

# Über die Hüllkurven von Kepler-Bahnen fester Energie, welche eine feste Kepler-Bahn berühren

Autor(en): **Strubecker, K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **10 (1955)**

Heft 4

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18079>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Aufriss: Gesamthöhe  $v + u + v$ ; die Höhenunterschiede der Ecken betragen  $v, u, v$ .

Soll das Ikosaeder die Kante  $a$  haben, so ist  $u$  als Umkreisradius eines regelmässigen Fünfecks mit der Seite  $a$  zu wählen.

*Ikosaeder auf Kante.* Grundriss: In einem Quadrat wählt man ein Paar von Gegenseiten und teilt die beiden Hälften jeder Seite dieses Paares je im goldenen Schnitt, so dass die grösseren Abschnitte von der Seitenmitte ausgehen. Die vier erhaltenen Teilpunkte und die Mitten der beiden übrigen Quadratseiten sind die Grundrisse von Ikosaederecken. Verbindet man die Teilpunkte mit den genannten Mitten, so erhält man auch die Grundrisse der übrigen Ecken.

Aufriss: Kongruent dem Grundriss, aber um  $90^\circ$  gedreht.

Soll das Ikosaeder die Kante  $a$  haben, so hat man als Quadratseite die Diagonale  $d$  des regelmässigen Fünfecks mit der Seite  $a$  zu wählen.

*Ikosaeder auf Fläche.* Grundriss: Einem Kreis vom Radius  $u$  wird ein regelmässiges Sechseck einbeschrieben; dessen Ecken sind die Grundrisse von sechs Ikosaederecken. Die Grundrisse der übrigen Ecken liegen auf einem konzentrischen Kreise, dessen Radius  $v$  der grössere Abschnitt des im goldenen Schnitt geteilten Radius  $u$  ist. (Eine günstige Konstruktion zeigt die Figur.)

Aufriss: Gesamthöhe  $u + v$ . Die Höhenunterschiede der Ecken betragen  $v, u - v, v$ .

Soll das Ikosaeder die Kante  $a$  haben, so ist  $u$  als Umkreisradius eines regelmässigen Dreiecks mit der Seite  $d$  (Diagonale eines regelmässigen Fünfecks mit der Seite  $a$ ) zu wählen.

L. LOCHER-ERNST.

## Über die Hüllkurven von Kepler-Bahnen fester Energie, welche eine feste Kepler-Bahn berühren

### 1. Einleitung

Die zu einem festen Zentralkörper  $S'$  gehörigen *komplanaren Kepler-Bahnen fester Gesamtenergie  $h$*  sind bekanntlich *monofokale Kegelschnitte mit  $S'$  als gemeinsamem Brennpunkt und mit fester Hauptachsenlänge  $2a$* . Je nachdem die Gesamtenergie  $h < 0, = 0, > 0$  ist, sind die Kepler-Bahnen Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.

Diese mechanische Bedeutung der monofokalen Kegelschnitte mit fester Hauptachsenlänge  $2a$  rechtfertigt das Interesse, das auch der Geometer dieser Kurvenklasse zuwendet.

*In den folgenden Darlegungen handelt es sich um solche monofokale Kegelschnitte  $k'_a$  der festen Hauptachsenlänge  $2a$ , welche einen festen Kegelschnitt  $k'$  mit dem gleichen Brennpunkt  $S'$  berühren.*

Wir wollen beweisen (Figur 1):

*Satz 1. Die Hüllkurve  $h'$  dieser Kegelschnitte  $k'_a$  ist ein zu  $k'$  konfokaler Kegelschnitt, der mit  $k'$  ausser dem Brennpunkt  $S'$  noch einen zweiten Brennpunkt  $T'$  gemeinsam hat.*

*Satz 2.* Die (von  $S'$  verschiedenen) Brennpunkte  $F'$  der Kegelschnitte  $k'_a$  bilden einen Kreis  $f'$  mit der Mitte  $T'$ .

*Satz 3.* Die Berührungspunkte  $K'$  und  $H'$  von  $k'_a$  mit dem festen Kegelschnitt  $k'$  und dem Hüllkegelschnitt  $h'$  sowie der bewegliche Brennpunkt  $F'$  von  $k'_a$  liegen stets auf einer Geraden  $e'$  durch den zweiten (von  $S'$  verschiedenen) gemeinsamen Brennpunkt  $T'$  der Grundkurve  $k'$  und der Hüllkurve  $h'$ .

