

# Konstruktionen des Dodekaeders und Ikosaeders

Autor(en): **Locher-Ernst, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **10 (1955)**

Heft 4

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18078>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

---

El. Math.

Band X

Nr. 4

Seiten 73–96

Basel, 10. Juli 1955

---

## Konstruktionen des Dodekaeders und Ikosaeders

Die folgenden Ausführungen sind einem rein didaktischen Zweck gewidmet. In vielen Schulbüchern ist vom Dodekaeder und vom Ikosaeder sowie auch von deren Konstruktion die Rede. Meist fehlt aber der Beweis, dass das konstruierte Polyeder regulär ist. Man zeigt zwar etwa, dass die Flächen regulär sind, unterlässt es aber, die Regularität der Raumecken zu beweisen. Mit Hilfe des Eulerschen Satzes legt man dar, dass nur wenige reguläre Polyeder möglich sind. Den Existenzbeweis lässt man weg. Und doch gibt gerade dieser erst den richtigen Einblick in den Aufbau. Das Vorzeigen eines Modells ist kein Ersatz, da man einem solchen nicht entnehmen kann, ob seine Flächen und Raumecken wirklich regulär sind<sup>1)</sup>.

Im folgenden werden für das Ikosaeder und das Dodekaeder je drei Existenzbeweise kurz, aber möglichst anschaulich angedeutet. Diese liefern zugleich die Grundrisse des Polyeders in den drei Hauptlagen. Dann wird eine Zusammenstellung übersichtlicher Konstruktionen beigelegt, die vielleicht da und dort willkommen ist.

### *Erste Konstruktion des Ikosaeders (Figur 1)*

Wir denken uns ein reguläres Fünfeck  $ABCDE$  mit der Seite  $a$  in horizontaler (parallel zur Zeichnungsebene) Lage. In seinem Mittelpunkt errichten wir das Lot nach oben und wählen auf diesem den Punkt  $P$  derart, dass die regelmässige Pyramide  $P(ABCDE)$  als Seitenflächen reguläre dreieckige Scheiben<sup>2)</sup> erhält. Der Pyramidenmantel bildet eine reguläre Raumecke. Den Keilwinkel (kleiner als  $180^\circ$ ) zwischen zwei aneinanderstossenden Scheiben bezeichnen wir mit  $\alpha$ .

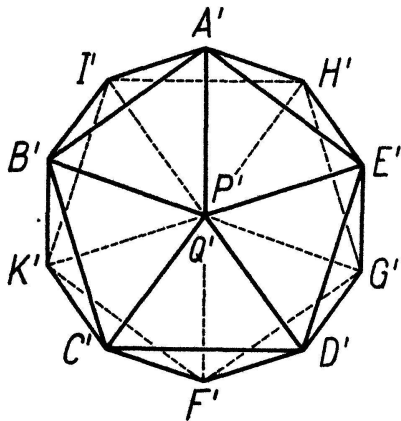
Wir nehmen ein zweites Exemplar  $Q(FGHK)$  eines solchen Pyramidenmantels und stellen dieses in einem zunächst noch beliebigen Abstand so unter das erste,

---

<sup>1)</sup> Eine exakte Behandlung findet man in dem Werke von W. KILLING und H. HOVESTADT, *Handbuch des mathematischen Unterrichts*, zweiter Band (Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1913), S. 289f. – Ferner sei auf das umfassende, reichhaltige Werk von H. S. M. COXETER, *Regular Polytopes* (Methuen & Co., London 1948), hingewiesen, in welchem der Autor auf Seite 13 folgende Bemerkung macht: “Sir D’ARCY W. THOMPSON once remarked to me that Euclid never dreamed of writing an Elementary Geometry: what EUCLID really did was to write a very excellent (but somewhat long-winded) account of the Five Regular Solids, for the use of Initiates.” – Vom Begriff der Regularität handelt die Arbeit: L. LOCHER-ERNST, *Wie viele regelmässige Polyeder gibt es?* Arch. Math. 3, 193–197 (1952).

<sup>2)</sup> Da unter den Seitenflächen eines Polyeders hier – im Unterschied zu den Untersuchungen gewisser Konfigurationen – nicht Vielecke schlechthin, sondern solche samt ihren inneren Punkten zu verstehen sind, verwenden wir die anschauliche Bezeichnung Scheibe.

dass  $PQ$  vertikal ist, die Spitze  $Q$  nach unten weist und die Grundrisse der Ecken  $F, G, H, I, K$  und  $A, B, C, D, E$  ein reguläres Zehneck bilden. Verbindet man die Grundecken der oberen Pyramide je mit den zwei nächstliegenden Grundecken der unteren Pyramide, so erhält man zwischen den beiden Pyramiden einen Kranz von zehn gleichschenkligen Dreiecken. Ist der Abstand der Grundfünfecke  $ABCDE, FGHIK$  hinreichend klein, so sind die Schenkel dieser Dreiecke kleiner als  $a$ ; ist der Abstand hinreichend gross, so sind jene Schenkel grösser als  $a$ . Jedenfalls haben wir so ein einfaches (das heisst einfach zusammenhängendes) Polyeder gewonnen, das topologisch-regulär ist: in jeder Ecke treffen sich gleich viele Kanten, und jede Scheibe ist von gleich vielen Kanten begrenzt.



