch ausgezeichnet, dass sie in jedem ihrer Punkte mit den drei Kurven des Gewebes ein festes Doppelverhältnis bildet. Das quasigeodätische System ist identisch mit dem sogenannten *Doppelverhältnis-System*²⁴⁾ über dem Abbildungsgewebe. Die Doppelverhältnis-Eigenschaft ist invariant gegenüber topologischen Abbildungen, das heisst, sie besteht auch im ursprünglichen Bild in $\bar{\alpha}$. Bei Zentralprojektion besteht diese Doppelverhältnisseigenschaft offensichtlich nicht; der Leser möge sich dies etwa anhand der Figur 4 selbst überlegen.

Satz 7: Bei der axonometrischen Darstellung der geodätischen Abbildungen sind die Parallelprojektionen dadurch ausgezeichnet, dass das durch die Raumgeraden in der Bildebene erzeugte quasigeodätische System stets das Doppelverhältnis-System zum Abbildungsgewebe ist.

Bemerkenswert ist an Satz 7, dass darin die Form der Skalen auf den Koordinatenachsen gar nicht erscheint.

Im Lichte unserer neuen Begriffsbildungen lässt sich das bekannte Pohlkesche Theorem folgendermassen aussprechen:

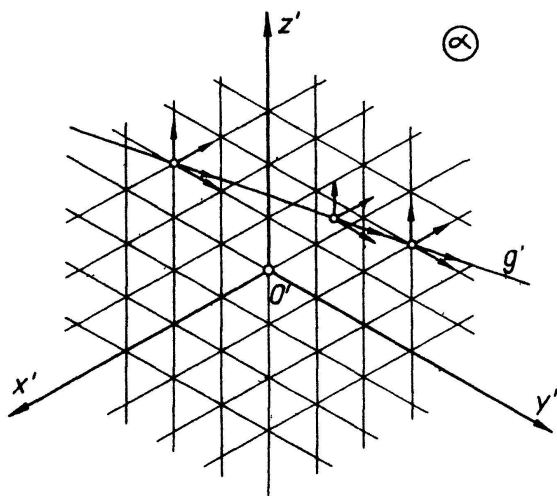
Besitzt eine axonometrische Abbildung des Raumes auf eine Ebene $\bar{\alpha}$ ein Grundgewebe aus 3 Parallelenscharen und sind die 3 Skalen auf den Nulllinien regulär, so ist $\bar{\alpha}$ ähnlich zu einer Parallelprojektion des Raumes auf eine Ebene α .

Daneben schliessen wir auf Grund von Satz 7 leicht auf

Satz 8: Gehen bei einer stetigen Perspektive die Geraden des Raumes in das Doppelverhältnis-System zum Abbildungsgewebe über, so ist $\bar{\alpha}$ topologisch äquivalent zu einer Parallelprojektion des Raumes auf eine Ebene α .

Ein Vergleich der beiden Aussagen zeigt, dass Satz 8 in gewissem Sinne eine topologische Verallgemeinerung des Theorems von POHLKE darstellt.

M. JEGER, Luzern



Figur 12

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BLASCHKE, W., *Einführung in die Geometrie der Waben* (Birkhäuser, Basel 1955).
- [2] BLASCHKE, W., *Projektive Geometrie* (Birkhäuser, Basel 1954), Abschnitt 9.
- [3] BLASCHKE, W., und BOL, G., *Geometrie der Gewebe*, *Grundl. math. Wiss.* 49 (1938).
- [4] GRAF, U., *Über das Photo eines Photo*, *Z. angew. Math. Mech.* 21 (1941).
- [5] GRAF, U., *Photographien von Photographien*, *Z. math. naturw. Unterr.* 73, 33 (1942).
- [6] JEGER, M., *Topologische Gesichtspunkte in der Nomographie. Eine Einführung in die Geometrie der Gewebe*, *El. Math.* 8, Heft 2/3 (1953).
- [7] JEGER, M., *Zur projektiven Differentialgeometrie ebener Kurven-3-Gewebe*, *Math. Z.* 60 (1954).
- [8] KRUPPA, E., *Zur axonometrischen Methode in der darstellenden Geometrie*, *Ber. Akad. Wien [IIa]* 119 (1910).