Mechanisch gedeutet besagt zum Beispiel Satz 1 folgendes:

*Satz 1\*.* Alle Kepler-Bahnen  $k'_a$  fester Energie, welche eine feste Kepler-Bahn  $k'$  berühren, umhüllen eine zweite zu  $k'$  konfokale Kepler-Bahn  $h'$ .

## 2. Räumliche Deutung

Der Beweis der angeführten Sätze wird am einfachsten nach den *Methoden der darstellenden Geometrie* durch *räumliche Deutung* der angeführten Figuren erbracht.

Man kann zunächst alle *monofokalen Kegelschnitte*  $\{k'\}$  der Ebene  $II$  mit dem gemeinsamen Brennpunkt  $S'$  (wir sagen: alle Kegelschnitte des *Monofokalsystems*  $\{S'\}$ ) auffassen als *Grundrisse der ebenen Schnitte*  $k$  eines *Drehkegels*  $\kappa$  (*Grundkegel*), der sich lotrecht über der Ebene  $II$  (Grundrissebene) so erhebt, dass der Grundriss seiner Spitze  $S$  nach  $S'$  fällt.

*Bemerkung 1.* Übrigens gibt es zu jedem monofokalen Kegelschnitt  $k'$  in  $II$  zwei ebene Schnitte  $k, \hat{k}$  des Drehkegels  $\kappa$ , die  $k'$  als Grundriss haben. Die Ebenen  $\varepsilon, \hat{\varepsilon}$  dieser beiden Schnitte  $k, \hat{k}$  liegen symmetrisch bezüglich der horizontalen Symmetrieebene des Drehkegels  $\kappa$  (Figur 2).

Auch die monofokalen Kegelschnitte  $k'_a$  in  $II$  sind dann Grundrisse von *ebenen Schnitten*  $k_a$  des Kegels  $\kappa$ . Da die Kegelschnitte  $k'_a$  die *feste Hauptachsenlänge*  $2a$  haben, berühren die Ebenen  $\varepsilon$  dieser Kegelschnitte  $k_a$  ein *lotrechtes Drehparaboloid*  $\pi$ , das dem Kegel  $\kappa$  eingeschrieben ist und ihn längs eines Parallelkreises vom Radius  $2a$  berührt<sup>1)</sup>.

