

# Über Geraden in allgemeiner Lage

Autor(en): **Ringel, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **12 (1957)**

Heft 4

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19211>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

In unserem Fall ist, wenn  $v_B$  das Vorzeichen von  $B$  bedeutet,

$$U = \frac{1}{2} \left( A + C + v_B \sqrt{(A - C)^2 + B^2} \right) = \frac{p - q}{p},$$

$$V = \frac{1}{2} \left( A + C - v_B \sqrt{(A - C)^2 + B^2} \right) = pq + 1,$$

$$W = -g(x_M, z_M) = K - \frac{k^2 \Delta}{4(p - q)^2}.$$

$\Delta < 0$  (*Ellipse*):  $q - p$  und  $pq + 1$  müssen verschiedenes Vorzeichen haben. Da  $q > p > 0$ ,  $pq + 1 < 0$  unmöglich ist, gilt  $q - p < 0$ ,  $pq + 1 > 0$ . Hieraus folgt  $-1/p < q < p$ . Für  $W > 0$  ist die Ellipse reell.

$\Delta > 0$  (*Hyperbel*): In diesem Fall ist entweder  $q > p > 0$  oder  $q < -1/p < 0$ . Ist  $W \neq 0$ , so ist die durch (5) erzeugte Rotationsfläche je nach der Grösse von  $K$  ein einschaliges oder ein zweischaliges Hyperboloid. Ist  $W = 0$ , so liegen zwei reelle Geraden durch  $M$  vor, die einen Rotationskegel erzeugen.

$\Delta = 0$  (*Parabel*): a)  $q = p > 0$ . Bei Drehung des Koordinatensystems um den durch  $\operatorname{tg} \alpha = B/2A = -1/p$  bestimmten spitzen negativen Winkel  $\alpha$  geht (4) über in

$$2k \sqrt{p^2 + 1} \zeta = p(p^2 + 1) \xi^2 + p(k^2 - K). \quad (6)$$

Die Parabelachse fällt also mit der Rotationsachse zusammen. Ist  $k = 0$  und  $K > 0$ , so zerfällt (6) in zwei zur Rotationsachse parallele reelle Geraden, die einen Rotationszylinder erzeugen.

b)  $pq + 1 = 0$ ,  $q = -1/p$ . (4) erhält die Form

$$\left( z + \frac{1}{p} x - k \right)^2 = K.$$

Für  $K \geq 0$  sind das zwei parallele, zur Rotationsachse senkrechte Geraden, die zwei parallele Ebenen erzeugen.

E. TROST, Zürich

## Über Geraden in allgemeiner Lage

Endlich viele Geraden in der euklidischen oder projektiven Ebene, unter denen keine Parallelen vorkommen und von denen keine drei durch einen Punkt gehen, sind *Geraden in allgemeiner Lage*. Wir sagen auch, sie bilden eine *einfache Konfiguration*. In diesem Aufsatz soll über die wenigen bekannten Eigenschaften solcher einfacher Konfigurationen und der durch diese hervorgerufenen Teilungen der Ebene in Gebiete (Zellen) berichtet werden.

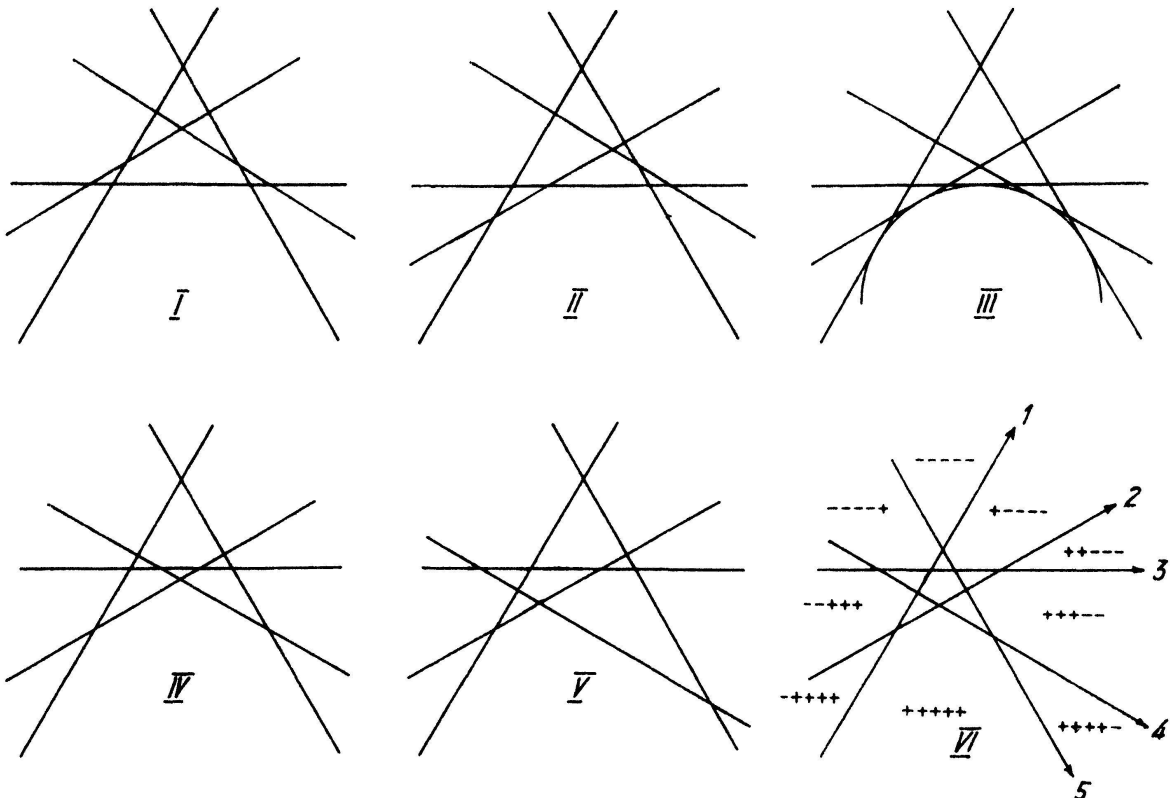
Bereits im Jahre 1826 zeigte J. STEINER<sup>1)</sup>, dass  $m$  Geraden in allgemeiner Lage die euklidische Ebene in  $\binom{m+1}{2} + 1$  Zellen zerlegen, von denen  $2m$  unbeschränkt sind. Dies ergibt sich leicht durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Geraden. Wir nehmen die Aussage für eine einfache Konfiguration  $\mathfrak{R}$  mit  $m$  Geraden bereits

