

# Über einige Konstruktionen, die auf den Sätzen von Pascal und Sturm beruhen

Autor(en): **Thomissen, F. / Tromp, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **7 (1952)**

Heft 1

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16348>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

il est vrai, que les éléments de géométrie analytique insérés dans ces éditions ne pouvaient rien contenir qui ne se trouvât dans la troisième.

Les précisions que nous avons données montrent l'importance du rôle joué par MONGE dans la création des coordonnées axiales de la droite. S'il n'appliqua pas, comme PLÜCKER le fit en 1865, ces coordonnées à l'étude de la géométrie réglée et des systèmes de forces, il faut néanmoins noter que c'est à lui que l'on doit la première étude des congruences de droites et en particulier des congruences de normales, et qu'il est passé très près de la considération des complexes de droites dans son *Traité élémentaire de statique*<sup>1)</sup>.

Pour conclure, nous poserons deux questions:

L'expression classique de «coordonnées plückériennes» mérite-t-elle vraiment de s'appliquer aux coordonnées axiales de la droite?

Est-il certain que PLÜCKER, qui connaissait très bien l'œuvre de MONGE et qui se considérait comme un de ses disciples, n'ait lu ni son important mémoire sur les développées, ni l'une des deux premières éditions de *L'Application de l'Analyse à la Géométrie*?

RENÉ TATON, Paris.

## Über einige Konstruktionen, die auf den Sätzen von Pascal und Sturm beruhen

J.-P. SYDLER hat in dieser Zeitschrift<sup>2)</sup> eine Methode angegeben, um in einem gegebenen Punkt eines Kegelschnittes den Krümmungskreis zu konstruieren. In Abweichung von dieser Methode, bei der unter anderem Gebrauch gemacht wird von den Eigenschaften der projektiven Punktreihen, folgen hier einige Konstruktionen – worunter die Konstruktion des Krümmungskreises in einem Punkt eines Kegelschnittes –, die auf den bekannten Sätzen von STURM und PASCAL beruhen.

I. *Satz von Sturm*. Haben drei Kegelschnitte zwei Punkte gemeinsam, so gehen die drei Verbindungsgeraden der übrigen Punkte, die sie zu je zweien gemeinsam haben, durch einen Punkt (Punkt von STURM).

*Beweis*. Wir denken uns die drei Kegelschnitte durch eine komplexe projektive Transformation aus drei Kreisen entstanden. Die zwei isotropen Punkte gehen dabei in zwei gemeinsame Punkte über, während das Potenzzentrum in den Punkt von STURM übergeht.

II. Der *Satz von Pascal* kann in folgender Weise aus dem Satz von STURM abgeleitet werden (siehe Figur 1): Auf einem Kegelschnitt  $K_1$  seien sechs Punkte  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) gegeben. Wir betrachten nun die Verbindungsgeraden  $A_1A_6$  und  $A_2A_3$  als entarteten Kegelschnitt  $K_2$ ; die Verbindungsgeraden  $A_3A_4$  und  $A_5A_6$  als entarteten Kegelschnitt  $K_3$ . Die Kegelschnitte  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  haben die Punkte  $A_3$  und  $A_6$  gemeinsam, und die beiden entarteten Kegelschnitte schneiden sich außer

<sup>1)</sup> Pour toutes les questions annexes, on pourra consulter nos deux études: R. TATON, *Gaspard Monge*, Beih. El. Math., n° 9 (Birkhäuser, Bâle 1950); *L'Œuvre scientifique de Monge* (Presses Universitaires de France, Paris 1951).

<sup>2)</sup> J.-P. SYDLER, *Construction à l'aide de la règle et de l'équerre du diamètre de courbure en un point d'une conique*, El. Math. 5, 49 (1950).

in  $A_3$  und  $A_6$  noch in den Punkten  $S_1$  und  $S_2$ . Nach dem Satz von STURM gehen nun die Geraden  $A_1A_2$ ,  $A_4A_5$  und  $S_1S_2$  durch *einen Punkt*  $S$ . Die Schnittpunkte  $S$ ,  $S_1$  und  $S_2$  der Verbindungsgeraden  $A_1A_2$ ,  $A_4A_5$ ;  $A_2A_3$ ,  $A_5A_6$  und  $A_3A_4$ ,  $A_6A_1$  liegen somit auf einer Geraden.

III. Ein Kegelschnitt, der durch zwei Basispunkte eines Kegelschnittbüschels geht, schneidet jeden Kegelschnitt des Büschels noch in je zwei weiteren Punkten, deren Verbindungsgeraden sich in einem Punkte der durch die zwei anderen Basispunkte des Büschels bestimmten Geraden schneiden.