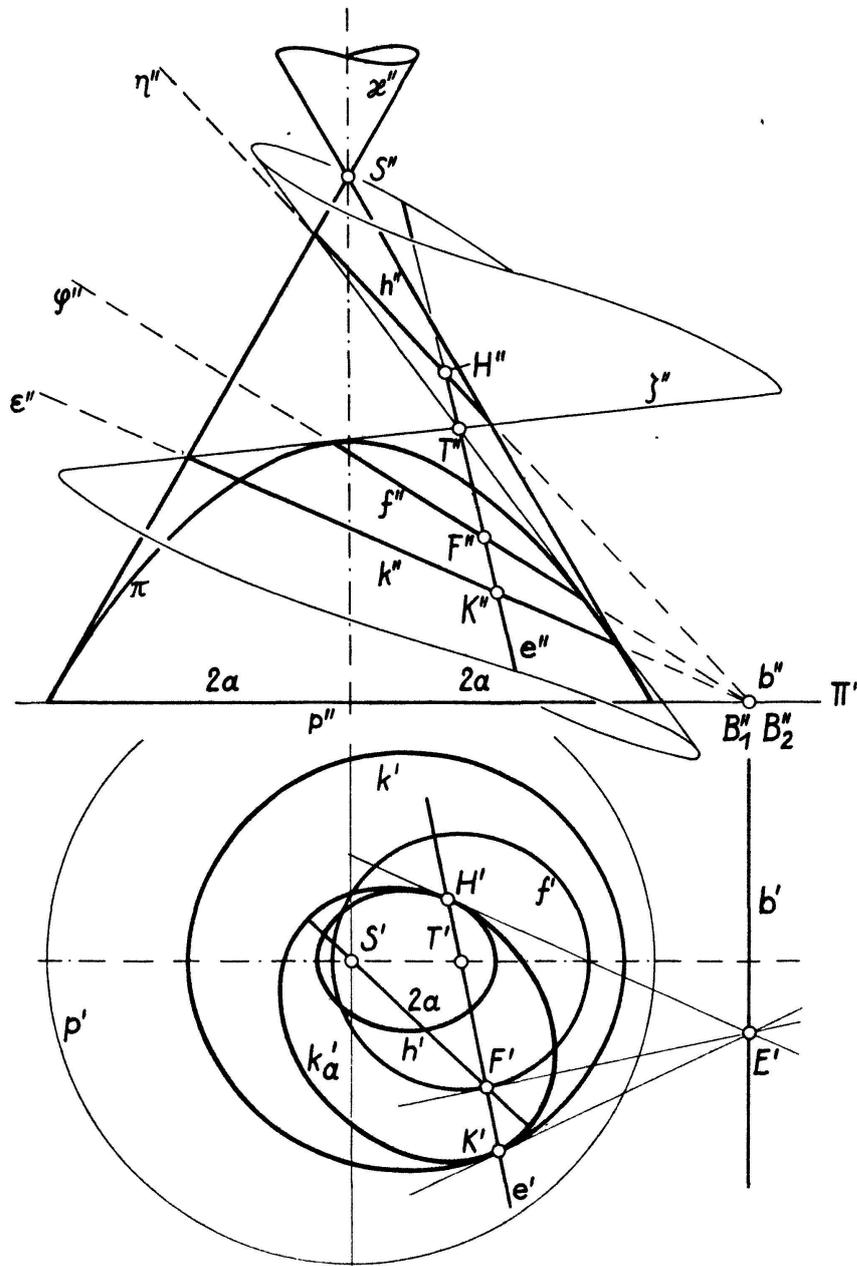
Berühren die Kegelschnitte  $k'_a$  den festen Kegelschnitt  $k'$  des Monofokalsystems  $\{S'\}$ , so entsprechen ihnen auf dem Drehkegel  $\kappa$  Kegelschnitte  $k_a$ , welche den festen Kegelschnitt  $k$  berühren; die Ebenen  $\varepsilon_a$  der Kegelschnitte  $k_a$  sind dann Tangentenebenen des Kegelschnitts  $k$  (das heisst, sie gehören der durch  $k$  bestimmten singulären Fläche 2. Klasse an). Da die Kegelschnitte  $k'_a$  überdies die feste Hauptachsenlänge  $2a$  haben, so müssen ihre Ebenen  $\varepsilon_a$  überdies Tangentenebenen des Drehparaboloides  $\pi$  sein.

Insgesamt entsprechen also den Kegelschnitten  $k'_a$  des Monofokalsystems  $\{S'\}$ , welche die Hauptachsenlänge  $2a$  haben und den festen Kegelschnitt  $k'$  aus  $\{S'\}$  berühren, jene ebenen Schnitte  $k_a$  des Kegels  $\kappa$ , deren Ebenen  $\varepsilon_a$  sowohl das Drehparaboloid  $\pi$  als auch den Kegelschnitt  $k$  berühren, also die *Ebenen der Verbindungstorse* dieser beiden Flächen 2. Klasse  $\pi$  und  $k$ .

Ein Teil dieser Torse besteht aus dem System der Tangentenebenen des Grundkegels  $\kappa$ , die ja sämtliche das Paraboloid  $\pi$  und den Kegelschnitt  $k$  berühren. Spaltet man von der Verbindungstorse diese lösungsfremden Ebenen ab, so bleibt allein ein *Kegel zweiter Ordnung*  $\zeta$  übrig, dessen Scheitel  $T$  heisse, und dessen Tangentenebenen  $\tau$  aus  $\kappa$  Kegelschnitte  $k_a$  der verlangten Eigenschaft ausschneiden.

<sup>1)</sup> K. STRUBECKER, *Über monofokale Kegelschnitte*, Math. Nachrichten 4, 36–46 (1950/51), Satz IX.

