

# Natürliche Umformung einer Kurve in ihre Evolute

Autor(en): **Locher-Ernst, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **8 (1953)**

Heft 4

PDF erstellt am: **16.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16918>

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math.

Band VIII

Nr. 4

Seiten 73–96

Basel, 15. Juli 1953

## Natürliche Umformung einer Kurve in ihre Evolute

Wie lässt sich eine ebene Kurve auf natürliche Weise in ihre Evolute umformen? Die folgenden Bemerkungen geben eine naheliegende Antwort auf diese Frage. Die Evolute ist die Hüllkurve der Schar der Normalen. Dreht man jede Kurventangente um ihren Berührungspunkt im gleichen Drehsinne um den festen Winkel  $\alpha$ , so erhält man eine Schar von Geraden. Ist der feste Winkel ein rechter, so hat man als Hüllkurve der Schar die Evolute. Für jeden festen Winkel  $\alpha$  ergibt sich eine bestimmte Hüllkurve, eine *Evolutoide* der Kurve. Wächst  $\alpha$  von 0 bis  $\pi$ , so verwandelt sich die Ausgangskurve ( $\alpha = 0$ ) über verschiedene Evolutoiden in die Evolute ( $\alpha = \pi/2$ ) und weiter über Evolutoiden zurück in die Ausgangskurve ( $\alpha = \pi$ ).

Die vorliegenden Figuren – für den Zeichenunterricht eine interessante, aber nicht leichte Aufgabe – zeigen die Verhältnisse für eine Ellipse (Figur a,  $\alpha = 0$ ). Dreht man jede Tangente um ihren Berührungspunkt im Uhrzeigersinne um den Winkel  $\alpha$ , so ergeben sich für  $\alpha = 30^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ$  und  $150^\circ$  die Figuren b bzw. c bis h. Die Hüllkurven verwandeln sich ausgehend von der Ellipse über die Evolute (Figur e) zurück in die Ellipse.

Es scheint zunächst ziemlich schwierig zu sein, die Umformung im einzelnen übersehen zu können. Genauer betrachtet, erweist sich diese Verwandlung der Kurve in ihre Evolute als ein sehr einfacher Vorgang.