Figur 1

Wir können den Abstand so wählen, dass die Dreiecke des Kranzes regulär werden. Es ergibt sich ein einfaches Polyeder aus zwanzig regulären Dreiecken. Es bleibt noch zu untersuchen, ob das Polyeder regulär ist, ob also auch die Raumecken regulär sind. Nach Konstruktion gilt dies für die Raumecken  $(P)$  und  $(Q)$ . Die Raumecken  $(A), (B), (C), (D), (E)$ , sind jedenfalls kongruent, da sie nach Konstruktion durch Drehung um  $PQ$  ineinander übergeführt werden können. Dasselbe gilt für  $(F), (G), (H), (I), (K)$ . Es genügt also, die Regularität von  $(A)$  und  $(F)$  zu beweisen.

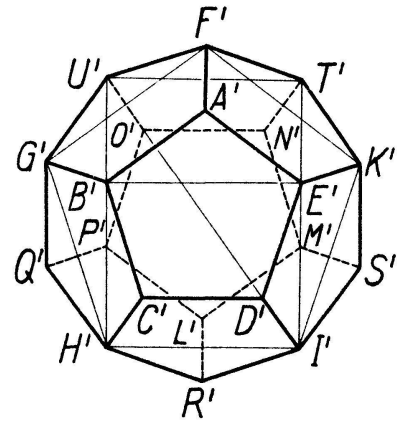
Diese ist nicht selbstverständlich, da die Figur aus fünf zusammengehefteten, sich nicht durchsetzenden regulären Dreieckscheiben nicht starr ist. (Ein kleines Modell hierzu ist nützlich.) Betrachten wir die Raumecke  $(A)$ . Die Scheiben  $ABP, AEP$  schliessen den Winkel  $\alpha$  ein, und die Pyramide  $A (BEHI)$  ist kongruent der Pyramide  $P (EBCD)$  (kongruente Trapeze als Grundflächen und kongruente Seitenflächen). Daraus schliesst man auf die Kongruenz von  $(A)$  mit  $(P)$ . Entsprechend ergibt sich die Kongruenz von  $(F)$  mit  $(Q)$ . Wir haben somit ein einfaches und reguläres Polyeder mit zwölf Ecken, zwanzig Scheiben und dreissig Kanten gewonnen. Natürlich gibt es auch andere, aber nicht reguläre, oder zwar reguläre, aber nicht konvexe Polyeder aus zwanzig kongruenten regulären Dreiecken. (Man kann der angegebenen Schlussweise, wie den folgenden, auch andere Wendungen geben.)

### Erste Konstruktion des Dodekaeders (Figur 2)

*Vorbemerkung:* Legt man drei reguläre fünfeckige Scheiben mit gleicher Kantenlänge  $a$  zu einer Raumecke  $(A)$  zusammen, so entstehen in den Endpunkten der drei von  $A$  ausgehenden Kanten  $AB, AE, AF$  reguläre dreikantige Raumecken  $(B), (E), (F)$ , die zu  $(A)$  kongruent sind.  $(A)$  und  $(B)$  stimmen nämlich in drei Stücken überein. Den Keilwinkel eines solchen Dreikants nennen wir  $\alpha$ .

Nun denken wir eine reguläre fünfeckige Scheibe  $ABCDE$  mit der Kante  $a$  horizontal gelegt (parallel zur Zeichnungsebene). In  $A$  legen wir zwei weitere solche Scheiben  $ABGUF, AEKTF$  nach unten an. Nach der Vorbemerkung bilden die drei von  $B$  ausgehenden Kanten eine zu  $(A)$  kongruente Ecke. An  $GBC$  lässt sich somit eine weitere Scheibe  $GBCHQ$  einsetzen; ebenso an  $DEK$  die Scheibe  $DEKSI$ . Nach