Der Kegel  $\zeta$  schneidet den Grundkegel  $\kappa$  nach einer Kurve 4. Ordnung, bestehend aus dem Kegelschnitt  $k$  und noch einem zweiten Kegelschnitt  $h$ . Die in den Tangentenebenen  $\tau$  von  $\zeta$  liegenden Kegelschnitte  $k_a$  von  $\kappa$  berühren dabei in gleicher Weise



Figur 1

den Grundkegelschnitt  $k$  und den neuen Kegelschnitt  $h$ , der damit auf  $\kappa$  schon die Hüllkurve (Hüllkegelschnitt) der Kegelschnitte  $k_a$  ist. Sein Grundriss  $h'$  ist daher die gesuchte Hüllkurve der Kegelschnitte  $k'_a$ .

Von vornherein steht dabei fest, dass diese Hüllkurve  $h'$  (als Grundriss eines ebenen Schnittes  $h$  des Grundkegels  $\kappa$ ) wieder ein Kegelschnitt des Monofokalsystems  $\{S'\}$  ist.

Es ist jetzt auch leicht, die anderen erwähnten Eigenschaften der Hüllkurve  $h'$  einzusehen.

### 3. Beweis der Sätze 1 bis 3

Nach Satz 1 sollen die Kegelschnitte  $k'$  und  $h'$  konfokal sein und dieselben Brennpunkte  $S'$  und  $T'$  haben.

*Beweis.* Die Kurven  $k$  und  $h$  liegen nämlich auf den Kegeln  $\kappa$  und  $\zeta$  und berühren die lotrechten, durch  $S$  und  $T$  laufenden Tangentenebenen  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\tau_1, \tau_2$  dieser Kegel. Diese Ebenen sind aber sämtlich *isotrope Ebenen*, nämlich die Verbindungsebenen der Kegelscheitel  $S$  und  $T$  mit den beiden Fernerzeugenden  $e_1, e_2$  des Drehparaboloids  $\pi$ , das beiden Kegeln  $\kappa$  und  $\zeta$  eingeschrieben ist. Die Grundrisse  $k'$  und  $h'$  berühren daher in  $\Pi$  die isotropen Spurgeraden  $s_1, s_2$  und  $t_1, t_2$  der projizierenden Ebenen  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\tau_1, \tau_2$ ; die Grundrisse  $S', T'$  der Kegelscheitel  $S, T$  von  $\kappa$  und  $\zeta$  sind daher tatsächlich die beiden *gemeinsamen Brennpunkte der Grundkurve  $k'$  und der Hüllkurve  $h'$* . Damit ist der Satz 1 vollständig bewiesen (Figur 1).

Nach Satz 2 soll der Ort der von  $S'$  verschiedenen Brennpunkte  $F'$  ein Kreis  $f'$  mit der Mitte  $T'$  sein.

*Beweis.* Der Kegel  $\zeta$  ist dem Paraboloid  $\pi$  umschrieben und berührt es in den Punkten  $F$  eines ebenen Schnittes  $f$  von  $\pi$ , der in der Polarebene  $\varphi$  von  $T$  bezüglich  $\pi$  liegt. Ist nun  $\varepsilon_a$  die Ebene eines beliebigen unserer Kegelschnitte  $k_a$ , so besitzt dessen Grundriss  $k'_a$  als Brennpunkte erstens den Grundriss  $S'$  der Spitze des Drehkegels  $\kappa$  und zweitens den Grundriss  $F'$  des Berührungspunktes  $F$  der Kegelschnittsebene  $\varepsilon_a$  mit jenem Drehparaboloid, das ausser  $\varepsilon_a$  noch den Drehkegel  $\kappa$  längs eines Parallelkreises berührt. Dieses Paraboloid ist aber genau das Paraboloid  $\pi$ , und die Punkte  $F'$  sind daher die von  $S'$  verschiedenen Brennpunkte der Kegelschnitte  $k'_a$ . Weil der Ort der Punkte  $F$  im Raume ein ebener Schnitt  $f$  des Drehparaboloids mit der Kegelspitze  $T$  als Pol ist, bilden ihre Grundrisse  $F'$  tatsächlich einen Kreis  $f'$  mit dem Grundriss  $T'$  des Poles  $T$  als Mittelpunkt. Damit ist auch Satz 2 bewiesen (Figur 1).