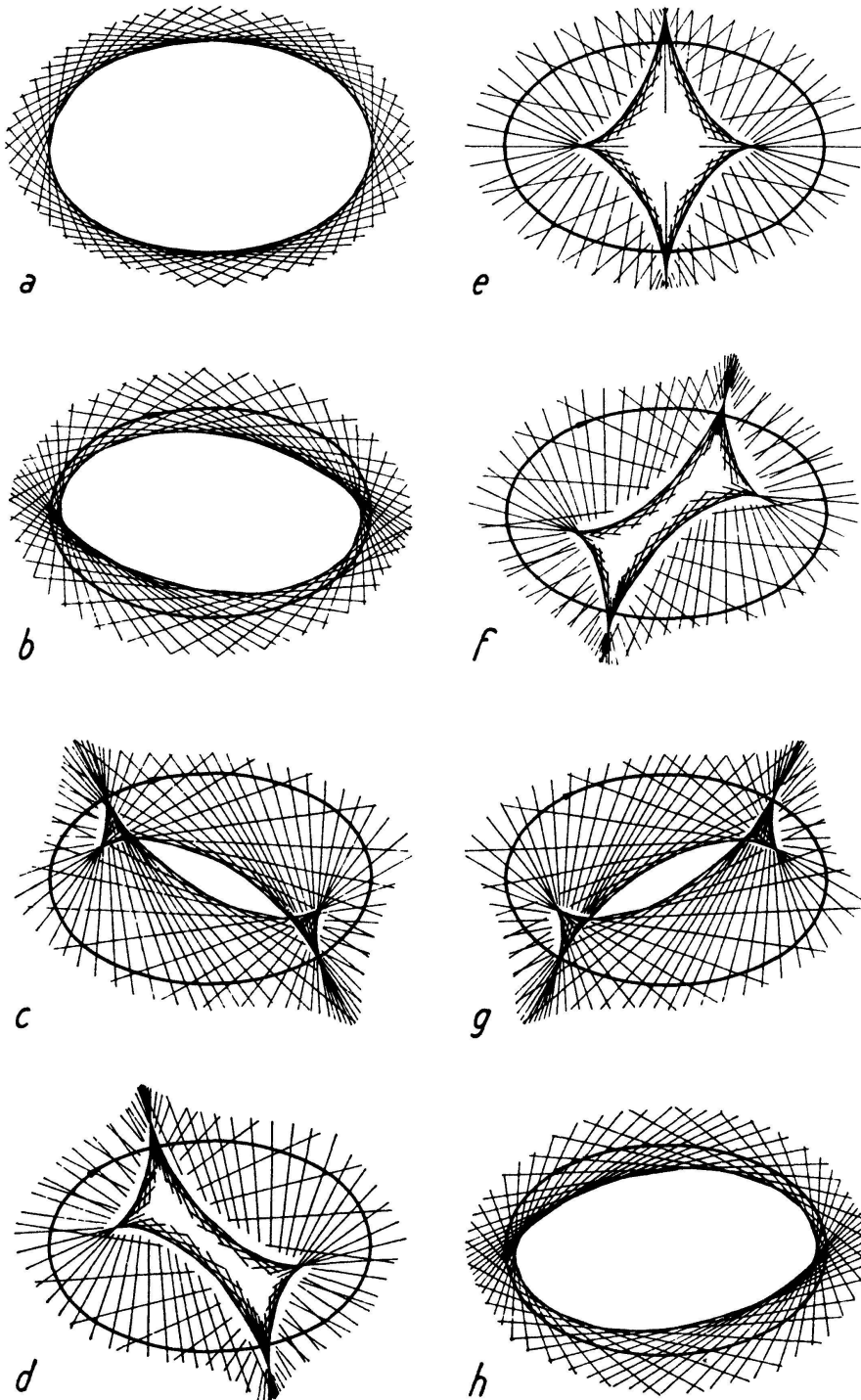
Ist  $P$  irgendein Punkt der Kurve, so bezeichnen wir mit  $t_P$  die Tangente in  $P$ , mit  $n_P$  die Normale in  $P$ , mit  $M_P$  den Mittelpunkt des Krümmungskreises in  $P$ , mit  $\varrho_P$  dessen Radius und mit  $g_P$  die Gerade, die aus  $t_P$  durch Drehung um  $P$  im gewählten positiven Sinne um den festen Winkel  $\alpha$  hervorgeht.

Von der betrachteten Kurve setzen wir also voraus, dass sie nicht nur in jedem Punkte eine mit diesem stetig sich ändernde Tangente, sondern auch eine Evolute besitze. Sind  $P, Q$  zwei beliebige Kurvenpunkte und  $N$  der Schnittpunkt der Normalen  $n_P$  und  $n_Q$ , so konvergiert nach Voraussetzung  $N$  gegen einen bestimmten Punkt  $M$  und der Kreis durch  $P, Q, N$  gegen einen bestimmten Kreis  $k_P$ , wenn  $Q$  auf der Kurve gegen  $P$  hinstrebt.  $PM = \varrho_P$  ist Durchmesser von  $k_P$ . Nun gilt:

*Fällt man vom Krümmungsmittelpunkt  $M$  des Kurvenpunktes  $P$  das Lot auf  $g_P$ , so ist der Fusspunkt  $X$  dieses Lotes der Berührungspunkt der Geraden  $g_P$  mit der von ihr erzeugten Hüllkurve<sup>1)</sup>.*

<sup>1)</sup> Bemerkung: Nach H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig 1908), Seite 177, war dieser Satz bereits RÉAUMUR (1709) bekannt.

*Beweis:* Wir nehmen ausser  $P$  noch einen Kurvenpunkt  $Q$ .  $N$  sei der Schnittpunkt der Normalen  $n_P, n_Q$ . Den Schnittpunkt der Geraden  $g_P, g_Q$  durch  $P$  bzw.  $Q$  bezeichnen wir mit  $G$ . Die Geraden  $n_P, g_P$  und  $n_Q, g_Q$  bilden gleiche Peripheriewinkel [nämlich



$(\pi/2) - \alpha]$  im Kreise  $(P, Q, N)$  durch die drei Punkte  $P, Q, N$ . Da die Schenkel  $n_P, n_Q$  beide durch den Kreispunkt  $N$  gehen, liegt auch der Schnittpunkt  $G$  der beiden anderen Schenkel  $g_Q, g_P$  auf  $(P, Q, N)$ . Strebt nun  $Q$  auf der Kurve gegen  $P$ , so geht  $(P, Q, N)$  in  $k_P$  über, und  $G$  muss gegen einen Punkt  $X$  dieses Kreises konvergieren.