der Vorbemerkung haben wir in  $C$  und  $D$  zu  $(A)$  kongruente Raumecken erhalten. Die Kanten  $CH$ ,  $DI$  liegen also in derselben von der Geraden  $CD$  ausgehenden Halbebene, die nach unten mit der horizontalen Scheibe den Winkel  $\alpha$  bildet. Daraus folgt, dass sich an  $HCDI$  eine Scheibe  $HCDIR$  einsetzen lässt. Es ist ein kappenförmiges Gebilde aus sechs Scheiben entstanden. Durch Drehen um  $72^\circ$  um das Lot durch die Mitte der horizontalen Scheibe geht das Gebilde in sich über. Wir untersuchen den freien Kappenrand. Jedenfalls liegen die Ecken  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $I$ ,  $K$  gleich hoch, ebenso die Ecken  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $U$ . Im Grundriss erscheinen wegen der Symmetrie die Kanten  $UF$  und  $UG$ , aber auch  $FU$  und  $FT$  je gleich gross. Der zehneckige Kappenrand, dessen Kanten alle die Länge  $a$  haben, erscheint also auch im Grundriss als gleichseitiges Zehneck. Dieses ist sogar regulär, wie die folgende Betrachtung zeigt: Die Ebene durch die Kante  $AF$  und die Mitte von  $CD$  ist Symmetrieebene der Kappe.  $U$  und  $T$ ,  $B$  und  $E$ ,  $H$  und  $I$  entsprechen sich in dieser Symmetrie. Da  $UT$ ,  $BE$ ,  $HI$  gleich lang sind, bildet  $UT$  sowohl mit  $BE$  als auch mit  $HI$  je ein Rechteck. Die Grundrisse  $U'$ ,  $B'$ ,  $H'$  und  $T'$ ,  $E'$ ,  $I'$  liegen also je in einer Geraden; desgleichen  $F'$ ,  $B'$ ,  $Q'$  und  $T'$ ,  $A'$ ,  $G'$  usw. Jetzt nehmen wir das reguläre Fünfeck  $FGHIK$  mit seinem Umkreis zu Hilfe. Wegen der Symmetrie liegt der Grundriss  $U'$  von  $U$  auf der Mittelsenkrechten von  $A'B'$ , die auch  $D'$  und  $I'$  enthält. Der Grundriss des Dreiecks  $HIU$  hat einen rechten Winkel bei  $H'$  und bei  $I'$  den Winkel  $54^\circ$  (halber Fünfeckswinkel). Demnach sieht man von  $U'$  die Sehne  $H'I'$  des Umkreises von  $FGHIK$  unter  $36^\circ$ , das heisst,  $U'$  liegt auf diesem Kreise. Der Grundriss des Kappenrandes ist somit ein reguläres Zehneck.



Figur 2

Wir nehmen nun eine zur ersten kongruente Kappe und kehren sie um, so dass ihr Rand oben ist. In dieser Lage nennen wir das Gebilde einen Korb. Der bereits gezeichnete Grundriss der Kappe stellt auch den Grundriss des Korbes dar. Drehen wir diesen um  $36^\circ$  um die vertikale Achse durch die Bodenmitte, so erhält der Korb eine Lage, bei der durch geeignetes Heben oder Senken sein Rand in den Kappenrand passt. Damit haben wir ein einfaches reguläres Polyeder mit zwanzig Ecken, zwölf Flächen und dreissig Kanten erhalten.

*Bemerkung:* Es ist nicht selbstverständlich, dass in der spiegelbildlichen Lage von Kappe und Korb, obschon diese kongruent sind, die beiden Ränder aufeinandergelegt werden können. Das ergibt sich nur infolge der genannten Eigenschaften.

### Zweite Konstruktion des Ikosaeders (Figur 3)

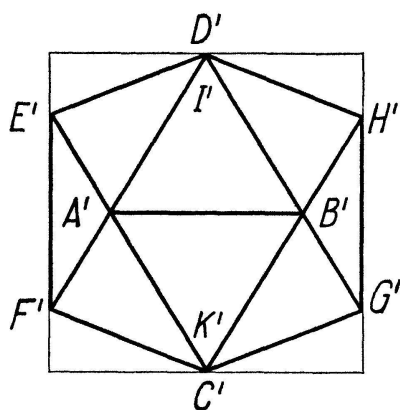
Die Kante  $AB = a$  denken wir uns in horizontaler Lage. An  $AB$  legen wir nach beiden Seiten nach unten reguläre dreieckige Scheiben  $ABC$ ,  $ABD$  unter gleichen Neigungen. Der Grundriss  $A'C'B'D'$  der Figur ist offenbar ein Rhombus. Die Neigung wählen wir so, dass die beiden Scheiben den Keilwinkel  $\alpha$  bilden, der aneinanderstossenden Seitenflächen einer regulären, fünfseitigen Pyramide mit regulären Scheiben als Seitenflächen zukommt. An die beiden so zusammengehefteten Scheiben



lassen sich also je drei weitere Scheiben derart ansetzen, dass  $A$  ( $BDEFC$ ) und  $B$  ( $ACGHD$ ) Mantelflächen einer solchen Pyramide sind.  $BDEFC$  und  $ACGHD$  sind also reguläre Fünfecke.

Die Diagonale  $DG$  ist parallel zur Kante  $AC$  (Fünfeck  $ACGHD$ ). Da nun  $D'B' \parallel A'C'$ , liegen  $D', B', G'$  also in einer Geraden. Ebenso gehören  $C', B', H'$  und  $E', A', C'$  und  $F', A', D'$  je einer Geraden an.

$E, F, G, H$  liegen gleich hoch; wegen der Symmetrie bilden diese Ecken ein Rechteck mit den Seiten  $a$  und  $d$ . Da auch  $CD$  horizontal liegt und die Länge  $d$  hat, lässt sich der Grundriss der acht Scheiben in ein Quadrat einbeschreiben, so dass  $EF$  und  $GH$  auf Gegenseiten liegen.