Nach Satz 3 sollen die Berührungspunkte  $K'$  und  $H'$  jedes Kegelschnittes  $k'_a$  mit dem Grundkegelschnitte  $k'$  und dem Hüllkegelschnitte  $h'$  sowie der bewegliche Brennpunkt  $F'$  von  $k'_a$  stets auf einer Geraden  $e'$  durch den festen Punkt  $T'$  liegen.

*Beweis.* Die Ebene  $\varepsilon_a$  des Kegelschnittes  $k_a$  berührt den Kegel  $\zeta$  nach einer geradlinigen Erzeugenden  $e$ , welche die auf  $\zeta$  liegenden Kegelschnitte  $k, h$  und  $f$  in den Punkten  $K$  (Berührungspunkt von  $k_a$  mit dem Grundkegelschnitt  $k$ ),  $H$  (Berührungspunkt von  $k_a$  mit dem Hüllkegelschnitt  $h$ ) und  $F$  (dessen Grundriss  $F'$  zweiter Brennpunkt von  $k'_a$  ist) schneidet, und die durch den Scheitel  $T$  des Kegels  $\zeta$  geht. Folglich liegen auch die Grundrisse  $K', H', F'$  stets auf einer Geraden  $e'$  durch  $T'$ . Damit ist auch Satz 3 bewiesen.

