

# Übersicht über die Nullstellen einer Funktion zweiten und dritten Grades

Autor(en): **Schilt, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18620>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Wenn unsere Voraussetzung richtig ist, so sind die folgenden Reihen konvergent:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{1}{n'_1} + \frac{1}{n'_2} + \cdots + \frac{1}{n'_s} + \cdots, \\ \text{b) } & \frac{1}{n''_1} + \frac{1}{n''_2} + \cdots + \frac{1}{n''_s} + \cdots, \\ \text{c) } & \frac{1}{n'''_1} + \frac{1}{n'''_2} + \cdots + \frac{1}{n'''_s} + \cdots, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} \frac{1}{n'_1} + \cdots + \frac{1}{n'_s} + \cdots &< \sum_{r=k}^{\infty} \frac{1}{p_r} + \cdots + \left( \sum_{r=k}^{\infty} \frac{1}{p_r} \right)^s + \cdots = \frac{q}{1-q}, \\ \frac{1}{n''_1} + \frac{1}{n''_2} + \cdots + \frac{1}{n''_s} + \cdots &= \frac{1}{1-(1/p_1)} \cdot \frac{1}{1-(1/p_2)} \cdots \frac{1}{1-(1/p_{k-1})}, \\ \frac{1}{n'''_1} + \frac{1}{n'''_2} + \cdots + \frac{1}{n'''_s} + \cdots & \\ &= 1 + \left( \frac{1}{n'_1} + \frac{1}{n'_2} + \cdots + \frac{1}{n'_s} + \cdots \right) \left( \frac{1}{n''_1} + \frac{1}{n''_2} + \cdots + \frac{1}{n''_s} + \cdots \right) \\ &< 1 + \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1}{1-(1/p_1)} \cdot \frac{1}{1-(1/p_2)} \cdots \frac{1}{1-(1/p_{k-1})}. \end{aligned}$$

Die Summe absolut konvergenter Reihen ist auch konvergent. Somit würde die harmonische Reihe:  $1 + 1/2 + \cdots + 1/s + 1/(s+1) + \cdots$  konvergieren.

Das ist aber offenbar ein Widerspruch. Damit ist die Divergenz der Reihe  $\sum_{r=1}^{\infty} 1/p_r$  bewiesen.

ERICH DUX, Szolnok (Ungarn).

## Übersicht über die Nullstellen einer Funktion zweiten und dritten Grades

Jede ganze Funktion hat bekanntlich in der komplexen Zahlenebene so viele Nullstellen wie der Grad der Funktion angibt. Es ist reizvoll, die Veränderungen dieser Nullstellen zu betrachten, wenn die Parameter, die in der Funktion vorkommen, geändert werden. Dazu ist es bequem und anschaulich, die komplexen Zahlen durch Vektoren darzustellen.

a) *Quadratische Funktion.* Wir beginnen mit einer Vorbetrachtung über die Funktion zweiten Grades:

$$\eta = \xi^2 + 2a\xi + b. \quad (1)$$

$a$  und  $b$  seien komplexe Zahlen;  $a \neq 0$ . Durch eine Drehstreckung in den komplexen Ebenen der  $\eta$  und der  $\xi$ :

$$\eta = a^2 w, \quad \xi = a t \quad (2)$$

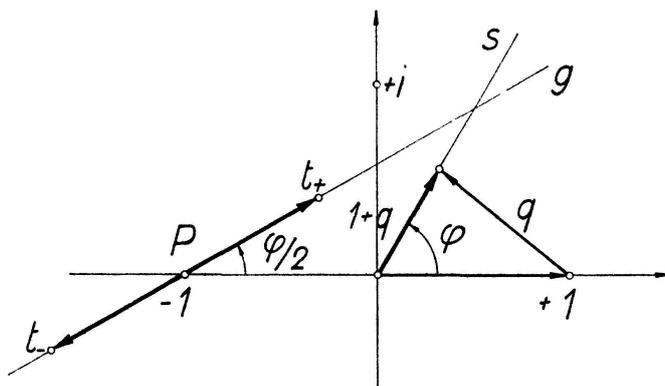
kann man die Form:

$$w = t^2 + 2t - q \quad (3)$$

erreichen. Die Nullstellen dieser Funktion sind:

$$t_+ = -1 + \sqrt{1+q}; \quad t_- = -1 - \sqrt{1+q}. \quad (4)$$

Diese Nullstellen liegen auf einer Geraden  $g$  durch den Punkt  $P$ , der zur Zahl  $t = -1$  gehört; der Winkel dieser Geraden mit der reellen Achse ist halb so gross wie das Argument  $\varphi$  der komplexen Zahl  $1+q$  (Figur 1).