Figur 3

Die Scheiben  $EAD, ABD, BHD$  bilden aufeinanderfolgend den Winkel  $\alpha$ , und zwar in dem Sinne, dass sie Flächen eines regulären Pyramidenmantels  $D(EABHI)$  sind. Im Fünfeck  $EABHI$  ist  $AI$  parallel  $BH$  und  $BI$  parallel  $AE$ . Wegen  $B'H' \parallel A'D'$  und  $A'E' \parallel B'D'$  fällt somit der Grundriss  $I'$  von  $I$  mit  $D'$  zusammen. Die zwei Scheiben  $DHI$  und  $DIE$  erscheinen somit als Strecken. Analog haben wir einen regulären Mantel  $C(FABGK)$ , von dem die zwei Scheiben  $CGK$  und  $CKF$  als Strecken erscheinen. Das bisher konstruierte Gebilde besteht aus zwölf Scheiben.

Da  $EFGH$  ein Rechteck ist und sowohl  $C, K$  wie auch  $D, I$  zur Ebene des Rechtecks spiegelbildlich liegen, ist der freie Kantenrand  $EFKGHI$  des Gebildes kongruent dem Kantenzug  $EF CGHD$ . Man kann an den freien Rand somit eine Figur von acht Scheiben ansetzen, deren Grundriss mit der schon vorliegenden Zeichnung zusammenfällt. Damit ist das Ikosaeder gewonnen. Die Konstruktion zeigt, wie es einem Würfel von der Kantenlänge  $d$  einbeschrieben werden kann.

#### Zweite Konstruktion des Dodekaeders (Figur 4)

Wir denken uns die Strecke  $AB = a$  horizontal (parallel zur Zeichnungsebene). An  $AB$  setzen wir zwei reguläre fünfeckige Scheiben  $ABCDE$  und  $ABFGH$  unter gleichen Neigungen nach beiden Seiten nach unten derart an, dass die Kanten  $AE$  und  $AH$  den Fünfeckswinkel  $108^\circ$  bilden. Wegen der Symmetrie bilden  $BC$  und  $BF$  dann auch diesen Winkel. An  $EAH$  und  $CBF$  lassen sich somit reguläre Scheiben  $EAHIK$  bzw.  $CBFLM$  einfügen. Wir nennen die in  $AB$  zusammenstossenden Scheiben die Scheitelscheiben, die an  $EAH$  eingefügte die Stirnscheibe, die an  $CBF$  eingefügte die Hinterscheibe.

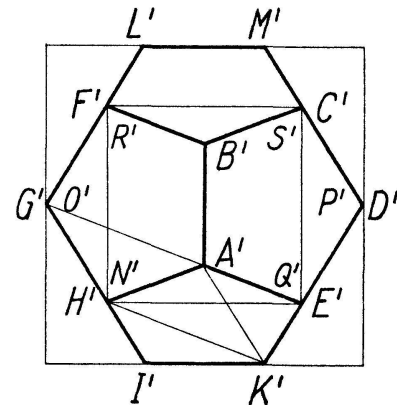
Die Ecken  $C, E, H, F$  liegen gleich hoch und bilden ein Quadrat mit der Seite  $d$  (Fünfecksdiagonale), das im Grundriss in wahrer Grösse erscheint. Ferner sind die Grundrisse von  $AE$  und  $BF$  parallel (gleiche Wechselwinkel), obschon diese Kanten windschief laufen. Ebenso gilt  $A'H' \parallel B'C'$ . Wegen  $A'G' \parallel B'F'$  und  $A'E' \parallel B'F'$  liegen die Grundrisse von  $A, E, G$  in einer Geraden. Aus ähnlichen Gründen gilt dies für  $H', A', D'$  und  $G', B', C'$ . Weil sowohl die Strecken  $H'K', A'E'$  als auch die Strecken  $A'G', B'F'$  sich verhalten wie  $d$  zu  $a$  und  $A'E'$  gleich  $B'F'$  ist, sind  $A'G'$

und  $H'K'$  gleich lang; wegen  $H'K' \parallel A'G'$  bilden sie ein Parallelogramm.  $H'G'$  ist also parallel zu  $A'K'$ . Wegen  $H'I' \parallel A'K'$  liegen die Grundrisse von  $G, H, I$  somit in einer Geraden. Dasselbe gilt für die Grundrisse von  $K, E, D$  und  $D, C, M$  und  $L, F, G$ .

Das Dreikant  $H(AIG)$  ist (Vorbemerkung, S. 74) kongruent dem Dreikant  $A(HBE)$ .  $GH, HI$  bilden also den Fünfeckswinkel  $108^\circ$ . Es lässt sich eine reguläre Scheibe  $GHINO$ , die rechte Schläfenscheibe, einsetzen, die im Grundriss als Strecke erscheint; entsprechend an  $KED$  die linke Schläfenscheibe  $KEDPQ$  sowie an  $DCM$  und  $LFG$  je eine Scheibe.

