

Volumschätzung für die einen Eikörper überdeckenden und unterdeckenden Parallelotope

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **10 (1955)**

Heft 6

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18086>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

qualités morales et humaines. C'était un homme d'une grande bonté, profondément généreux et altruiste. A ses assistants qui débutaient dans l'enseignement, il disait volontiers: «... surtout n'oubliez jamais qu'il faut aimer ses élèves.» Et, montrant l'exemple, il n'a jamais cessé d'aimer ses élèves, s'intéressant à eux pendant leurs études et après leurs études, sans jamais se départir de sa bienveillance coutumière ni de ce respect de la personnalité d'autrui qui est si nécessaire à tout professeur.

Altruisme, bienveillance, générosité! Toutes ces qualités se retrouvent dans l'influence exercée par GUSTAVE DUMAS dans son activité en marge de l'université, en particulier à la Société mathématique suisse, dont il fut membre depuis sa fondation en 1910 et qu'il a présidée durant les années 1922 et 1923. Il faudrait parler aussi de son rôle au Cercle mathématique de Lausanne, dont il fut l'un des fondateurs, au Colloque des mathématiciens romands et au Groupe rhodanien, où il apportait son appui toujours si précieux et où il s'était attiré tant de solides amitiés.

Entouré de l'affection de ses enfants et de ses amis, il s'est endormi paisiblement le 11 juillet 1955. Nous prions sa famille de croire à notre très vive et chaude sympathie, et nous conserverons pieusement le souvenir de cette belle et riche personnalité, toute éprise d'idéal.

GEORGES DE RHAM.

Volumenschätzung für die einen Eikörper überdeckenden und unterdeckenden Parallelotope

Es sei A ein eigentlicher konvexer Körper¹⁾ des k -dimensionalen euklidischen Raumes vom Volumen $V(A)$. In der folgenden Note geben wir einen einfachen rekursiven Beweis der beiden folgenden Aussagen:

Es gibt ein gerades Parallelotop²⁾ P , das den Eikörper A überdeckt, dessen Volumen $V(P)$ so klein ist, dass die Ungleichung

$$V(P) \leq k! V(A) \quad [A \subset P] \quad (a)$$

besteht³⁾. Ferner gibt es ein gerades Parallelotop Q , das den Eikörper A unterdeckt, dessen Volumen $V(Q)$ so gross ist, dass die Ungleichung

$$V(Q) \geq \left(\frac{1}{k}\right)^k V(A) \quad [Q \subset A] \quad (b)$$

erfüllt wird⁴⁾.

¹⁾ Abgeschlossene, konvexe und beschränkte Punktmenge.

²⁾ Intervall, in angepassten rechtwinkligen Koordinaten z_i durch $a_i \leq z_i \leq b_i$; $i = 1, \dots, k$ charakterisiert.

³⁾ Der Fall $k = 2$ ist besonders einfach zu diskutieren. Vergleiche G. PÓLYA-G. SZEGÖ [1] 109 (5.10), (Lemma I); dort ist ein einfacher Beweis von H. RADEMACHER angegeben. Hier kann die Konstante $k! = 2$ übrigens nicht durch eine kleinere ersetzt werden. Für ein Dreieck A gilt stets $V(P) \geq 2 V(A)$. Im Falle $k = 3$ wurde die Aussage auch von K. RADZISZEWSKI [2] gewonnen.

⁴⁾ Im Falle $k = 3$ und unter der weiteren Bedingung, dass A eine Symmetrieebene aufweist, wurde von K. RADZISZEWSKI [2] das wesentlich schärfere Ergebnis $V(Q) \geq (2/9) V(A)$ erzielt. Im Falle $k = 2$ gewinnt der gleiche Verfasser $V(Q) \geq (1/2) V(A)$. Hier kann die Konstante $(1/2)$ auch nicht vergrößert werden. Ist A ein Dreieck, so gilt stets $V(Q) \leq (1/2) V(A)$.

Nach Konstruktion und der vorliegenden elementargeometrischen Sachlage ergibt sich jetzt leicht, dass A durch ein gerades Parallelotop P überdeckt ist, dessen Querschnittparallelotop in $E(0)$ mit P_0 identisch, dessen Höhe $2h$ und dessen Volumen demnach

$$V(P) = 2h V_0(P_0) \quad [A \subset P] \quad (\text{ac})$$

ist. Die Verbindung der Relationen (aa), (ab) und (ac) ergibt die Behauptung (a).

Einen neuen Ausgangspunkt wählen wir mit der Volumenformel

$$V(A) = \int_{-h}^h V_0[A \cap E(t)] dt,$$

wobei wir über die mit t stetig variierenden $(k-1)$ -dimensionalen Volumina der Schnittekörper $A \cap E(t)$ integrieren.

Nach dem Mittelwertsatz lässt sich ein s ($-h < s < h$) so angeben, dass mit der Setzung $A \cap E(s) = A_{00}$ die Beziehung

$$2h V_0(A_{00}) = V(A) \quad (\text{ba})$$

besteht. Nach der induktiven Annahme gibt es im Raum $E(s)$ ein gerades Parallelotop Q_0 , so dass $Q_0 \subset A_{00}$ gilt und die Ungleichung

$$V_0(Q_0) \geq \left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} V_0(A_{00}) \quad (\text{bb})$$

besteht. Bilden wir jetzt die konvexe Hülle von H , H' und Q_0 , so entsteht eine Doppelpyramide Y , und es gilt $Y \subset A$. Ist $0 < \lambda < 1$, so sind die Durchschnitte

$$S_\lambda = Y \cap E[(1-\lambda)s + \lambda h],$$

$$S'_\lambda = Y \cap E[(1-\lambda)s - \lambda h]$$

zwei in der z -Richtung übereinanderstehende translationsgleiche Parallelotope, die aus Q_0 durch ähnliche Verkleinerung im Verhältnis $1:(1-\lambda)$ hervorgehen. S_λ und S'_λ bilden offensichtlich Grund- und Deckfläche eines geraden Parallelotops Q_λ der Höhe $2\lambda h$, das, wie nach Konstruktion klar wird, in A enthalten ist und dessen Volumen durch

$$V(Q_\lambda) = 2\lambda h (1-\lambda)^{k-1} V_0(Q_0) \quad (\text{bc})$$

gegeben ist. Setzen wir speziell $\lambda = 1/k$ und $Q_\lambda = Q$, so ergibt sich in Verbindung von (ba), (bb) und (bc) die Behauptung (b).

H. HADWIGER, Bern.

Literatur

- [1] G. PÓLYA — G. SZEGÖ, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Ann. Math. Stud. Princeton 27 (1951).
- [2] K. RADZISZEWSKI, *Sur un problème extrémal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux figures convexes*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska [A] 6, 5–18 (1953).