Über das Rechnen mit Operatoren

Autor(en): **Moppert, K.F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **9 (1954)**

Heft 4

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17360

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

El. Math. | Band IX | Nr. 4 | Seiten 73–96 | Basel, 15. Juli 1954

Über das Rechnen mit Operatoren

Der Zweck des nachfolgenden Artikels besteht darin, den praktisch tätigen Mathematiker darauf aufmerksam zu machen, dass er häufig Operatorenrechnung anwendet, ohne sich dessen bewusst zu werden; dass ihm andererseits dieses Bewusstsein zu tieferer Erkenntnis der Zusammenhänge verhelfen kann. Den Mathematiklehrer mag dieser Artikel veranlassen, den Gesichtspunkt der Operatorenrechnung in den oberen Klassen des Gymnasiums als logische Fortsetzung des Funktionsbegriffs erscheinen zu lassen. Allerdings, Operatorenrechnung ist ein «weites Feld»; der Titel dieses Artikels ist fast eine Anmassung. Was folgt, soll als Anregung, nicht als Überblick aufgefasst werden.

Was ist ein Operator? Diese Frage wird wohl am klarsten beantwortet, wenn man sich an die Frage erinnert: Was ist eine Funktion? Die Antwort auf die zweite Frage ist jedem geläufig. Sind nämlich zwei Mengen M und M' gegeben, die beziehentlich Elemente m und m' enthalten, und ist jedem Element m ein Element m' zugeordnet, so haben wir eine Funktion auf M. Nun ist in dieser allgemeinen Definition des Funktionsbegriffs diejenige des Operators als *Spezialfall* bereits enthalten: Die Funktion ist nämlich dann Operator, wenn sowohl die Elemente m als auch m' selbst Funktionen sind.

Wir erläutern die abstrakte Definition des Operatorbegriffs an einigen Beispielen.

1. Sei M die Menge der Funktionen des reellen Argumentes x, die für $0 \leqq x \leqq 1$ definiert sind. Sei $f(x)$ eine solche Funktion. Dieser Funktion wird durch die Vorschrift

$$F(x) = T\{f(x)\} = 2\,f(x) \tag{1}$$

eine andere zugeordnet; dies ist also ein einfaches Beispiel eines Operators. Als «Argumentvorrat» haben wir hier alle zwischen 0 und 1 definierten Funktionen, als Wertevorrat dieselbe Menge. Es ist klar, dass wir hier Eineindeutigkeit zwischen Argumentfunktion und Funktionfunktion haben.

2. Sei M dieselbe Menge wie vorher, sei $a(x)$ eine feste, zwischen 0 und 1 definierte Funktion. Sei jetzt

$$F(x) = T\{f(x)\} = a(x)\,f(x). \tag{2}$$

Hier haben wir bereits ein einfaches Beispiel eines Operators mit einem «Kern», nämlich der Funktion $a(x)$ [natürlich ist im vorigen Beispiel $a(x) = 2$].

3. Anwendbar auf differenzierbare Funktionen ist der Operator

$$F(x) = T\{f(x)\} = f'(x). \tag{3}$$

4. Anwendbar auf stetige Funktionen ist der Operator

$$F(x) = T\{f(x)\} = \int_a^x f(\xi)\, d\xi . \tag{4}$$

Für praktische Anwendung wichtig sind die folgenden Operatoren:

5. Es ist bei vorgegebenem $K(x, t)$

$$F(x) = T\{f(x)\} = \int_a^b K(x, t)\, f(t)\, dt \tag{5}$$

ein Integraloperator mit dem «Kern» $K(x, t)$.

6. Es ist bei vorgegebenem $g(t)$

$$F(x) = T\{f(x)\} = \int_a^b g(x - t)\, f(t)\, dt = g * f \tag{6}$$

ein «Faltungsoperator».

Hier kann natürlich (6) als Spezialfall von (5) aufgefasst werden. Ebenso ist (4) Spezialfall von (6) für $a \leqq x \leqq b$ [und damit wieder von (5)], wenn die Funktion g in (6) definiert ist durch $g(\xi) = 0$ für $\xi < 0$; $g(\xi) = 1$ für $\xi \geqq 0$.

Aus dem Gesagten ist bereits klar, dass sich in der Operatorenrechnung dieselben Fragen aufdrängen wie in der klassischen Funktionenlehre, zum Beispiel die Frage nach dem Umkehroperator eines gegebenen Operators. Hier ist zum Beispiel (3) der Umkehroperator von (4), während (4) nur unter besonderen Voraussetzungen der Umkehroperator von (3) ist.