Die rechte Schläfenscheibe bildet mit der rechten Scheitelscheibe eine Raumecke  $G(FHO)$ , die kongruent  $A(HBE)$  ist. Wegen der Symmetrie erscheint die Kante  $GO$  als Winkelhalbierende von  $G'H', G'F'$  oder als Punkt. Da die Schläfenscheibe als Strecke erscheint, fällt  $O'$  mit  $G'$  zusammen. Weil  $GO$  parallel  $HN$  ist, fällt  $N'$  mit  $H'$  zusammen.

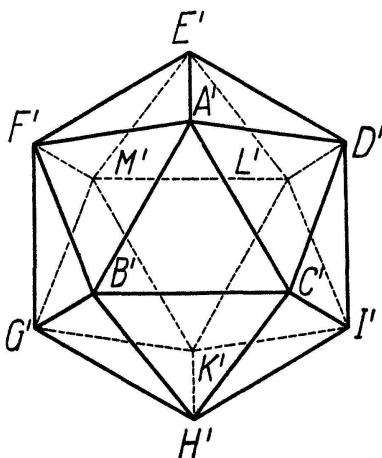
Die vier in  $GHI, KED, DCM, LFG$  eingesetzten Scheiben enthalten somit Diagonalen, nämlich  $HN, QE, CS, FR$ , die Kanten eines Würfels  $HECFRNQS$  darstellen. Der Kantenzug  $IKEDCMLFGH$  ist dem freien Kantenrand  $IKQPSMLRON$  kongruent, so dass an diesen freien Rand von unten vier Scheiben angesetzt werden können, deren Grundriss in der bereits konstruierten Figur mitgegeben ist. Diese Konstruktion des Dodekaeders zeigt, wie man es einem Würfel umbeschreiben oder einbeschreiben kann.



Figur 4

*Dritte Konstruktion des Ikosaeders (Figur 5)*

Wir denken uns eine reguläre dreieckige Scheibe  $ABC$  mit der Kante  $a$  in horizontaler Lage. An  $AB$  und  $AC$  heften wir je eine kongruente Scheibe  $ABF, ACD$  mit Neigung nach unten derart an, dass  $A(BCDEF)$  den Mantel einer regulären Pyramide darstellt. Das ist nur auf eine Weise möglich. Die zwei Scheiben  $CAB, AFB$  lassen sich als zwei Flächen eines zu  $A(BCDEF)$  kongruenten Pyramidenmantels  $B(CAFGH)$  auffassen. Nun sind die Scheiben  $DAC, ABC, BHC$  drei Flächen eines zu  $A(BCDEF)$  kongruenten Pyramidenmantels  $C(DABHI)$ .



Figur 5

Infolge der symmetrischen Lage in bezug auf die Mittelnormalebene der Kante  $BC$  sind die Grundrisse der Kanten  $ED, EF$  gleich lang. Aus analogen Gründen erscheinen auch  $FE$  und  $FG$  in gleicher Grösse. Das Sechseck  $D'E'F'G'H'I'$  ist also gleichseitig.

Da das Fünfeck  $BCDEF$  regulär ist, läuft  $EF$  parallel zu  $BD$ . Weil aber  $B'D'$  zu  $A'C'$  senkrecht ist, läuft somit auch  $E'F'$  senkrecht zu  $A'C'$ . Da aus dem gleichen Grunde  $D'E'$  senkrecht zu  $A'B'$  steht, bilden  $F'E', D'E'$  den Winkel  $120^\circ$ . Auf diese Weise ergibt sich, dass das

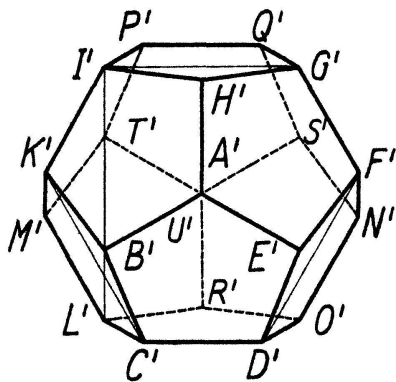
Sechseck  $D'E'F'G'H'I'$  regulär ist. Dabei haben die Ecken  $D, F, H$  dieselbe Höhe, ebenso  $E, G, I$ .

Das bisher konstruierte, aus zehn Scheiben bestehende Gebilde nennen wir kurz Kappe. Jetzt nehmen wir eine zu dieser kongruente Kappe und stellen sie so hin, dass wir in das Innere sehen; in dieser umgekehrten Lage nennen wir das zweite Exemplar Korb. Kappe und Korb lassen sich mit ihren freien Rändern zur Deckung bringen. Das ist nicht selbstverständlich, aber eine Folge der bewiesenen Eigenschaften des räumlichen Sechsecks  $DEFGHI$ . Damit haben wir wieder mit zwanzig Scheiben ein einfaches und reguläres Polyeder konstruiert. Zum Beispiel ist die Raumecke ( $E$ ) regulär, da die zwei Scheiben  $FAE, ADE$  des Mantels  $E$  ( $FADLM$ ) den richtigen Keilwinkel bilden.