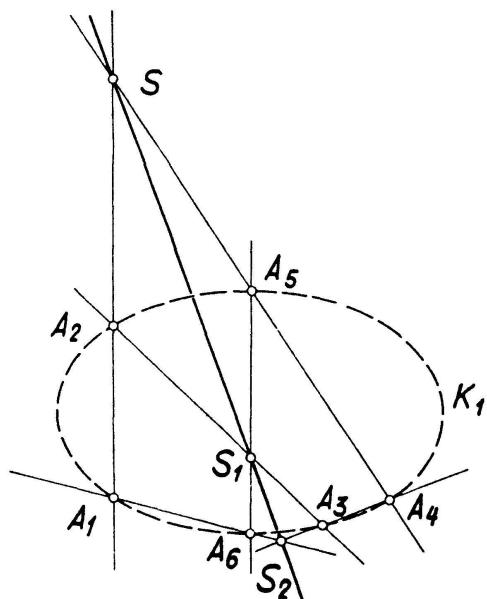


Fig. 1

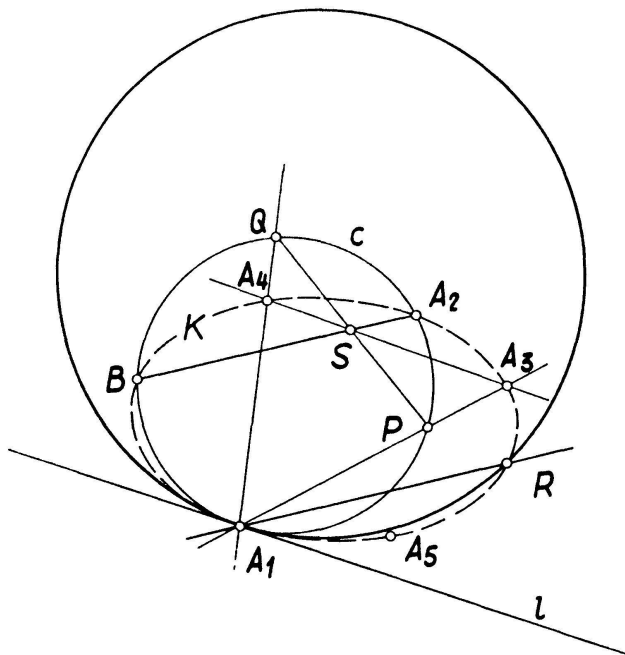


Fig. 2

Dieser Satz ergibt sich direkt durch Anwendung des Satzes von STURM auf  $K$ ,  $K_1$  und  $K_i$  ( $i = 2, 3, 4, \dots$ ), wo  $K_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) die Kegelschnitte des Büschels und  $K$  den Kegelschnitt durch zwei der Basispunkte bedeutet.

*Bemerkung.* Nehmen wir in Satz III als Kegelschnittbüschel ein Kreisbüschel, so ergibt sich, daß jeder Kreis des Büschels den Kegelschnitt noch in zwei Punkten schneidet, deren Verbindungsgeraden parallel sind.

*Konstruktion 1* (Figur 2). Gegeben: Der Kegelschnitt  $K$  durch die Punkte  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ).

Man konstruiere im Punkt  $A_1$  den Krümmungskreis von  $K$ .

Mittels des Satzes von PASCAL konstruieren wir die Tangente  $l$  in  $A_1$  an  $K$ . Darauf konstruieren wir den Kreis  $c$ , der  $l$  in  $A_1$  berührt und durch einen der Punkte  $A_i$  ( $i = 2, 3, 4, 5$ ) geht, zum Beispiel durch  $A_2$ . Der Kreis  $c$  schneidet  $K$  noch in einem Punkt  $B$ . Diesen Schnittpunkt  $B$  bestimmen wir durch Anwendung des Satzes von STURM auf die Kegelschnitte  $K$ ,  $c$  und den durch die Geraden  $A_1A_3$  und  $A_1A_4$  gebildeten entarteten Kegelschnitt.

Nach der Bemerkung zu Satz III wird jeder Kreis, der  $l$  in  $A_1$  berührt,  $K$  noch in zwei Punkten schneiden, deren Verbindungsgeraden zu  $A_2B$  parallel sind. Beim Krümmungskreis fällt einer dieser beiden Schnittpunkte zusammen mit  $A_1$ . Der

andere Schnittpunkt liegt somit auf der Geraden durch  $A_1$  parallel zu  $A_2B$ . Diese Gerade schneidet  $K$  noch in  $R$ , so daß der Krümmungskreis durch den Berührungspunkt  $A_1$  und den Punkt  $R$  bestimmt ist.