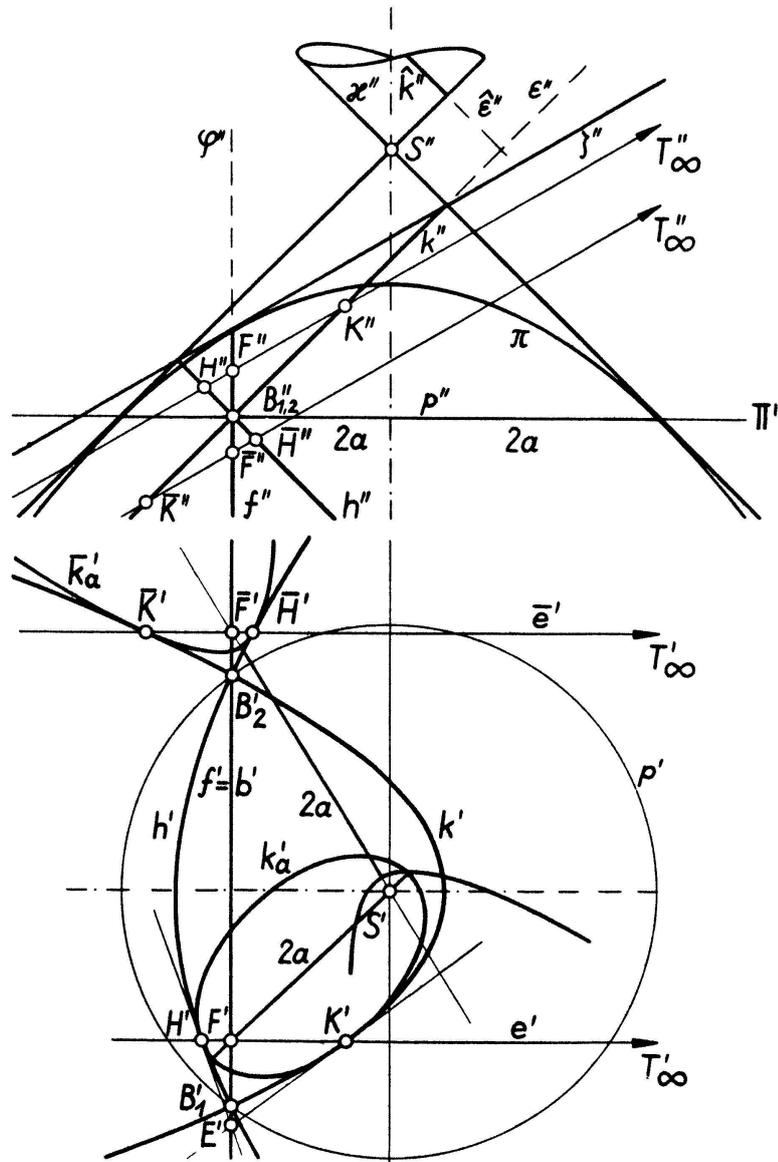
### 4. Bemerkungen

*Bemerkung 2.* Da die Kegel  $\kappa$  und  $\zeta$  beide dem Drehparaboloid  $\pi$  umschrieben sind, berühren sie sich in zwei Punkten  $B_1, B_2$ , die allen drei Flächen  $\kappa, \zeta, \pi$  gemeinsam sind; die Verbindungsgerade  $b = [B_1 B_2]$  dieser Berührungspunkte ist daher die gemeinsame Schnittgerade der vier Ebenen  $\varepsilon$  (von  $k$ ),  $\eta$  (von  $h$ ),  $\varphi$  (von  $f$ ) und der Ebene  $\Pi$  (des Berührungskreises  $p$  von  $\pi$  und  $\kappa$ ). Die Berührungspunkte  $B_1$  und  $B_2$  liegen daher als ihre gemeinsamen Schnittpunkte auf den Kegelschnitten  $k, h, f$  und  $p$ .

Also schneiden sich im Grundriss auch der Grundkegelschnitt  $k'$  und Hüllkegelschnitt  $h'$  sowie der Brennpunktskreis  $f'$  und der Parallelkreis  $p'$  in zwei Punkten  $B'_1$  und  $B'_2$  der

gemeinsamen Spurgeraden  $b$  von  $\varepsilon$ ,  $\eta$  und  $\varphi$  auf  $\Pi$ , die reell verschieden, zusammenfallend oder konjugiert komplex sein können.

Schneidet man dann die Ebene  $\varepsilon_a$  eines Kegelschnittes  $k_a$  mit den Ebenen  $\varepsilon$ ,  $\eta$ ,  $\varphi$  der Kegelschnitte  $k$ ,  $h$ ,  $f$ , so ergibt sich, dass die Tangenten an  $k'$  in  $K'$ , an  $h'$  in  $H'$



Figur 2

und an  $f'$  in  $F'$  stets in einem Punkte  $E'$  der Geraden  $b'$  zusammenlaufen:  $E'$  ist der Pol von  $e' = [K'H']$  bezüglich des Kegelschnitts  $k'_a$ .

*Bemerkung 3.* Da nach Bemerkung 1 jeder monofokale Grundkegelschnitt  $k'$  Grundriss von zwei verschiedenen (symmetrischen) Kegelschnitten  $k$  und  $\hat{k}$  des Kegels  $\kappa$  ist, gibt es zu einem vorgegebenen Grundkegelschnitt  $k'$  nicht bloss eine Schar  $\{k'_a\}$  von berührenden Kegelschnitten  $k'_a$  der festen Hauptachsenlänge  $2a$ , sondern zwei solche Berührungsscharen  $\{k'_a\}$  und  $\{\hat{k}'_a\}$ , zu denen dann auch zwei verschiedene, zu  $k'$  konfokale Hüllkegelschnitte  $h'$  und  $\hat{h}'$  und zwei Brennpunktskreise  $f'$  und  $\hat{f}'$  gehören (Figur 2).

*Bemerkung 4.* Wählt man als Grundkegelschnitt  $k'$  eine Parabel mit dem Brennpunkt  $S'$ , so wird der Kegel  $\zeta$  ein *parabolischer Zylinder* mit unendlich ferner Spitze  $T_\infty$ , der den Grundkegel  $\kappa$  noch nach einer zweiten Parabel  $h$  schneidet und das Drehparaboloid  $\pi$  (Berührungsradius  $2a$ ) nach einer Parabel  $f$  berührt, die in einer vertikalen Ebene  $\varphi$  liegt (Figur 2).