<sup>1)</sup> J. STEINER, *Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes*, Crelles J. reine angew. Math. 1, 349–364 (1826), oder Gesammelte Werke I, S. 77–94 (Berlin 1881).

als bewiesen an und fügen eine weitere Gerade  $g$  hinzu, die mit den  $m$  Geraden je einen Schnittpunkt hat. Diese  $m$  Schnittpunkte zerlegen  $g$  in zwei Halbstrahlen und  $m - 1$  Strecken. Jede dieser Strecken sowie jeder dieser Halbstrahlen zerlegt eine Zelle von  $\mathfrak{R}$  in zwei neue Zellen. Die Zellenzahl nimmt also um  $m + 1$  zu. Es ergibt sich für  $m + 1$  Geraden in der Tat die Zellenzahl

$$\binom{m+1}{2} + 1 + m + 1 = \binom{m+2}{2} + 1.$$

In einem Buch von v. STAUDT<sup>2)</sup> steht die Bemerkung, dass  $m$  Geraden in allgemeiner



Figur 1

Lage die projektive Ebene in  $\binom{m}{2} + 1$  Zellen zerlegen. Wenn man eine einfache Konfiguration mit den Geraden  $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$  kollinear so transformiert, dass eine Gerade – etwa  $g_0$  – in die unendlich ferne Gerade fällt, so wird die Teilung der projektiven Ebene durch die Geraden  $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$  identisch mit der Teilung der euklidischen Ebene durch die Geraden  $g_1, \dots, g_{m-1}$ . So ergibt sich aus der Anzahlformel von STEINER diejenige von v. STAUDT.

Bei F. LEVI<sup>3)</sup> findet sich unter anderem ein Satz, der hier erwähnt sei: Jede Gerade einer einfachen Konfiguration in der projektiven Ebene ist zu mindestens drei Dreiecken benachbart. Hierbei heisst eine Gerade  $g$  zu einer Zelle  $\zeta$  benachbart, wenn  $g$  und  $\zeta$  eine Strecke gemeinsam haben. Zwei Zellen gelten als benachbart, wenn sie eine Strecke (oder einen Halbstrahl) als gemeinsamen Rand besitzen.

<sup>2)</sup> G. K. CHR. v. STAUDT, *Geometrie der Lage* (Nürnberg 1847), § 13.

<sup>3)</sup> F. LEVI, *Die Teilung der projektiven Ebene durch Gerade oder Pseudogerade*, Ber. math.-phys. Klasse sächs. Akad. Wiss. Leipzig 78, 256–267 (1926).