### Dritte Konstruktion des Dodekaeders (Figur 6)

Wir setzen drei kongruente, reguläre fünfeckige Scheiben (Kante  $a$ , Diagonale  $d$ ) zu einer Raumecke ( $A$ ) zusammen und geben dem Gebilde eine solche Lage, in der die drei Kanten  $AB, AE, AH$  gleiche Neigungen von  $A$  aus nach unten haben. Die Ecken  $B, E, H$ , die ein reguläres Dreieck mit der Seite  $d$  bilden, liegen dann gleich hoch. In dieser Lage erscheinen die Kanten  $CD, FG, IK$  im Grundriss in wahrer Grösse, da auch deren Endpunkte alle dieselbe Höhe haben.

An den Zug  $KBC$  lässt sich eine Scheibe  $KBCLM$  einsetzen; ebenso an  $DEF$  die Scheibe  $DEFNO$  und an  $GHI$  die Scheibe  $GHIPQ$ . Die Dreikante  $C$  ( $BDL$ ) und  $D$  ( $CEO$ ) sind kongruent dem Dreikant  $A$  ( $BEH$ ) (Vorbemerkung, S. 74). Die Kanten  $CL$  und  $DO$  liegen also, da sie beide nach unten weisen, in derselben, von der Geraden  $CD$  begrenzten Halbebene. Da sie mit  $CD$  den Fünfeckswinkel  $108^\circ$  bilden, lässt sich an  $LCDO$  die Scheibe  $LCDOR$  einsetzen; ebenso an  $NFGQ$  die Scheibe  $NFGQS$  und an  $PIKM$  die Scheibe  $PIKMT$ .



Figur 6

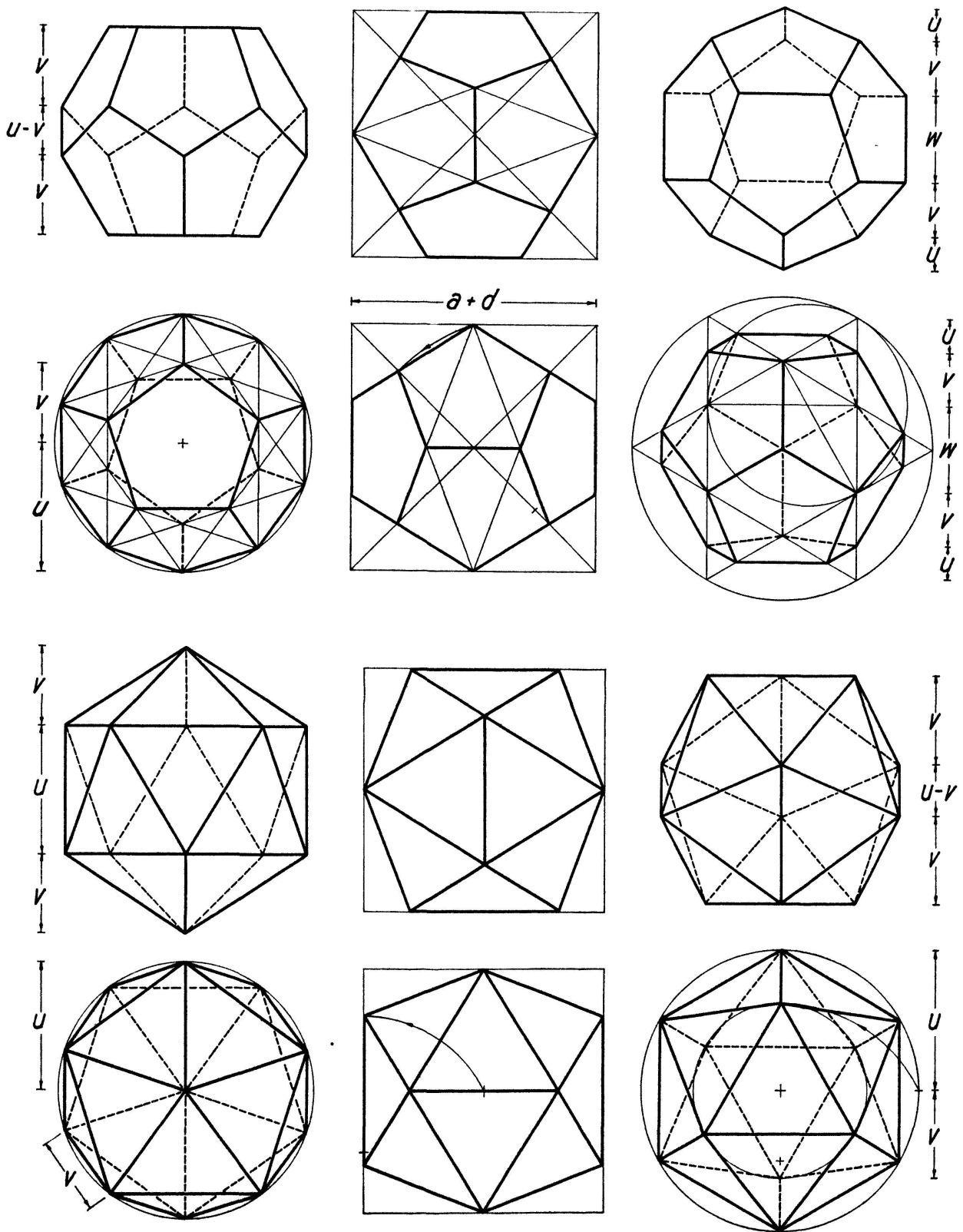
Jetzt betrachten wir das in wahrer Grösse erscheinende Sechseck  $CDFGIK$ . Seine Seiten laufen normal zu  $AH$  bzw.  $AE, AB$ . Alle seine Winkel sind also  $120^\circ$ , und seine Seiten haben abwechselnd die Längen  $a$  und  $d$ . Genau dasselbe gilt aber auch für das Sechseck  $PQNOLM$ . Da die Grundrisse dieser kongruenten