*Konstruktion 2.* Zwei Kegelschnitte haben zwei Punkte gemeinsam; man konstruiere die Verbindungsgerade der andern beiden Schnittpunkte.

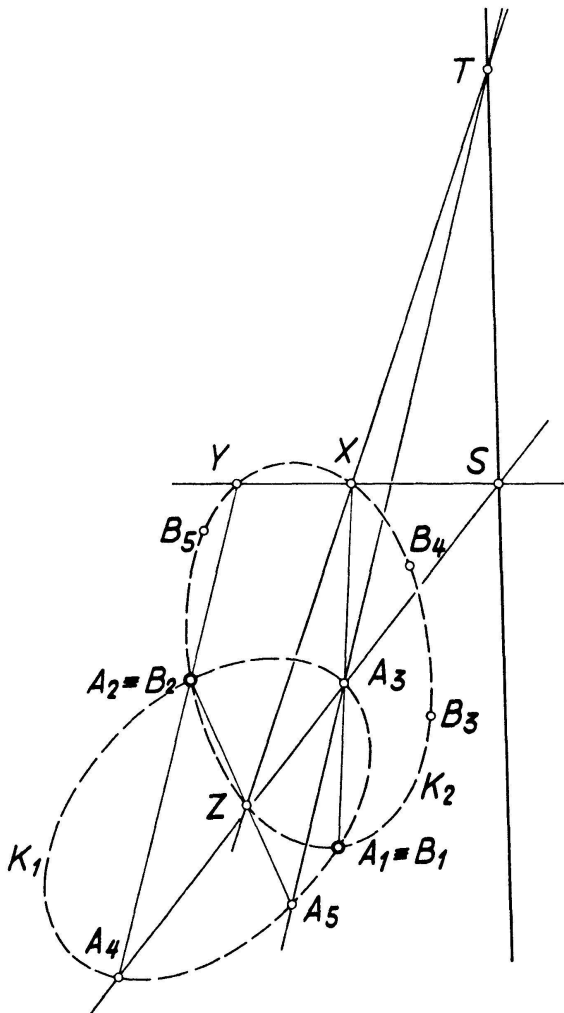


Fig. 3

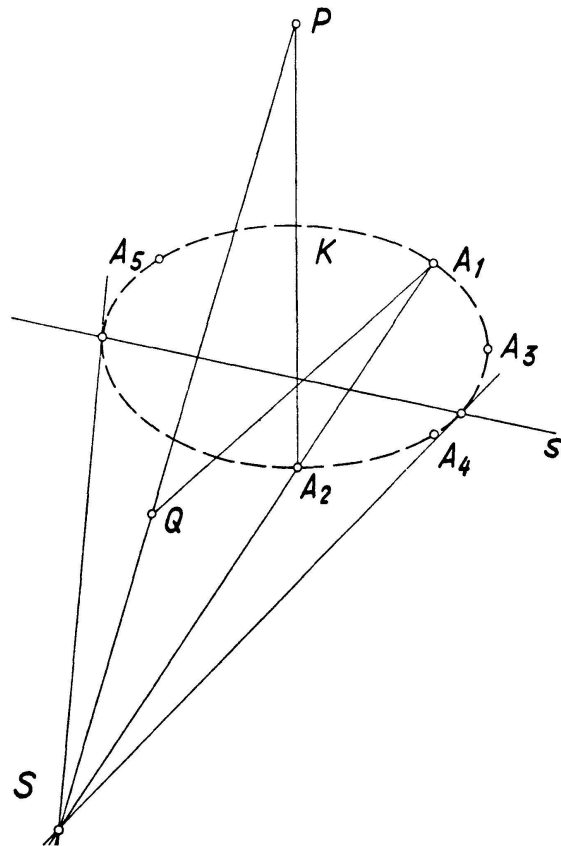


Fig. 4

Die beiden Kegelschnitte  $K_1$  und  $K_2$  seien beziehungsweise gegeben durch die Punkte  $A_i$  und  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ), wobei  $A_1 \equiv B_1$  und  $A_2 \equiv B_2$  (Figur 3).  $K_1$  und  $K_2$  bestimmen ein Kegelschnittbüschel, von dem  $A_1$  und  $A_2$  Basispunkte sind. Der aus den Geraden  $A_1A_3$  und  $A_2A_4$  gebildete entartete Kegelschnitt schneidet  $K_2$  noch in den Punkten  $X$  und  $Y$ . Nach Satz III ist der Schnittpunkt von  $A_3A_4$  und  $XY$  ein auf der Verbindungsgeraden der andern beiden Basispunkte liegender Punkt  $S$ . Der durch die Geraden  $A_1A_3$  und  $A_2A_5$  gebildete entartete Kegelschnitt schneidet  $K_2$  noch in den Punkten  $X$  und  $Z$ . Der Schnittpunkt  $T$  der Geraden  $A_3A_5$  und  $XZ$  liegt also auch auf der Verbindungsgeraden der beiden andern Basispunkte. Somit ist  $TS$  die gesuchte Gerade.

*Konstruktion 3.* Man konstruiere den Kegelschnitt, der mit einem gegebenen Kegelschnitt zwei Punkte gemeinsam hat, ihn außerdem berührt und noch durch zwei gegebene Punkte geht.

Es seien  $P$  und  $Q$  die beiden gegebenen Punkte und  $K$  der durch  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) bestimmte Kegelschnitt (Figur 4). Der gesuchte Kegelschnitt soll durch die Punkte  $A_1, A_2, P$  und  $Q$  gehen und außerdem  $K$  berühren. Er gehört also zu dem durch diese vier Punkte bestimmten Büschel. Nach Satz III schneidet  $K$  jeden Kegelschnitt des Büschels noch in je zwei Punkten, deren Verbindungsgeraden durch einen auf  $PQ$  gelegenen Punkt  $S$  gehen. Wir können diesen Punkt  $S$  mit einem beliebigen Exemplar des Büschels konstruieren und nehmen deshalb den durch die Geraden  $A_1Q$  und  $A_2P$  gebildeten entarteten Kegelschnitt. Der gesuchte Kegelschnitt ist also durch die vier gegebenen Punkte und den Berührungspunkt der Tangente von  $S$  an  $K$  bestimmt. Es gibt somit zwei Lösungen. Die Berührungspunkte finden wir als Schnittpunkte von  $K$  mit der Polaren  $s$  von  $S$  bezüglich  $K$ .

