

Eine charakteristische Eigenschaft der Rotationsflächen zweiten Grades

Autor(en): **Trost, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **12 (1957)**

Heft 4

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19210>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XII Nr. 4 Seiten 73–96 Basel, 10. Juli 1957

Eine charakteristische Eigenschaft der Rotationsflächen zweiten Grades

Herr W. BLASCHKE hat kürzlich folgenden schönen Satz bewiesen¹⁾: Die einzigen Eiflächen, auf denen die Schattengrenzen bei Parallelbeleuchtung eben sind, sind die Ellipsoide. Überlegt man sich einen Beweis dieses Satzes für den Spezialfall rotations-symmetrischer Flächen, so erhält man folgendes Resultat: *Die einzigen Rotationsflächen, auf denen die Schattengrenzen bei Parallelbeleuchtung eben sind, entstehen durch Drehung eines (eigentlichen oder uneigentlichen) Kegelschnitts um eine seiner Achsen.* Dass die Eigenschattengrenze einer solchen Rotationsfläche zweiten Grades eben, also selbst ein Kegelschnitt ist, ist eine bekannte Tatsache, die sogar bei einer im Endlichen liegenden Lichtquelle gilt. Die Umkehrung scheint hingegen weniger bekannt zu sein. Die folgende Darstellung lässt sich aber vielleicht in jedem Fall dadurch rechtfertigen, dass sie ein sinnvolles, im Unterricht verwertbares Beispiel für die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades gibt. Der Formalismus dieser Diskussion wird als bekannt vorausgesetzt²⁾.

Wir benutzen das in der Darstellenden Geometrie gebräuchliche, in der Aufriss-ebene π_2 liegende Koordinatensystem x, z . Die Lichtstrahlen sollen senkrecht von oben, also parallel zur z -Achse einfallen. Die Gleichung der Rotationsachse sei $z = p x$. Die Fälle $p = 0$ und $p = \infty$ können als trivial beiseite gelassen werden. Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p > 0$ annehmen. $z = f(x)$ sei die Gleichung der Meridiankurve, die als differenzierbar vorausgesetzt wird.

Zwei zu π_2 symmetrische, im Aufriss in einen Punkt $P_2(x_2; z_2)$ zusammenfallende Punkte der Eigenschattengrenze erhält man nach der «Kugelmethode» in folgender Weise: $P_0(x_0; f(x_0))$ sei ein Punkt der Meridiankurve. Die Kurvennormale in P_0 schneide $z = p x$ im Punkt $P_1(x_1; z_1)$. Dann schneidet die Horizontale $z = z_1$ das Lot von P_0 auf $z = p x$ im gesuchten Punkte P_2 . Man erhält

$$x_1 = \frac{x_0 + f(x_0) f'(x_0)}{1 + p f'(x_0)}, \quad z_1 = z_2 = \frac{p(x_0 + f(x_0) f'(x_0))}{1 + p f'(x_0)},$$

¹⁾ Math. Nachr. 15, 258 (1956).

²⁾ Vergleiche etwa L. LOCHER-ERNST, *Differential- und Integralrechnung* (Birkhäuser Verlag, Basel 1948), S. 477–483.

$$x_2 = \frac{x_0 (1 - p^2 + p f'(x_0)) + p f(x_0)}{1 + p f'(x_0)}.$$

Soll die Eigenschaftengrenze eben sein, so müssen die Punkte P_2 auf einer Geraden $z = q x + k$ liegen. Setzen wir für $x_0, f(x_0), f'(x_0)$ wieder x, z, z' , so ergibt sich nach einiger Umformung die Differentialgleichung

$$z' (z - q x - k) = q z + \frac{q - p - p^2 q}{p} x + \frac{k}{p}. \quad (1)$$

Durch die Substitution $u = z - q x - k, u' = z' - q$ geht (1) über in

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{du^2}{dx} = u u' = \frac{(q - p)(p q + 1)}{p} x + \frac{k(p q + 1)}{p}. \quad (2)$$

Die Integration von (2) liefert

$$(z - q x - k)^2 = \frac{(q - p)(p q + 1)}{p} x^2 + \frac{2 k(p q + 1)}{p} x + K, \quad (3)$$

wo K eine Integrationskonstante ist. (3) erhält nach Umformung die Form der allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$g(x, z) \equiv A x^2 + B x z + C z^2 + D x + E z + F = 0, \quad (4)$$

wobei

$$A = \frac{p - q + p^2 q}{p}, \quad B = -2 q, \quad C = 1, \quad D = -\frac{2 k}{p},$$

$$E = -2 k, \quad F = k^2 - K.$$

Die Diskriminante von (4) hat den Wert

$$\Delta = B^2 - 4 A C = \frac{4 (q - p)(p q + 1)}{p}.$$

Es sei zunächst $\Delta \neq 0$. Der Mittelpunkt M des durch (4) dargestellten Kegelschnitts hat die Koordinaten

$$x_M = \frac{1}{\Delta} (2 C D - B E) = \frac{k}{p - q}, \quad z_M = \frac{1}{\Delta} (2 A E - B D) = \frac{k p}{p - q}.$$