Wir nennen zwei einfache Konfigurationen  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{R}'$  mit je  $m$  Geraden *äquivalent*, wenn die Menge der Zellen von  $\mathfrak{R}$  eindeutig derart auf die Menge der Zellen von  $\mathfrak{R}'$  abgebildet werden kann, dass benachbarten Zellen von  $\mathfrak{R}$  stets wieder benachbarte Zellen von  $\mathfrak{R}'$  entsprechen. Wenn wir zunächst nur den Fall der euklidischen Ebene betrachten, so ergibt sich, dass alle einfachen Konfigurationen mit vier Geraden untereinander äquivalent sind. Bei fünf Geraden gibt es bereits nichtäquivalente Konfigurationen. In Figur 1 sind alle 6 Möglichkeiten aufgezählt. Dass zum Beispiel die beiden Teilungen I und II nicht äquivalent sind, erkennt man daraus, dass einmal 4 und einmal nur 3 Dreiecke auftreten. Eine allgemeine Formel für die Anzahl  $A_m$  der Klassen nichtäquivalenter einfacher Konfigurationen mit  $m$  Geraden ist nicht bekannt und dürfte schwierig zu finden sein. Für  $m \leq 7$  sind diese Anzahlen  $A_m$  durch R. KLEE<sup>4)</sup> bestimmt worden. In recht mühevoller Weise fand er die Werte

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1, \quad A_5 = 6, \quad A_6 = 43, \quad A_7 = 922.$$

Im Falle der projektiven Ebene fand R. KLEE für die Anzahl  $P_m$  der Klassen nichtäquivalenter einfacher Konfigurationen mit  $m$  Geraden die Werte

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 1, \quad P_6 = 4, \quad P_7 = 11.$$

Wenn wir in einer einfachen Konfiguration  $\mathfrak{R}$  eine Gerade  $g$  derart verschieben (nicht notwendig parallel zu sich selbst, aber doch so, dass in keinem Zwischenstadium die Gerade  $g$  zu einer anderen Geraden von  $\mathfrak{R}$  parallel ist), dass kein Schnittpunkt von  $\mathfrak{R}$  überstrichen wird, so entsteht natürlich wieder eine zu  $\mathfrak{R}$  äquivalente einfache Konfiguration. Eine solche Operation nennen wir eine *0-Verschiebung*. Entsprechend soll das « Hinwegschieben » einer Geraden über genau einen Schnittpunkt von  $\mathfrak{R}$  eine *1-Verschiebung* heissen. In Figur 1 sind zum Beispiel II aus I, III aus II, IV aus III usw. durch jeweils eine 1-Verschiebung entstanden. Das Spiegelbild einer einfachen Konfiguration  $\mathfrak{R}$  liefert wieder eine zu  $\mathfrak{R}$  äquivalente einfache Konfiguration. Durch 0-Verschiebungen und Spiegelung erhält man also immer äquivalente einfache Konfigurationen. Wir vermuten, dass auch umgekehrt zwei äquivalente einfache Konfigurationen durch mehrmalige Anwendung von 0-Verschiebungen und durch eventuell eine Spiegelung aufeinander zurückgeführt werden können. Leider konnte dies bisher noch nicht bewiesen werden.

Ein Halbkreis sei durch  $m$  Punkte in  $m+1$  gleich grosse Kreisbögen zerlegt. Wenn wir in jedem dieser  $m$  Punkte eine Tangente an den Halbkreis errichten, so erhalten wir eine leicht zu überblickende einfache Konfiguration von  $m$  Geraden. Wir nennen sie die *Standardkonfiguration*. Figur 1 III ist ein Beispiel für  $m=5$ . Wir beweisen jetzt

**Satz 1.** *Durch mehrmalige Anwendung von 0- und 1-Verschiebungen kann man aus jeder einfachen Konfiguration mit  $m$  Geraden jede andere einfache Konfiguration mit  $m$  Geraden herstellen.*

*Beweis.* Zwei verschiedene Standardkonfigurationen  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$  mit je  $m$  Geraden, deren zugehörige Halbkreisradien gleich gross sind, sind kongruente geometrische

<sup>4)</sup> R. KLEE, *Über die einfachen Konfigurationen der euklidischen und projektiven Ebene* (Focken und Oltmanns, Dresden 1938).