Figur 1

Lage der Nullstellen der Gleichung  $t^2 + 2t - q = 0$  in der Gausschen Ebene der  $t$ .

Jedem Strahl  $s$  der Ebene  $t$  entspricht eine Gerade  $g$  durch  $P$ . Wenn im besonderen Fall  $q$  reell ist und  $-1 < q < \infty$ , so fällt die entsprechende Gerade mit der reellen Achse der  $t$  zusammen, denn der Vektor  $1+q$  hat dann das Argument 0. Falls aber  $-\infty < q < -1$ , so hat der Vektor  $1+q$  das Argument  $\pi$  und die Gerade  $g$  ein solches von  $\pi/2$ ; sie ist also parallel zur imaginären Achse der  $t$ . Die Nullstellen sind dann komplex konjugiert.

Damit ist eine Übersicht über die Nullstellen der speziellen Funktion (3) bei komplexer Zahl  $q$  gewonnen. Es bietet keine Schwierigkeiten, diese Ergebnisse auf die allgemeine Funktion (1) zu übertragen. Durch die Substitution (2) werden die Nullstellen von  $w$  in solche von  $\eta$  übergehen;  $\xi = at$  bedeutet eine Streckung der  $t$ -Ebene um den Faktor  $r$  und zugleich eine Drehung um den Winkel  $\alpha$ , wenn  $a = r e^{i\alpha}$ .

b) *Funktion dritten Grades.* Die allgemeine Funktion dritten Grades:

$$\eta = \xi^3 + A \xi^2 + B \xi + C \quad (5)$$

kann man durch eine Schiebung in der  $\xi$ -Ebene ( $\xi = x - A/3$ ) in die einfachere Form:

$$\eta = x^3 + b x + c$$

bringen. Wenn  $c \neq 0$ , können wir weiter durch die Transformation:

$$\eta = k^3 y; \quad x = k z$$

die Form:

$$y = z^3 + 3 p z + 2 \quad (6)$$

erreichen. Diese Funktion hängt nur vom Parameter  $p$  ab; das Verhalten ihrer Nullstellen kann deshalb verhältnismässig leicht überblickt werden.

Zur Bestimmung der Nullstellen von (6) benutzen wir das Verfahren von CARDANO; wir machen den Ansatz  $z = u + v$ , setzen diesen in (6) ein und ordnen zweckmässig, so dass wir erhalten:

$$y = u^3 + v^3 + 2 + 3(u + v)(uv + p). \tag{7}$$

Um die Nullstellen von  $y$  zu finden, kann man verlangen, dass  $u$  und  $v$  den Bedingungen:

$$uv + p = 0, \tag{8a}$$

$$u^3 + v^3 + 2 = 0 \tag{8b}$$

genügen sollen. Aus der Gleichung (8a) findet man:

$$u^3 v^3 = -p^3; \tag{9a}$$

aus der Gleichung (8b)

$$u^3 + v^3 = -2. \tag{9b}$$

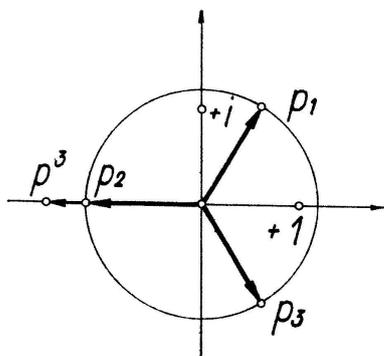
Die Gleichungen (9a) und (9b) legen es nahe,  $u^3$  und  $v^3$  als Lösungen  $t_+$  und  $t_-$  einer quadratischen Gleichung aufzufassen; diese Gleichung lautet:

$$t^2 + 2t - p^3 = 0. \tag{10}$$

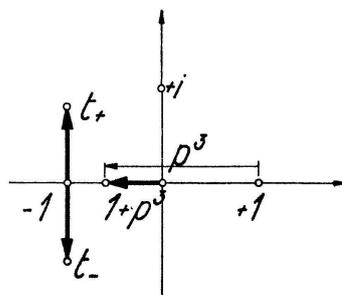
Man nennt (10) die quadratische Resolvente der kubischen Gleichung. Sie hat die gleiche Form wie die oben untersuchte quadratische Funktion, wenn dort an Stelle von  $q$  die Zahl  $p^3$  gesetzt wird. Zu einem bestimmten  $p^3$  findet man aus der Gleichung (10) zwei bestimmte Zahlen,  $t_+$  und  $t_-$ . Aus diesen ergeben sich  $u$  und  $v$ , und zwar ist

$$u = \sqrt[3]{t_+}, \quad v = \sqrt[3]{t_-}.$$

Es gibt je drei Lösungen für  $u$  und  $v$ . Für  $z = u + v$  erhalten wir daher neun mögliche



Figur 2



Figur 3

Figur 2. Lage der  $p_i$  und von  $p^3$  in der komplexen Zahlenebene für den Fall  $-\infty < p^3 < -1$ .