Besonders einfach zu behandeln sind die sogenannten *linearen Operatoren*, das heisst Operatoren $T\{f(x)\}$, für die

$$T\{a\, f(x) + b\, g(x)\} = a\, T\{f(x)\} + b\, T\{g(x)\}$$

gilt. Alle bisher genannten Beispiele waren lineare Operatoren.

Ein spezifisches Hilfsmittel der Operatorenrechnung ist das Rechnen mit den *Eigenwerten* und *Eigenfunktionen* eines Operators. Sei nämlich T ein gegebener Operator. Ist dann für eine gewisse Zahl k die Funktionalgleichung

$$T\{f(x)\} = k\, f(x)$$

lösbar, so heisst k Eigenwert, und eine lösende Funktion f heisst zugehörige Eigenfunktion. Für den Operator (3) ist jede Zahl k Eigenwert; die zugehörige Eigenfunktion ist e^{kx}. Beim Operator (1) gehört zum Eigenwert 2 jede beliebige Funktion, jede andere Zahl ist Eigenwert mit der Eigenfunktion $f(x) \equiv 0$.

Die Laplace-Transformation ist ein Operator mit der Eigenschaft, dass die Funktionfunktion im wesentlichen mit x multipliziert wird, wenn man die Argumentfunktion differenziert. Darauf beruht ihre Anwendbarkeit auf Differentialgleichungen. Sie ist ein Operator vom Typus (5), also linear. Durch die Bedingung der Linearität ist sie dann aber, zusammen mit der obigen Bedingung, im wesentlichen auch bestimmt. Denn zunächst ist klar, dass $T\{f'\} = x\,T\{f\}$ unlösbar ist, da sonst für $f = e^x$ folgen würde:

$$T\{e^x\} = x\,T\{e^x\}.$$

Also muss man den Ansatz versuchen: $T\{f'\} = x\,T\{f\} - A$. Für $f = e^{cx}$ folgt wegen der verlangten Linearität:

$$c\,T\{e^{cx}\} = x\,T\{e^{cx}\} - A, \quad \text{also} \quad T\{e^{cx}\} = \frac{-A}{c-x}.$$

Insbesondere, wenn wir von jetzt an $A = f(0)$ setzen:

$$T\{e^{cx}\} = \frac{-1}{c-x}.$$

Also gilt für $c = 0$:

$$T\{1\} = \frac{1}{x} \quad \text{und weiter} \quad T\{1\} = T\{x'\} = x\,T\{x\} + 0; \quad \text{hieraus} \quad T\{x\} = \frac{1}{x^2} \quad \text{usw.}$$

Dadurch ist die Transformation jeder Funktion, die in eine Potenzreihe entwickelbar ist, gegeben.

Ich will nun ein einfaches Beispiel skizzieren, das für die allgemeine Methode wohl recht instruktiv ist.

Sei AB ein einseitig gekrümmter Kurvenbogen, bei dem die Tangenten in den Endpunkten A und B aufeinander senkrecht stehen. Von diesem Bogen werde die Evolvente gebildet mit dem Punkt A als Aufpunkt. Es entsteht ein Bogen $A'B$, der die für den Bogen AB genannten Eigenschaften auch hat. Nun wird vom Bogen $A'B$ die Evolvente gebildet mit B als Aufpunkt; es entsteht der Bogen $A'B'$. Es gilt nun der folgende Satz von JOHANN BERNOULLI: Wird dieses Verfahren unbegrenzt fortgesetzt, so konvergiert es, die Grenzkurve ist ein Zykloidenbogen, gleichgültig von welcher Kurve AB ausgegangen wird[1]).