Sechsecke denselben Mittelpunkt haben, fallen die Grundrisse ihrer Umkreise zusammen. Ihre Lage zum Dreikant  $A$  ( $BEH$ ) zeigt, dass jedes durch Drehen um  $60^\circ$  in das andere übergeführt werden kann. Der Grundriss des Zwölfecks  $CDONFGQPIKML$  zeigt also lauter gleiche Winkel  $150^\circ$ .

Nun bilden  $B'I' \parallel A'H'$  und  $M'K'$  mit  $K'I'$  supplementäre Gegenwinkel, also ist  $M'K'$  parallel  $B'I'$ . Da die Diagonale  $BL$  parallel zur Seite  $KM$  läuft, liegen  $I', B', L'$ , in einer Geraden, der wegen  $KM \parallel TI$  auch  $T'$  angehört. Entsprechend liegen  $M', B', R', D'$  und  $C', R', E', N'$  usw. je in einer Geraden.

Der noch freie Rand der bisher zusammengehefteten Scheiben, nämlich  $MLRONSQPT$ , ist kongruent dem Kantenzug  $CDEFGHIKB$ . Es lassen sich ihm also noch drei

*Konstruktionen des Dodekaeders und Ikosaeders*



Scheiben einfügen, die den gemeinsamen Eckpunkt  $U$  haben, dessen Grundriss mit  $A'$  zusammenfällt. Die Regularität aller Raumecken folgt aus der Vorbemerkung, Seite 74.

### *Zusammenstellung*

Es folgen Anleitungen zu möglichst übersichtlichen Konstruktionen (Figuren auf Seite 79). Für die Grundrisse ergeben sich die Beweise aus den vorstehenden Erläuterungen. Um die Höhen im Aufriss zu erhalten, braucht man nur den folgenden einfachen Satz auf geeignete, zueinander senkrechte Kanten oder Flächendiagonalen anzuwenden: Wenn zwei gleiche Strecken sich normal kreuzen und ihre Grundrisse parallel sind, so ist die Länge des Grundrisses der einen Strecke gleich dem Höhenunterschied der Endpunkte der anderen Strecke. Die angegebenen Konstruktionen können auch zu dankbaren Übungen verwendet werden.

*Dodekaeder auf Fläche.* Grundriss: Einem Kreis vom Radius  $u$  wird ein regelmässiges Zehneck einbeschrieben. Dessen Ecken sind die Grundrisse von zehn Dodekaederecken. Bedeuten  $1, 2, 3, \dots, 10$  diese Ecken in natürlicher Reihenfolge auf dem Kreise, so verbinde man  $1$  mit  $4$ ,  $4$  mit  $7$ ,  $7$  mit  $10$ ,  $10$  mit  $3$  usf. (je zwei Ecken auslassen). Die inneren zehn Ecken des derart erhaltenen Sternzehnecks, die auf dem Kreise vom Radius  $v$  liegen, sind die Grundrisse der übrigen zehn Dodekaederecken.

Aufriss: Gesamthöhe  $u + v$ ; die Höhenunterschiede der Ecken betragen  $v, u - v, v$ .

Soll das Dodekaeder die Kante  $a$  haben, so hat man als Radius  $u$  den Umkreisradius eines regelmässigen Fünfecks mit der Seite  $d$  (Diagonale eines regelmässigen Fünfecks mit der Seite  $a$ ) zu wählen.

*Dodekaeder auf Kante.* Grundriss: In einem Quadrat werden die Diagonalen gezeichnet und deren Hälften im goldenen Schnitt geteilt, so dass die grösseren Abschnitte von der Quadratmitte ausgehen. Dann verbindet man die Mitten zweier Gegenseiten des Quadrates mit den erhaltenen Teilpunkten auf den Diagonalen.

Aufriss: Kongruent dem Grundriss, aber um  $90^\circ$  gedreht.