$X$  ist als Grenzlage des Schnittpunktes  $G = (g_P, g_Q)$  für  $Q \rightarrow P$  der Berührungspunkt der Geraden  $g_P$  mit der von ihr erzeugten Hüllkurve. Somit erhält man  $X$  als Fusspunkt des Lotes vom Krümmungsmittelpunkt  $M$  auf  $g_P$ .

Denken wir uns für jeden Kurvenpunkt  $P$  den Kreis  $k_P$  über  $PM = \rho_P$  als Durchmesser konstruiert. Es folgt:

*Bei der Umwandlung einer Kurve über ihre Evolutoiden in ihre Evolute läuft jeder Punkt auf einem Kreise.*

Weiter erhält man sofort:

*Dreht sich  $g_P$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  aus der Anfangslage  $t_P$  um  $\pi$ , so durchläuft der von  $P$  ausgehende Punkt  $X$  mit konstanter Geschwindigkeit  $\omega \rho_P$  den Kreis  $k_P$ .*

Diese Sätze erlauben, die Umformung im einzelnen zu verfolgen und sich ein anschauliches Bild von ihr zu verschaffen. L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

## Sur l'équivalence des polyèdres à dièdres rationnels

Deux polyèdres sont dits équivalents (mod 0) si l'on peut construire l'un avec les morceaux de l'autre augmenté d'un cube. Pour que deux polyèdres soient équivalents, il faut qu'ils vérifient les conditions de DEHN. Nous avons montré<sup>1)</sup> que si deux polyèdres remplissent ces conditions, leur différence est équivalente à un polyèdre dont tous les dièdres sont rationnels. Nous voulons montrer maintenant que:

*Un polyèdre dont tous les dièdres sont rationnels est équivalent à un polyèdre dont tous les dièdres sont des multiples de  $\pi/4$ .*

Avant de passer à la démonstration elle-même, nous établirons deux propriétés particulières dont nous aurons besoin par la suite.

a) Il existe un polyèdre

$$P\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \left[\alpha < \frac{\pi}{2}\right]$$

équivalent à un cube et ayant les propriétés suivantes:

1° Le long d'une arête  $CC''C'$  ( $\overline{CC''} = \overline{C''C'}$ ), il a un angle dièdre égal à  $\alpha$  le long de  $CC''$  et égal à  $(\pi/2) - \alpha$  le long de  $C''C'$ , ces deux dièdres ayant une face commune.

2° Tous les autres dièdres sont des multiples de  $\pi/4$ .

En effet, considérons d'abord un prisme droit triangulaire  $AA'BB'CC'$ , la base étant un triangle isocèle de sommet  $B$ , l'angle  $ABC$  étant égal à  $2\alpha$  [nous supposons  $\alpha$  plus petit que  $\pi/4$ , ayant le choix entre  $\alpha$  et  $(\pi/2) - \alpha$ ] (figure 1). Comme  $\alpha < \pi/4$ , il est possible de choisir la longueur  $AA'$  de telle sorte que le plan passant par la diagonale  $AC'$  et perpendiculaire à la face  $AA'CC'$  coupe les faces  $AA'BB'$  et  $BB'CC'$  suivant des angles dièdres égaux à  $3\pi/4$  et  $\pi/4$ .

Soient  $B'', D, D', D'', C''$  les milieux des segments  $B'B, BC, B'C', DD', CC'$ . Le polyèdre  $ABCB''C'$  est équivalent à un cube; il a le long des arêtes  $BB'', CC'', C''C'$

<sup>1)</sup> J.-P. SYDLER, *Sur les conditions nécessaires pour l'équivalence des polyèdres euclidiens*, El. Math. 7, 49 (1952).