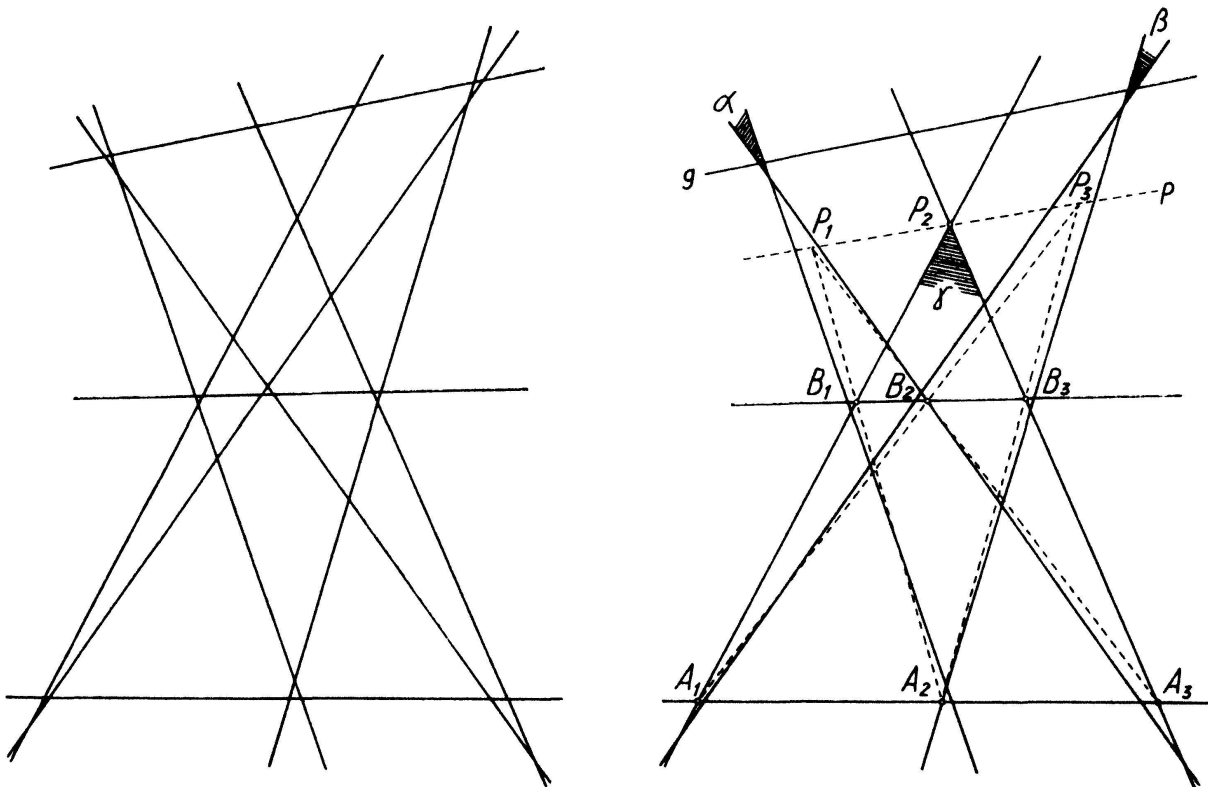
Figuren. Man kann eine passende Drehung der ganzen Figur  $\mathfrak{S}_1$  um den Mittelpunkt des zugehörigen Halbkreises durchführen und dann durch eine Parallelverschiebung  $\mathfrak{S}_1$  mit  $\mathfrak{S}_2$  zur Deckung bringen. Die genannte Drehung der Figur  $\mathfrak{S}_1$  kann man aber auch erhalten, indem man nacheinander jeweils immer nur eine Gerade ein Stückchen weiterbewegt. Ebenso kann man die darauffolgende Parallelverschiebung aus lauter 0-Verschiebungen stückweise zusammensetzen. Durch endlich viele 0-Verschiebungen kann man also  $\mathfrak{S}_1$  in  $\mathfrak{S}_2$  überführen. Zum Beweis von Satz 1 bleibt daher nur noch zu zeigen, dass man jede beliebige einfache Konfiguration  $\mathfrak{R}$  durch 0- und 1-Verschiebungen in eine Standardkonfiguration überführen kann, deren zugehöriger Halbkreisradius  $r$  fest vorgegeben ist. Zu diesem Zwecke wählen wir in einer unbeschränkten Zelle  $\zeta$  von  $\mathfrak{R}$  derart einen Punkt  $M$ , dass die Kreisscheibe  $k$  mit dem vorgegebenen Radius  $r$  um diesen Punkt  $M$  als Mittelpunkt noch ganz im Inneren von  $\zeta$  liegt. Mit Hilfe einer kleinen 0-Verschiebung einer Geraden  $g_1$  von  $\mathfrak{R}$  erreichen wir, dass alle Verbindungsstrecken je zweier Schnittpunkte von  $\mathfrak{R}$ , die nicht auf  $g_1$  liegen, nicht zu  $g_1$  parallel sind. Nun verschieben wir die Gerade  $g_1$  parallel zu sich selbst in Richtung auf  $k$ , bis sie Tangente von  $k$  ist. Hierbei werden niemals zwei Schnittpunkte von  $\mathfrak{R}$  gleichzeitig überstrichen, so dass die besagte Parallelverschiebung von  $g_1$  aus lauter 1-Verschiebungen zusammengesetzt ist. In derselben Weise kann man nacheinander alle Geraden von  $\mathfrak{R}$  durch 0- und 1-Verschiebungen zu Tangenten von  $k$  werden lassen. Die  $m$  Berührungspunkte dieser  $m$  Tangenten liegen alle auf einem Halbkreis von  $k$ . Man kann jetzt diese Tangenten als Tangenten von  $k$  schrittweise nacheinander noch so verschieben (Drehungen um  $M$ ), dass schliesslich eine Standardkonfiguration entsteht. Satz 1 ist hiermit bewiesen.