M liegt wegen $z_M = p x_M = q x_M + k$ sowohl auf der Rotationsachse als auch in der Ebene der Schattengrenze. Für die Richtungen m_1, m_2 der Achsen von (4) erhält man aus

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 m}{1 - m^2} = \frac{B}{A - C} = \frac{2 p}{1 - p^2}$$

die Werte $m_1 = p$ und $m_2 = -1/p$. Damit ist gezeigt, dass die Rotationsachse $z = p x$ eine Achse des Kegelschnitts ist. Sie sei die ξ -Achse eines (ξ, ζ) -Koordinatensystems mit dem Ursprung in M . In diesem System hat die Meridiankurve eine Gleichung von der Form

$$U \xi^2 + V \zeta^2 = W. \quad (5)$$

In unserem Fall ist, wenn v_B das Vorzeichen von B bedeutet,

$$U = \frac{1}{2} \left(A + C + v_B \sqrt{(A - C)^2 + B^2} \right) = \frac{p - q}{p},$$

$$V = \frac{1}{2} \left(A + C - v_B \sqrt{(A - C)^2 + B^2} \right) = pq + 1,$$

$$W = -g(x_M, z_M) = K - \frac{k^2 \Delta}{4(p - q)^2}.$$

$\Delta < 0$ (*Ellipse*): $q - p$ und $pq + 1$ müssen verschiedenes Vorzeichen haben. Da $q > p > 0$, $pq + 1 < 0$ unmöglich ist, gilt $q - p < 0$, $pq + 1 > 0$. Hieraus folgt $-1/p < q < p$. Für $W > 0$ ist die Ellipse reell.

$\Delta > 0$ (*Hyperbel*): In diesem Fall ist entweder $q > p > 0$ oder $q < -1/p < 0$. Ist $W \neq 0$, so ist die durch (5) erzeugte Rotationsfläche je nach der Grösse von K ein einschaliges oder ein zweischaliges Hyperboloid. Ist $W = 0$, so liegen zwei reelle Geraden durch M vor, die einen Rotationskegel erzeugen.

$\Delta = 0$ (*Parabel*): a) $q = p > 0$. Bei Drehung des Koordinatensystems um den durch $\operatorname{tg} \alpha = B/2A = -1/p$ bestimmten spitzen negativen Winkel α geht (4) über in

$$2k\sqrt{p^2 + 1}\zeta = p(p^2 + 1)\xi^2 + p(k^2 - K). \quad (6)$$

Die Parabelachse fällt also mit der Rotationsachse zusammen. Ist $k = 0$ und $K > 0$, so zerfällt (6) in zwei zur Rotationsachse parallele reelle Geraden, die einen Rotationszylinder erzeugen.

b) $pq + 1 = 0$, $q = -1/p$. (4) erhält die Form

$$\left(z + \frac{1}{p}x - k \right)^2 = K.$$

Für $K \geq 0$ sind das zwei parallele, zur Rotationsachse senkrechte Geraden, die zwei parallele Ebenen erzeugen.

E. TROST, Zürich

Über Geraden in allgemeiner Lage

Endlich viele Geraden in der euklidischen oder projektiven Ebene, unter denen keine Parallelen vorkommen und von denen keine drei durch einen Punkt gehen, sind *Geraden in allgemeiner Lage*. Wir sagen auch, sie bilden eine *einfache Konfiguration*. In diesem Aufsatz soll über die wenigen bekannten Eigenschaften solcher einfacher Konfigurationen und der durch diese hervorgerufenen Teilungen der Ebene in Gebiete (Zellen) berichtet werden.

Bereits im Jahre 1826 zeigte J. STEINER¹⁾, dass m Geraden in allgemeiner Lage die euklidische Ebene in $\binom{m+1}{2} + 1$ Zellen zerlegen, von denen $2m$ unbeschränkt sind. Dies ergibt sich leicht durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Geraden. Wir nehmen die Aussage für eine einfache Konfiguration \mathfrak{R} mit m Geraden bereits

¹⁾ J. STEINER, *Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes*, Crelles J. reine angew. Math. 1, 349–364 (1826), oder Gesammelte Werke I, S. 77–94 (Berlin 1881).