Soll das Dodekaeder die Kante  $a$  haben, so hat man als Quadratseite die Länge  $a + d$  zu wählen.

*Dodekaeder auf Ecke.* Grundriss: Man schreibt einem Kreis zwei einen regelmässigen Stern bildende gleichseitige Dreiecke ein. Die Ecken des entstehenden inneren Sechsecks sowie der Kreismittelpunkt sind die Grundrisse von Dodekaederecken. Der Hilfskreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt von zwei der kürzeren Diagonalen des inneren Sechsecks ist und der durch die diesem Schnittpunkt nächstliegende Ecke des Sterns geht, schneidet eine der Dreieckseiten in zwei Punkten, die Dodekaederecken darstellen. Der zum Ausgangskreis konzentrische Kreis durch diese Punkte liefert die Grundrisse der übrigen Ecken.

Aufriss: Die Gesamthöhe ist gleich der Seite der anfangs gezeichneten beiden Dreiecke. Die Grundrisse der Dodekaederecken auf einer solchen Seite bilden auf dieser die Abschnitte  $u, v, w, v, u$ . Diese sind auch die Höhenunterschiede der Ecken.

Soll das Dodekaeder die Kante  $a$  haben, so hat man als Radius des Ausgangskreises die Strecke  $d$  (Diagonale eines regelmässigen Fünfecks mit der Seite  $a$ ) zu wählen.

*Ikosaeder auf Ecke.* Grundriss: Einem Kreis vom Radius  $u$  wird ein regelmässiges Zehneck (Seite  $v$ ) einbeschrieben.

Aufriss: Gesamthöhe  $v + u + v$ ; die Höhenunterschiede der Ecken betragen  $v, u, v$ .

Soll das Ikosaeder die Kante  $a$  haben, so ist  $u$  als Umkreisradius eines regelmässigen Fünfecks mit der Seite  $a$  zu wählen.

*Ikosaeder auf Kante.* Grundriss: In einem Quadrat wählt man ein Paar von Gegenseiten und teilt die beiden Hälften jeder Seite dieses Paares je im goldenen Schnitt, so dass die grösseren Abschnitte von der Seitenmitte ausgehen. Die vier erhaltenen Teilpunkte und die Mitten der beiden übrigen Quadratseiten sind die Grundrisse von Ikosaederecken. Verbindet man die Teilpunkte mit den genannten Mitten, so erhält man auch die Grundrisse der übrigen Ecken.

Aufriss: Kongruent dem Grundriss, aber um  $90^\circ$  gedreht.

Soll das Ikosaeder die Kante  $a$  haben, so hat man als Quadratseite die Diagonale  $d$  des regelmässigen Fünfecks mit der Seite  $a$  zu wählen.

*Ikosaeder auf Fläche.* Grundriss: Einem Kreis vom Radius  $u$  wird ein regelmässiges Sechseck einbeschrieben; dessen Ecken sind die Grundrisse von sechs Ikosaederecken. Die Grundrisse der übrigen Ecken liegen auf einem konzentrischen Kreise, dessen Radius  $v$  der grössere Abschnitt des im goldenen Schnitt geteilten Radius  $u$  ist. (Eine günstige Konstruktion zeigt die Figur.)

Aufriss: Gesamthöhe  $u + v$ . Die Höhenunterschiede der Ecken betragen  $v, u - v, v$ .

Soll das Ikosaeder die Kante  $a$  haben, so ist  $u$  als Umkreisradius eines regelmässigen Dreiecks mit der Seite  $d$  (Diagonale eines regelmässigen Fünfecks mit der Seite  $a$ ) zu wählen.

L. LOCHER-ERNST.

## Über die Hüllkurven von Kepler-Bahnen fester Energie, welche eine feste Kepler-Bahn berühren

### 1. Einleitung

Die zu einem festen Zentralkörper  $S'$  gehörigen *komplanaren Kepler-Bahnen fester Gesamtenergie  $h$*  sind bekanntlich *monofokale Kegelschnitte mit  $S'$  als gemeinsamem Brennpunkt und mit fester Hauptachsenlänge  $2a$* . Je nachdem die Gesamtenergie  $h < 0, = 0, > 0$  ist, sind die Kepler-Bahnen Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.

Diese mechanische Bedeutung der monofokalen Kegelschnitte mit fester Hauptachsenlänge  $2a$  rechtfertigt das Interesse, das auch der Geometer dieser Kurvenklasse zuwendet.

*In den folgenden Darlegungen handelt es sich um solche monofokale Kegelschnitte  $k'_a$  der festen Hauptachsenlänge  $2a$ , welche einen festen Kegelschnitt  $k'$  mit dem gleichen Brennpunkt  $S'$  berühren.*

Wir wollen beweisen (Figur 1):

*Satz 1. Die Hüllkurve  $h'$  dieser Kegelschnitte  $k'_a$  ist ein zu  $k'$  konfokaler Kegelschnitt, der mit  $k'$  ausser dem Brennpunkt  $S'$  noch einen zweiten Brennpunkt  $T'$  gemeinsam hat.*