Die bei einer einzelnen 1-Verschiebung entstehende Veränderung der Zellzerlegung der Ebene durch  $\mathfrak{R}$  kann man leicht überblicken. Ein Dreieck  $\delta$  geht in ein neues Dreieck über, wobei es alle drei Nachbarzellen wechselt. Sonst bleiben die Zellen in ihren Nachbarbeziehungen unverändert. Zu jeder 1-Verschiebung gehört ein Dreieck  $\delta$ , so dass die 1-Verschiebung darin besteht, dass eine Seitengerade von  $\delta$  über den gegenüberliegenden Eckpunkt von  $\delta$  hinweggeschoben wird. Es scheint nun plausibel, dass auch umgekehrt zu einem vorgegebenen Dreieck  $\delta$  in einer einfachen Konfiguration eventuell unter Zuhilfenahme einiger passender 0-Verschiebungen stets auch eine zu  $\delta$  gehörige 1-Verschiebung ausführbar ist. Der Umstand, dass dies indessen nicht richtig ist, ist einer der Gründe, warum die Aufzählung der Äquivalenzklassen der einfachen Konfigurationen so schwierig ist. Für den genannten Sachverhalt geben wir ein Beispiel an.

Wir behaupten, dass in der durch Figur 2 dargestellten einfachen Konfiguration mit 9 Geraden die Gerade  $g$  nicht über den Schnittpunkt  $P_2$  hinweggeschoben werden kann, auch wenn man vorher beliebige 0-Verschiebungen ausführt. Zum Beweise betrachten wir die 6 Punkte  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  (Figur 3). Die Verbindungsgerade zweier Punkte  $P$  und  $Q$  bezeichnen wir mit  $(P, Q)$ . Dann ist  $P_2$  der Schnittpunkt der Geraden  $(A_1, B_1)$  und  $(A_3, B_3)$ . Mit  $P_1$  bzw.  $P_3$  sei der Schnittpunkt der Geraden  $(A_3, B_2)$  und  $(A_2, B_1)$  bzw. der Geraden  $(A_2, B_3)$  und  $(A_1, B_2)$  bezeichnet (Figur 3). Nach dem Satz von PAPPUS-PASCAL liegen die drei Punkte  $P_1, P_2, P_3$  auf einer Geraden  $\phi$ , die die Ebene in zwei Halbebenen zerlegt. Die beiden in Figur 3 schraffierten Gebiete  $\alpha$  und  $\beta$  liegen auf derselben von  $\phi$  erzeugten Halbebene. Wenn es nun möglich wäre, die Gerade  $g$  mit einer 1-Verschiebung über den Punkt  $P_2$  so zu

rücken, so müsste eine Gerade  $g'$  existieren, die je einen Punkt aus dem Innern von  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  enthält. Durch die drei Geraden  $(P_2, A_1)$ ,  $(P_2, A_3)$  und  $p$  wird die Ebene in 6 Gebiete zerlegt. Mit 5 von diesen 6 Gebieten würde diese Gerade  $g'$  innere Punkte gemeinsam haben. Dies ist jedoch unmöglich. Durch die sozusagen «unsichtbare» Pascal-Gerade  $p$  wird also die Möglichkeit einer 1-Verschiebung der Geraden über den Punkt  $P_2$  vereitelt.

Die durch eine einfache Konfiguration  $\mathfrak{R}$  hervorgerufene Zellzerlegung der Ebene lässt sich in folgender Weise kombinatorisch beschreiben. Es seien  $g_1, g_2, \dots, g_m$  die



Figur 2

Figur 3

Geraden von  $\mathfrak{R}$  und  $\zeta_i$  [ $i = 1, 2, \dots, \binom{m+1}{2} + 1$ ] die Zellen, in die die Ebene durch  $\mathfrak{R}$  zerlegt wird. Jede Gerade  $g_k$  sei willkürlich mit einer Richtung (Orientierung) versehen. Man kann dann in bezug auf jedes  $g_k$  von einer linken und einer rechten Halbebene sprechen. Der betrachteten einfachen Konfiguration ordnen wir sodann die Matrix  $S = (e_{ik})$  zu, wobei  $e_{ik} = +1$  oder  $-1$  zu setzen ist, je nachdem die Zelle  $\zeta_i$  rechts oder links von der Geraden  $g_k$  liegt. Hierbei sei  $k$  der Spaltenindex, so dass jede Zelle durch eine Zeile von  $S$  repräsentiert wird. Die Zeilen von  $S$  schreiben wir wie Vektoren der Länge  $m$ , zum Beispiel  $\mathfrak{z} = \{-1, -1, +1, +1, -1\}$ ,  $-\mathfrak{z} = \{+1, +1, -1, -1, +1\}$  oder kürzer  $\mathfrak{z} = \{- - + + -\}$ . In Figur 1 VI ist eine solche Beschreibung der Zellen durch Zeilen angedeutet. Zwei Zeilen, die sich nur in einer einzigen Komponente unterscheiden, nennen wir *benachbarte* Zeilen. Es ist klar, dass benachbarten Zellen benachbarte Zeilen entsprechen und umgekehrt. Wenn wir in einer Geraden  $g_k$  von  $\mathfrak{R}$  die Orientierung ändern, so haben wir gleichzeitig in der Matrix die  $k$ -te Spalte mit  $-1$  zu multiplizieren. Das Vertauschen zweier Geraden

in  $\mathfrak{R}$  entspricht dem Vertauschen zweier Spalten von  $S$ . Zwei Matrizen, die man durch mehrmaliges Ausführen der drei Operationen,