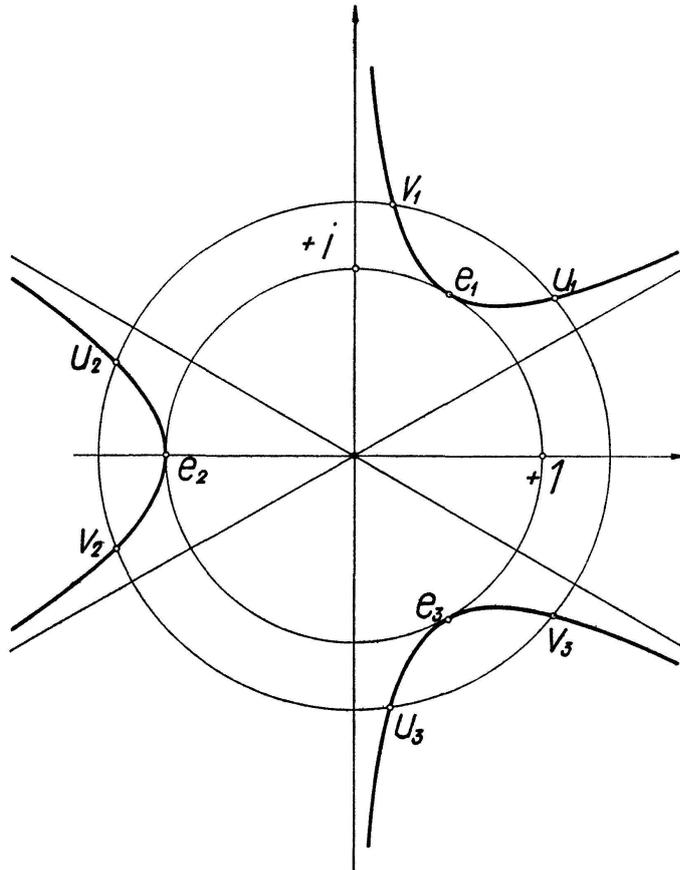
Figur 3. Lage der Lösungen  $t_+$  und  $t_-$  für  $-\infty < 1 + p^3 < 0$ .

Kombinationen dieser Lösungen. Unter diesen neun Kombinationen fallen sechs weg, weil noch die Bedingungen (8a):  $uv + p = 0$  erfüllt sein muss. Wir erhalten dann, wie erwartet, zu einem bestimmten  $p$  genau drei Nullstellen der kubischen Gleichung.

Sieht man von der Bedingung (8a) ab, so führen drei verschiedene  $p$  zur gleichen quadratischen Resolventen (10); je ein bestimmtes Tripel der neun Kombinationen gehört zu einem dieser  $p$ .

Um einen Überblick über die Lösungen zu gewinnen, gehen wir von folgendem Fall aus: Es sei  $p^3$  reell und  $-\infty < p^3 < -1$ .

$p_1, p_2, p_3$  in der Figur 2 sind diejenigen  $p$ , die zum gleichen  $p^3$  führen. Nach den Überlegungen von oben ergeben sich für alle diese  $p$  die gleichen Lösungen der quadratischen Resolvente, und zwar so, wie sie aus Figur 3 ersichtlich sind.



Figur 4

Lage der Lösungen  $u_i$  und  $v_k$  für  $-\infty < 1 + p^3 < 0$ .