F. THOMISSEN, Heerlen, und G. TROMP, Sittard.

*Bemerkung der Redaktion:* Im Anschluß an die obige willkommene Mitteilung möchten wir auf den schönen Aufsatz von K. ROHN, *Ableitung einiger Kegelschnittsätze mit Hilfe von Schnittpunktsätzen* (Jber. dtsh. Math.-Ver. 16, 359–377 [1907]) aufmerksam machen.

## Bemerkungen zum Satz von Bernoulli

Der Satz von BERNOULLI krönt die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung, daher sollte dieses Theorem auch im Schulunterricht die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschließen. Im folgenden soll ein Beweis skizziert werden, der nur Begriffe und Sätze verwendet, die üblicherweise behandelt werden.

Aus einer Urne werde eine Nummer  $x$  gezogen.  $p$  sei die Wahrscheinlichkeit, diese bestimmte Nummer  $x$  zu ziehen, und  $q$  die Gegenwahrscheinlichkeit, so daß

$$p + q = 1$$

ist. Dieses Experiment werde, bei gleichbleibender Wahrscheinlichkeit  $p$ ,  $n$ -mal wiederholt; dabei kann die Nummer  $r = 0, 1, 2, \dots, n$ -mal gezogen werden. Die Wahrscheinlichkeit für ein  $r$ -maliges Eintreffen des Ereignisses bei  $n$ -maliger Wiederholung ist nach NEWTON

$$w_n(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r},$$

wobei

$$\sum_{r=0}^n w_n(r) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = (p + q)^n = 1 \quad (1)$$

ist. Zum Beweise unseres Satzes benötigen wir den Mittelwert oder Erwartungswert  $E(r) = \bar{r}$  und die Streuung  $\sigma^2(r)$  dieser binomischen Verteilung. Die Umformung

$$r \binom{n}{r} = \frac{n! r}{r! (n-r)!} = n \frac{(n-1)!}{(r-1)! [(n-1) - (r-1)]!} = n \binom{n-1}{r-1} \quad (2)$$

erlaubt die Berechnung des Mittelwertes

$$\bar{r} = \sum_{r=0}^n r w_n(r) = \sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = n p \sum_{r=1}^n \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} q^{(n-1) - (r-1)},$$