Vertauschen zweier Zeilen,  
Vertauschen zweier Spalten,  
Multiplikation einer Spalte mit  $-1$ ,

zur Übereinstimmung bringen kann, mögen *äquivalent* heißen. Wir beweisen

**Satz 2.** *Zwei einfache Konfigurationen  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{R}'$  sind dann und nur dann äquivalent, wenn die zugehörigen Matrizen  $S$  und  $S'$  äquivalent sind.*

Die Matrizen  $S$  und  $S'$  zweier einfacher Konfigurationen  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{R}'$  seien äquivalent, das heißt, durch Umnummerierung der Spalten und Zeilen von  $S'$  und durch Multiplikation gewisser Zeilen von  $S'$  mit  $-1$  kann man  $S$  und  $S'$  identisch werden lassen. Wir numerieren die Zellen und Geraden von  $\mathfrak{R}'$  entsprechend. Ebenso sei die Orientierung der Geraden von  $\mathfrak{R}'$  passend gewählt. Nun ist also  $S$  identisch mit der zu  $\mathfrak{R}'$  gehörigen Matrix  $S'$ . Wir bilden die Zellen von  $\mathfrak{R}$  auf die Zellen von  $\mathfrak{R}'$  ab, indem wir Zellen mit derselben zugehörigen Zeile aufeinander abbilden. Benachbarte Zellen von  $\mathfrak{R}$  gehören dann zu benachbarten Zeilen von  $S = S'$ , somit auch zu benachbarten Zellen von  $\mathfrak{R}'$ .

Wenn umgekehrt  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{R}'$  zwei äquivalente einfache Konfigurationen sind, so gibt es eine Abbildungsvorschrift  $\varphi$ , die jeder Zeile von  $\mathfrak{R}$  eine Zelle von  $\mathfrak{R}'$  zuordnet, wobei benachbarte Zellen in benachbarte Zellen übergehen. Da eine Strecke bzw. ein Halbstrahl von  $\mathfrak{R}$  eindeutig als gemeinsame Grenze zweier benachbarter Zellen und ein Schnittpunkt von  $\mathfrak{R}$  durch die vier umliegenden Zellen eindeutig bestimmt ist, so ist durch  $\varphi$  auch eine Abbildungsvorschrift für die Schnittpunkte, Strecken, Halbstrahlen und Zellen von  $\mathfrak{R}$  auf die Schnittpunkte, Strecken, Halbstrahlen und Zellen von  $\mathfrak{R}'$  gegeben. Natürlich sind hierbei inzidente Elemente von  $\mathfrak{R}$  auf inzidente Elemente von  $\mathfrak{R}'$  abgebildet. Ausserdem ist klar, dass die Strecken und Halbstrahlen einer Geraden  $g$  von  $\mathfrak{R}$  auf diejenige einer Geraden  $g'$  von  $\mathfrak{R}'$  abgebildet sind. Auch entsprechen die Zellen von  $\mathfrak{R}$ , die zu einer Halbebene bezüglich  $g$  gehören, den Zellen einer Halbebene bezüglich  $g'$  in  $\mathfrak{R}'$ . Die Repräsentation einer Zelle von  $\mathfrak{R}$  durch eine Zeile von  $S$  bedeutet aber nichts anderes als die Darstellung der Zelle als Durchschnitt von  $m$  Halbebenen. Daher sind die Matrizen  $S$  und  $S'$  äquivalent.

In einer einfachen Konfiguration  $\mathfrak{R}$  ist jede Gerade  $g_i$  durch die  $m - 1$  anderen Geraden in  $m - 2$  Strecken und zwei Halbstrahlen  $h_i$  und  $\bar{h}_i$  zerlegt. Der Rand einer unbeschränkten Zelle  $\zeta$  von  $\mathfrak{R}$  enthält stets zwei solche Halbstrahlen, etwa  $h_1$  und  $h_2$ . Zu diesem  $\zeta$  gibt es sodann eine «gegenüberliegende» unbeschränkte Zelle  $\bar{\zeta}$ , nämlich diejenige, die durch  $\bar{h}_1$  und  $\bar{h}_2$  (und eventuell einigen Strecken) begrenzt ist. Wenn  $\mathfrak{z}$  bzw.  $\bar{\mathfrak{z}}$  die dieser Zelle  $\zeta$  bzw.  $\bar{\zeta}$  entsprechende Zeile der Matrix  $S$  ist, so gilt  $\bar{\mathfrak{z}} = -\mathfrak{z}$ . Ist nämlich  $P$  ein Punkt von  $\zeta$  und  $\bar{P}$  ein Punkt von  $\bar{\zeta}$ , so wird die Verbindungsstrecke  $P\bar{P}$  durch alle Geraden von  $\mathfrak{R}$  geschnitten.  $P$  und  $\bar{P}$  liegen somit in bezug auf jede Gerade von  $\mathfrak{R}$  auf zwei verschiedenen Halbebenen. Nun sei  $\alpha$  eine beschränkte Zelle und  $\mathfrak{a}$  die zugehörige Zeile in  $S$ . Zu jedem Punkt  $Q$  der Ebene gibt es dann mindestens eine Gerade von  $\mathfrak{R}$ , für die  $Q$  und  $\alpha$  auf derselben Halbebene liegen. Daher kommt in der Matrix  $S$  die Zeile  $-\mathfrak{a}$  bestimmt nicht vor. Wenn  $S$  eine beliebige Matrix ist, so wollen wir mit  $U(S)$  die Menge aller Zeilen  $\mathfrak{x}$  von  $S$  verstehen, für die