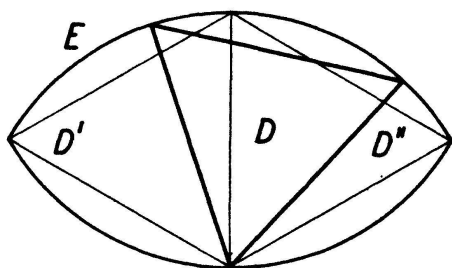
²⁴⁾ Es gibt zu jedem beliebigen Kurven-3-Gewebe in der Ebene ein sogenanntes Doppelverhältnis-System, das heisst ein quasigeodätisches System, dessen Kurven mit den 3 Kurvenscharen des Gewebes feste Doppelverhältnisse bilden. Vergleiche [3], § 29, sowie [7].

- [9] MÜLLER, E., *Vorlesungen über darstellende Geometrie*. Band I: *Die linearen Abbildungen* (speziell 3. Kapitel) (Wien 1923).
 [10] STIEFEL, E., *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Birkhäuser, Basel 1947).
 [11] WUNDERLICH, W., *Zur Entbehrlichkeit des Satzes von Pohlke im Unterricht der darstellenden Geometrie*, *El. Math.* 10, Heft 4 (1955).

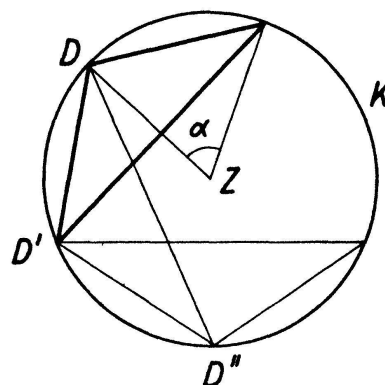
Ungelöste Probleme

Nr. 21. In der Ebene sei ein Dreieck D vorgelegt. Wir fragen, ob sich diesem D eine von seinem Umkreis K verschiedene Eilinie E so umschreiben lässt, dass D in E derart stetig herumgeführt werden kann, dass D nach einer vollen Umdrehung in der Ebene wieder mit sich zur Deckung kommt und hierbei dauernd der festen Eilinie E eingeschrieben bleibt.

1. Erstens sei angemerkt, dass das reguläre Dreieck die oben geschilderte Eigenschaft tatsächlich aufweist¹⁾. Sind nämlich D' und D'' zwei verschiedene, mit dem regulären Dreieck D kongruente Dreiecke, die eine Seite gemeinsam haben, und ist E das dem durch D' und D'' gebildeten Rhombus umschriebene Kreisbogenzweieck (vgl. Figur 1), so lässt sich D , das der Eilinie E eingeschrieben vorausgesetzt werden



Figur 1



Figur 2

darf, in der Tat in der vorgeschriebenen Weise in E herumführen; die beiden Scheitel der Kreisbogen von E spielen bei diesem Drehvorgang abwechselnd die Rolle des Drehzentrums. Im übrigen scheint das hier beschriebene Beispiel das einzige dieser Art zu sein.

2. Zweitens wollen wir feststellen, dass es beliebig viele Dreiecke D gibt, die unsere Eigenschaft sicher nicht aufweisen. Es sei D ein gleichschenkliges Dreieck. Der beim Mittelpunkt Z des Umkreises K von D gemessene Zentriwinkel des einem Schenkel zugeordneten Umkreisbogens sei α , und wir wollen voraussetzen, dass α mit π inkomensurabel ist. D kann dann unsere Eigenschaft nicht haben. In der Tat: Nehmen wir an, E sei eine D umschriebene von K verschiedene Eilinie der verlangten Art. Wir drehen nun D um den Umkreismittelpunkt Z der Reihe nach im positiven Sinn um die Winkel $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$ und bezeichnen die Drehbilder von D in gleicher Reihen-

¹⁾ Das nachfolgend angegebene Beispiel findet sich bei L. M. JAGLOM und W. G. BOLTJANSKI, *Konvexe Figuren* (Berlin 1956), S. 82.