Die Kegelschnitte  $k'_a$  der festen Hauptachsenlänge  $2a$ , welche die Grundparabel  $k'$  berühren und mit ihr den festen Brennpunkt  $S'$  gemeinsam haben, *umhüllen* also eine zu  $k'$  konfokale Parabel  $h'$ <sup>1)</sup>. Als Ort der freien Brennpunkte  $F'$  der Kegelschnitte  $k'_a$  ergibt sich eine Gerade  $f'$ , nämlich die Verbindungsgerade  $b' = [B'_1 B'_2]$  der beiden eigentlichen Schnittpunkte  $B'_1$  und  $B'_2$  der konfokalen Parabeln  $k'$  und  $h'$ . Die Kegelschnitte  $k'_a$  der Berührungsschar berühren dabei die Parabeln  $k'$  und  $h'$  in den Punkten  $K'$  und  $H'$ , welche mit dem freien Brennpunkt  $F'$  von  $k'_a$  stets auf einer Geraden durch den festen Fernpunkt  $T'_\infty$  liegen.

*Bemerkung 5.* Die Scharen  $\{k'_a\}$  der  $k'$  berührenden und zu  $k'$  monofokalen Kegelschnitte  $k'_a$  fester Achsenlänge  $2a$  können *entweder Ellipsen, oder Hyperbeln, oder Ellipsen und Hyperbeln enthalten*; im letzten Falle gibt es als Übergangsfigur zwei in Strecken (der Länge  $2a$ ) ausgeartete Grenzkegelschnitte, nämlich die beiden Radien  $\overline{S'B'_1}$  und  $\overline{S'B'_2}$ .

*Bemerkung 6.* Sollen (im Grenzfalle  $a = \infty$ ) die den Grundkegelschnitt  $k'$  berührenden, zu  $k'$  monofokalen Kegelschnitte  $k'_a$  aus Parabeln  $k'_\infty$  bestehen, so ist im räumlichen Modell des Kegels  $\kappa$  durch den Grundkegelschnitt  $k$  ein solcher Kegel  $\zeta$  zu legen, dessen Tangentenebenen  $\varepsilon_\infty$  den Kegel  $\kappa$  nach lauter Parabeln schneiden.  $\zeta$  ist dann der zweite zu  $\kappa$  kongruente Kegel, der sich durch  $k$  legen lässt (*Gegenkegel* zu  $\kappa$ ). Da  $\kappa$  und  $\zeta$  sich ausser in  $k$  nur noch in ihrem gemeinsamen Fernkreis  $h$  schneiden, fällt die Hüllkurve  $h'$  der Parabeln  $k'_\infty$  stets in die Ferngerade der Ebene  $\Pi$ , die ja tatsächlich von allen Parabeln berührt wird.

*Bemerkung 7.* Man kann das Ergebnis der Sätze 1 bis 3 umkehren. Sind zwei konfokale Kegelschnitte  $k'$  und  $h'$  mit den gemeinsamen Brennpunkten  $S'$  und  $T'$  gegeben, so gibt es stets zwei Scharen von monofokalen Kegelschnitten  $k'_a$  und  $\hat{k}'_a$  mit dem gemeinsamen Brennpunkte  $S'$ , welche gleichzeitig die Kegelschnitte  $k'$  und  $h'$  in Punkten  $K'$  und  $H'$  berühren (die jeweils auf einer Geraden  $e'$  durch  $T'$  liegen) und deren Hauptachsenlängen  $2a$  einen festen Wert haben. Dabei ist  $2a$  gleich dem Radius eines jener beiden Kreise  $p'$  mit der Mitte  $S'$ , welche ein (zur Geraden  $[S'T']$  symmetrisches) Paar von Schnittpunkten  $B'_1, B'_2$  von  $k'$  und  $h'$  enthalten. Die freien Brennpunkte  $F'$  der berührenden Kegelschnitte liegen dabei auf dem Kreis  $f'$  mit der Mitte  $T'$ , der durch  $B'_1$  und  $B'_2$  geht, und zwar in jenem Schnittpunkte von  $f'$  mit der Geraden  $e' = [K'H']$ , in welchem die Tangente an den Kreis  $f'$  sich mit den Tangenten an  $k'$  in  $K'$  und an  $h'$  und  $H'$  in einem Punkte  $E'$  der Sehne  $b' = [B'_1 B'_2]$  trifft.

K. STRUBECKER, Karlsruhe.

<sup>1)</sup> Dies hat schon O. MARCKWARDT [Math. naturwiss. Unterricht 5, 120 (1952/53)] durch Rechnung (unter Beschränkung auf Ellipsen  $k'_a$ ) nachgewiesen.