In der komplexen Zahlenebene der  $u$  und  $v$  sehen die Lösungen folgendermassen aus (Figur 4):

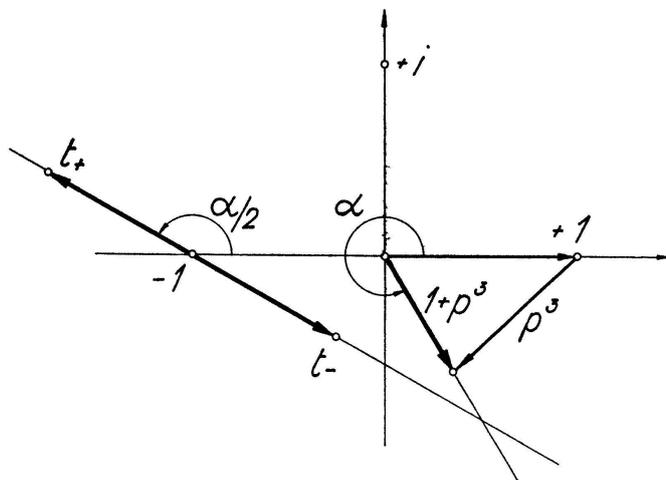
Verändert man  $p^3$  zwischen den Grenzen  $-\infty$  und  $-1$ , so bewegen sich die Lösungen  $u$  und  $v$  auf hyperbelähnlichen Kurven, so wie es in der Figur 4 angedeutet ist. Um die richtigen Lösungen der kubischen Gleichung zu erhalten, sind die  $u_i$  und  $v_k$  entsprechend der folgenden Tabelle zu kombinieren.

$p$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$p_1$	$u_1 + v_1$	$u_2 + v_3$	$u_3 + v_2$
$p_2$	$u_2 + v_2$	$u_3 + v_1$	$u_1 + v_3$
$p_3$	$u_3 + v_3$	$u_1 + v_2$	$u_2 + v_1$

Da alle  $u$  und  $v$  den gleichen absoluten Betrag aufweisen, ergeben die angeführten Kombinationen Lösungstriplet, deren 3 Lösungen  $x_i$  auf einer Geraden liegen

(vergleiche Aufgabe 252, *El. Math.* 70, 114 [1955]), jedoch sind nur für  $-\infty < p_2 < -1$  alle drei Lösungen reell.

Die dem Nullpunkt am nächsten liegenden Punkte  $e_1, e_2, e_3$ <sup>1)</sup> der Kurven gehören zu  $p^3 = -1$ , entsprechen also der Doppellösung der Gleichung (10) und sind somit auch diejenigen, für die je ein  $u$  und ein  $v$  zusammenfallen. Auch die  $e_i$  sind entspre-



Figur 5

Lage der Lösungen  $t_+$  und  $t_-$ , wenn die  $p_i$  gegenüber der Figur 2 etwas gedreht sind.

chend der Tabelle zu kombinieren; so erhält man im Falle  $p_2 = -1$ :

$$x_1 = e_2 + e_2 = -2,$$

$$x_2 = e_3 + e_1 = +1,$$

$$x_3 = e_1 + e_3 = +1.$$

Wenn man nun einen komplexen Koeffizienten  $p$  der kubischen Gleichung (6) unsern Betrachtungen zugrunde legt, so bedeutet das, dass sich der Dreistrahl  $p_1, p_2, p_3$  etwas dreht. In der Ebene der  $t$  erhält man Figur 5.

$p^3$  variere nun so, dass  $1 + p^3$  auf ein und demselben Strahle bleibe, der das Argument  $\alpha$  haben möge; dann bewegen sich nach Abschnitt a) die Lösungen  $t_+$  und  $t_-$  auf einer Geraden durch  $-1$ , die mit der reellen Achse den Winkel  $\alpha/2$  einschliesst. Die Kurven  $u, v$  gehen immer noch durch die Punkte  $e_i$ , ihre Asymptoten sind aber um  $\alpha/6$  abgedreht und ihre Minimaldistanz von Null ist kleiner geworden, weil auch die Gerade  $t_+ t_-$  näher beim Nullpunkt vorbeigeht (Figur 6).

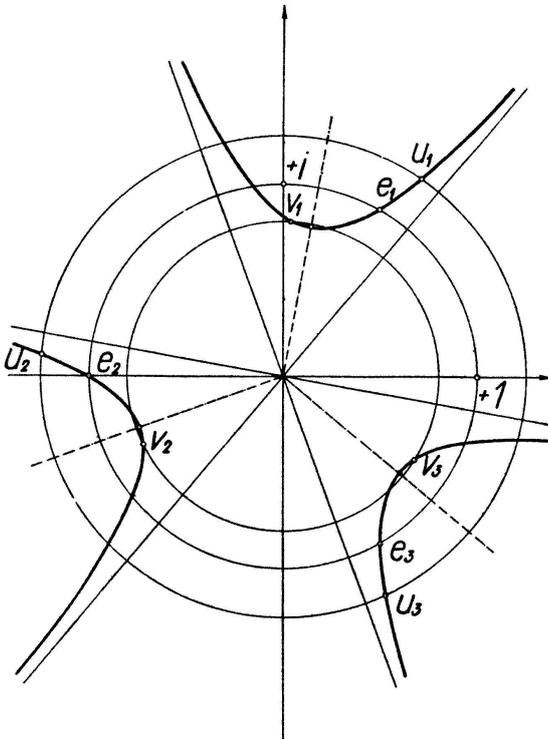
Falls man nun  $p^3$  in die reelle Achse dreht und  $-1 < p^3 < \infty$  ist, kommt die Gerade  $t_+ t_-$  ebenfalls in die reelle Achse zu liegen und dann degenerieren die Kurven  $u, v$  in die Schenkel der Winkel von  $60^\circ$  (Figur 7).