auch die reziproke Zeile  $-x$  in  $S$  vorkommt. Wenn also  $S$  die zu einer einfachen Konfiguration gehörige Matrix ist, so sind die unbeschränkten Zellen genau durch die Zeilen von  $U(S)$  repräsentiert.

**Satz 3.** Die zu einer einfachen Konfiguration  $\mathfrak{R}$  gehörige Matrix  $S$  hat die folgenden drei Eigenschaften:

I. Wenn man in  $S$  alle bis auf 3 Spalten streicht, so bleiben genau 7 verschiedene Zeilen übrig.

II. Wenn man in  $U(S)$  alle bis auf 3 Spalten streicht, so bleiben genau 6 verschiedene Zeilen übrig.

III. Die Matrix  $S$  ist in bezug auf die Eigenschaft I maximal, das heisst, wenn man eine in  $S$  noch nicht vorkommende Zeile zu  $S$  hinzufügt, so geht die Eigenschaft I verloren.

*Beweis zu I.* Wenn wir in  $\mathfrak{R}$  eine Gerade  $g$  entfernen, so entsteht eine einfache Konfiguration  $\mathfrak{R}'$  mit  $m - 1$  Geraden, deren zugehörige Matrix  $S'$  findet man aus  $S$  durch Streichen der zu  $g$  gehörigen Spalte; danach hat man alle etwa doppelt vorkommenden Zeilen nur einmal zu zählen. Streicht man also nacheinander  $m - 3$  beliebige Zeilen aus  $S$ , so erhält man eine durch 3 Geraden realisierbare Matrix. Diese hat genau 7 verschiedene Zeilen, weil drei Geraden in allgemeiner Lage die Ebene in 7 Zellen zerlegen.

*Beweis zu II.* Wir bezeichnen die Matrix, die beim Streichen der letzten Spalte aus  $S$  bzw.  $U(S)$  entsteht, mit  $S'$  bzw.  $U(S)'$ . Durch Entfernen der letzten Geraden von  $\mathfrak{R}$  entstehe die einfache Konfiguration  $\mathfrak{R}'$ , so dass  $S'$  die zu  $\mathfrak{R}'$  gehörige Matrix ist. In jeder unbeschränkten Zelle von  $\mathfrak{R}'$  liegt eine unbeschränkte Zelle von  $\mathfrak{R}$ , das heisst, die Zeilen von  $U(S')$  sind in  $U(S)$  enthalten. Wenn  $x$  eine Zeile von  $S$  ist, so sei mit  $x'$  diejenige Zeile bezeichnet, die durch Weglassen der letzten Komponente aus  $x$  entsteht. Ist  $a$  eine Zeile von  $U(S)'$ , so existiert eine Zeile  $b$  aus  $U(S)$  mit  $b' = a$ . Aus  $b \in U(S)$  folgt der Reihe nach:

$$b, -b \in S; \quad b', (-b)' \in S'; \quad b', -b' \in S'; \quad a, -a \in S'; \quad a \in U(S').$$

Also ist auch umgekehrt jede Zeile von  $U(S)'$  in  $U(S)$  enthalten, das heisst  $U(S)$  und  $U(S)'$  sind identische Matrizen (bis auf die Reihenfolge der Zeilen). Werden in  $U(S)$  zwei Spalten gestrichen, etwa die beiden letzten, so folgt

$$U(S)'' = [U(S)']' = U(S)' = U(S'').$$

Ganz allgemein entsteht also aus  $U(S)$  beim Streichen von  $s$  beliebigen Spalten eine Matrix  $U(S)^{(s)} = U(S^{(s)})$ , wobei  $S^{(s)}$  durch Streichen von  $s$  Spalten aus  $S$  hervorgeht. Setzt man  $s = m - 3$ , so wird  $U(S)^{(m-3)} = U(S^{(m-3)})$ . Hierbei ist  $S^{(m-3)}$  wegen Eigenschaft I eine Matrix mit 7 Zeilen.  $U(S)^{(m-3)}$  hat daher genau 6 Zeilen. Hiermit ist die Eigenschaft II bewiesen.