Sei $y = f(x)$ die Bogenlänge der Kurve vom Aufpunkt aus gerechnet, x sei der Winkel zwischen der Kurvennormalen im variabeln Punkt und der Kurvennormalen im Aufpunkt. Der Übergang von der Kurve AB zur Kurve $A'B'$ bedeutet, dass auf die Funktion ein Operator angewandt wird; eine Iterierung des Verfahrens bedeutet eine Iterierung des Operators. Es zeigt sich, dass dieser Operator die Eigenwerte $1/(2n+1)^2$ hat $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; die zugehörigen Eigenfunktionen sind die Funktionen $1 - \cos(2n+1)\,x$. Diese stellen im fraglichen Intervall ein abgeschlossenes (nicht orthogonales) System dar[2]); jede Ausgangsfunktion kann also nach ihm entwickelt werden. Bei Anwendung des Operators bleibt also der Anteil von $a\,(1 - \cos x)$ an der Ausgangsfunktion erhalten, während der Anteil aller andern Eigenfunktionen verkleinert wird, weil ihre Eigenwerte kleiner als 1 sind. Somit konvergiert die Grenzfunktion gegen $a\,(1 - \cos x)$, das heisst gegen die Funktion des Zykloidenbogens.

Die Fourier-Analyse der Ausgangsfunktion erscheint hier als das adäquate Mittel; es ist interessant, zu wissen, dass EULER sie bei diesem Problem *ad hoc* erfunden hat[3]).

---

[1]) Man erinnere sich hier an die Huygenssche Korrektur der Pendeluhr (für grosse Pendelschwingungen). Möglicherweise wurde BERNOULLI dadurch zu seiner Entdeckung angeregt.

[2]) Es zeigt sich hier, dass die folgende Frage in der Operatorenrechnung fundamental ist: *Wie muss ein Operator beschaffen sein, damit das System seiner Eigenfunktionen abgeschlossen ist?*

[3]) Auf dieses Problem wurde ich durch einen Seminarvortrag von Herrn Dr. A. HOWALD unter Herrn Prof. Dr. A. SPEISER aufmerksam gemacht. Herrn Prof. SPEISER verdanke ich auch den historischen Hinweis.

Zum Schluss geben wir noch einen Beweis eines Spezialfalls des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nämlich des folgenden Satzes: Konvergiert die Summe unabhängiger stochastischer Variablen, die alle dieselbe Verteilungsfunktion mit dem Mittelwert 0 haben, gegen eine bestimmte Grenzfunktion, so ist diese Grenzfunktion die Normalverteilung.

Seien $x_1, x_2, \ldots$ unabhängige stochastische Variablen, die alle dieselbe Verteilungsfunktion und alle den Mittelwert 0 haben. Sei weiter $\alpha_n(t)$ die charakteristische Funktion der Summe von n dieser Variablen. Bekanntlich ist

$$\alpha_{2n}(t) = [\alpha_n(t)]^2.$$

Wird die Anzahl der Summanden verdoppelt, so wird also auf die Funktion $\alpha_n(t)$ der Operator

$$\alpha_{2n}(t) = T\{\alpha_n(t)\} = [\alpha_n(t)]^2$$

angewandt. Soll nun $\alpha_n(t) \to \alpha(t)$ gelten, so soll sich durch diesen Übergang nur die Streuung, nicht aber die Gestalt dieser Funktion verändern. Diese Grenzfunktion muss also der Funktionalgleichung

$$\alpha\left(t\sqrt{2}\right) = [\alpha(t)]^2$$

genügen. Nehmen wir Logarithmen, so folgt

$$\ln\alpha\left(t\sqrt{2}\right) = 2\ln\alpha(t).$$

Hieraus (Potenzreihe!)

$$\ln\alpha(t) = A\,t^2.$$

Die Konstante muss in diesem Zusammenhang negativ sein, wir setzen also $A = -\sigma^2/2$. Damit haben wir für die charakteristische Funktion $\alpha(t)$ diejenige der Normalverteilung:

$$\alpha(t) = e^{-\sigma^2 t^2/2}\ ^{1)}.$$

K. F. MOPPERT, Basel.

Kleine Mitteilungen

Einige Parabeleigenschaften[2]

(6) Es ist (Figur 2) $\overline{K3} = \overline{S3} - \overline{SK} = p + x - p = x$. Für den Mittelpunkt M des Krümmungskreises im Parabelpunkt P als Ähnlichkeitszentrum gilt ferner

$$\overline{3,4} : \overline{PQ} = 2x : (2x + p) = x : \left(x + \frac{p}{2}\right) = \overline{K3} : \overline{PP}.$$

[1]) Vgl. hierzu G. PÓLYA, Astron. Nachr. *209*, 111 (1919); H. CRAMÉR, *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton University Press, Princeton 1946), Seite 214.

[2]) Siehe R. JAKOBI, *Einige Parabeleigenschaften*, El. Math. *8*, Nr. 5, 107 (1953).