Wenn man beachtet, dass für diesen Fall  $p_3$  in die positive reelle Achse fällt, gibt uns die Tabelle wieder die richtige Zuordnung der Lösungen. Insbesondere ist  $x_2 = u_2 + v_3$  die einzige reelle Lösung, wenn  $-1 < p_3 < \infty$  ist.

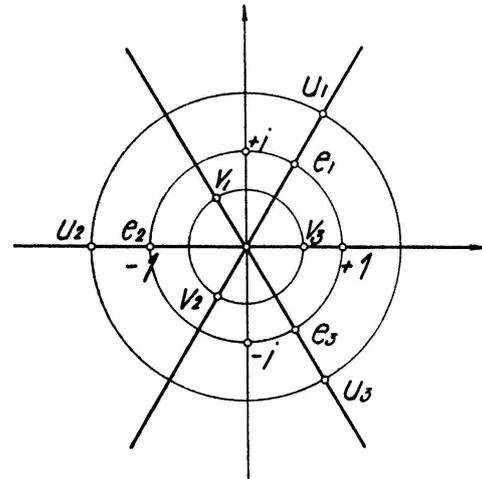
Durch weiteres Drehen von  $1 + p^3$  wandern die Kurven von den Winkelräumen:  $0 < \varphi < 60^\circ$ ;  $120^\circ < \varphi < 180^\circ$ ;  $240^\circ < \varphi < 300^\circ$  in die Winkelräume  $60^\circ < \varphi < 120^\circ$

<sup>1)</sup> Es ist  $e_i^3 = -1$ , also  $e_1 = 0,5(1 + i\sqrt{3})$ ,  $e_2 = -1$ ,  $e_3 = 0,5(1 - i\sqrt{3})$ .

usw.; jedoch immer so, dass die entsprechenden Kurven durch die Punkte  $e_1, e_2, e_3$  gehen. In diesem Falle gehören die Paare  $u_1 v_3; u_2 v_1; u_3 v_2$  zu je einem Kurvenast und werden je von einem  $e_i$  getrennt, genau wie die neue Stellung der  $p_i$  und unsere Zuordnungstabelle es verlangen.



Figur 6



Figur 7

Figur 6. Lage der Lösungen  $u_i$  und  $v_k$  für die gleichen Voraussetzungen wie Figur 5.  
Figur 7. Lage der Lösungen  $u_i$  und  $v_k$  für positive  $1 + p^3$ .

Aus den Figuren dürfte ersichtlich sein, wie die kardanische Lösungsmethode der kubischen Gleichung eine Symmetrie in das Problem hineinbringt, die die Lösungen  $x_i$  an sich nicht besitzen. Nur dieser Symmetrie ist es zu verdanken, dass die Auflösungsmethode so elementar ist.

H. SCHILT, Biel.

## Kleine Mitteilungen

### Eine Modifizierung der Simpsonschen Regel

Wenn wir zur Berechnung eines bestimmten Integrals auf numerische Methoden angewiesen sind, so stehen uns zahlreiche Formeln zur Verfügung. Eine der bekanntesten ist die sogenannte Simpsonsche Regel, die über eine gerade Anzahl Intervalle gleicher Breite zu integrieren gestattet. Sie beruht darauf, dass man über je zwei aufeinanderfolgende Intervalle einen quadratischen Parabelbogen spannt, der durch die drei zugehörigen Ordinatenpunkte geht. Indem man die Flächen unter den einzelnen Parabelbögen berechnet und dann addiert, erhält man den Ausdruck

$$F = \frac{h}{3} (y_0 + 4 y_1 + 2 y_2 + 4 y_3 + 2 y_4 + \dots + 4 y_{n-1} + y_n) + R_s, \quad (1)$$