*Zu III.* Der Beweis der Eigenschaft III würde hier zu viel Platz erfordern. Er ist durchgeführt in einer ausführlichen Arbeit des Verfassers<sup>5)</sup>.

Alle Matrizen  $S$ , die zu einer einfachen Konfiguration mit  $m$  Geraden gehören, kombinatorisch zu kennzeichnen, ist eine ungelöste Frage. Wiederum ist der durch das Beispiel von Figur 2 geschilderte Umstand ein grosses Hindernis. Man kann

<sup>5)</sup> G. RINGEL, *Teilungen der Ebene durch Geraden oder topologische Geraden*, Math. Z. 64, 79–102 (1956).



diese Schwierigkeit umgehen, wenn man die einfachen Konfigurationen wie F. LEVI in folgender Weise verallgemeinert:

Wenn wir in einer Geraden eine endliche Teilstrecke durch einen einfachen Bogen ersetzen, der mit den beiden restlichen Halbstrahlen der Geraden je nur den betreffenden Endpunkt gemeinsam hat, so nennen wir die entstandene Kurve eine *Pseudogerade*. Eine Pseudogerade ist sozusagen eine «verbogene» Gerade. Wir sagen,  $m$  Pseudogeralden bilden eine einfache Konfiguration, wenn sich je zwei in genau einem Punkte schneiden und diese Schnittpunkte alle verschieden sind. Nun ist es stets möglich, eine 1-Verschiebung in bezug auf ein vorgegebenes Dreieck durchzuführen. Der Satz 3 gilt natürlich auch für einfache Konfigurationen mit Pseudogeralden. Ja, es gilt sogar der viel schärfere

**Satz 4.** *Notwendig und hinreichend dafür, dass eine rechteckige Matrix  $S$  mit  $m$  Spalten, deren Elemente gleich  $+1$  oder  $-1$  sind, zu einer einfachen Konfiguration von Pseudogeralden gehört, ist die gleichzeitige Gültigkeit der drei Bedingungen I, II, III von Satz 3, wenn  $m \neq 4$  vorausgesetzt ist.*

Der Beweis zu Satz 4 ist recht langwierig und kann hier nicht gegeben werden. Er findet sich in der bereits zitierten Arbeit<sup>5)</sup>. Dort ist auch das einzige Gegenbeispiel im Falle  $m = 4$  angegeben: Eine Matrix mit 4 Spalten und 15 Zeilen, die die drei Eigenschaften I, II, III besitzt und doch nicht durch 4 Geraden (oder Pseudogeralden) realisierbar ist.

G. RINGEL, Bonn

## Kleine Mitteilungen

### Quelques propriétés de coordonnées relatives à un triangle

Etant donné un triangle  $ABC$  quelconque, prenons sur les côtés  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  des points  $C'$ ,  $A'$ ,  $B'$  tels que  $\overline{AC'} = r \cdot \overline{AB}$ ,  $\overline{BA'} = s \cdot \overline{BC}$ ,  $\overline{CB'} = t \cdot \overline{CA}$ . Les droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  déterminent un nouveau triangle  $A''B''C''$  dont on calcule aisément l'aire  $V$ :

$$V = V_0 \frac{[(1-r)(1-s)(1-t) - rst]^2}{(1-s+sr)(1-r+rt)(1-t+ts)} \quad (V_0 = \text{aire } ABC).$$

Lorsque

$$rst = (1-r)(1-s)(1-t), \quad (1)$$

les trois points  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  se confondent en un point  $P$ . On peut alors considérer les valeurs  $r$ ,  $s$ ,  $t$  comme des coordonnées triangulaires du point  $P$  par rapport au triangle  $ABC$ . Tout point  $P$  a des coordonnées bien déterminées, sauf les sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  qui correspondent aux valeurs  $(0, s, 1)$ ,  $(1, 0, t)$ ,  $(r, 1, 0)$  ( $r, s, t$  quelconques). Inversement, si on se donne deux des trois valeurs, on détermine univoquement le point  $P$ , exception faite des sommets et des côtés du triangle. On peut dire que les coordonnées  $(r, s, t)$  engendrent une transformation birationnelle du plan du triangle sur la surface du troisième degré  $x \cdot y \cdot z = (1-x) \cdot (1-y) \cdot (1-z)$ , les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  étant singuliers.

Si l'on se donne 3 valeurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , vérifiant (1), et un triangle quelconque (non numéroté), on pourra trouver 12 points ayant ces trois nombres pour coordonnées (dans un ordre quelconque), par rapport au triangle  $ABC$  ou  $ACB$ ; si l'on choisit une des orientations du triangle, on aura les 12 points:

$$D(a, b, c); \quad E(b, c, a); \quad F(c, a, b); \quad G(1-a, 1-c, 1-b);$$

$$H(1-c, 1-b, 1-a); \quad J(1-b, 1-a, 1-c);$$