Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 4

In gleicher Weise lassen sich weitere Aufgaben lösen. Sollen im Viereck $ABCD$ zum Beispiel die Seiten AB und CD einen gegebenen Winkel χ einschließen, so ergibt sich K zweideutig als Schnittpunkt von k mit dem Kreis durch A und C, der den Randwinkel χ über der Sehne AC faßt.
F. HOHENBERG, Graz.

Aufgaben

Aufgabe 75. Des relations

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0 \qquad (1)$$

et

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 \qquad (2)$$

déduire les relations

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0 \qquad (3)$$

et

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0. \qquad (4)$$

Peut-on déduire réciproquement (2) de (1) et (3) ? Plus généralement, trouver toutes les relations entre α, β et γ permettant de satisfaire à (1) et (3). F. FIALA (Neuchâtel).

Solution de l'auteur: Considérons l'identité

$$e^{2i\alpha} + e^{2i\beta} + e^{2i\gamma} = (e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma})^2 - 2\,e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}\left(e^{-i\alpha} + e^{-i\beta} + e^{-i\gamma}\right)$$

et séparons en partie réelle et partie imaginaire en posant pour abréger

$$[\sin\alpha] = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma, \text{ etc.}$$

On obtient les formules

$$[\cos 2\alpha] = [\cos\alpha]^2 - [\sin\alpha]^2 - 2\,[\cos\alpha]\cos(\alpha+\beta+\gamma) - 2\,[\sin\alpha]\sin(\alpha+\beta+\gamma),$$

$$[\sin 2\alpha] = 2\,[\cos\alpha]\,[\sin\alpha] + 2\,[\sin\alpha]\cos(\alpha+\beta+\gamma) - 2\,[\cos\alpha]\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

On en déduit immédiatement (3) et (4) de (1) et (2). De (1) et (3) on déduit soit (2), puis

$$\beta - \alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \qquad \gamma - \beta = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,$$

soit

$$\alpha + \beta + \gamma = k\pi,$$

puis

$$\alpha = m\pi, \qquad \gamma = -\beta + 2n\pi$$

ou les permutations cycliques.

Die in Bd. *5*, S. 137 (1950), erschienene Lösung enthält im letzten Teil einen Fehlschluß (Vierecke mit parallelen Seiten sind nicht notwendig ähnlich!). Wie die Verfasserin mitteilt, kann man aus den Ausdrücken für die reellen Größen μ und ν und der Identität

$$e^{i(\alpha+\beta)}\sin(\alpha-\beta) + e^{i(\beta+\gamma)}\sin(\beta-\gamma) + e^{i(\gamma+\alpha)}\sin(\gamma-\alpha) = 0$$

ein lineares Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten und den Unbekannten $e^{i(\alpha+\beta)}$, $e^{i(\beta+\gamma)}$, $e^{i(\gamma+\alpha)}$ bilden. Die Diskussion dieses Systems führt auf die in (6) und (8) angegebenen Lösungen.

Aufgabe 92. Ein Flächenstück auf einem Drehkegel ist begrenzt von zwei kongruenten Parabelbogen, die sich im Punkte A im Abstand m von der Kegelspitze unter rechtem Winkel schneiden. Man berechne dieses Mantelstück, wenn der Öffnungswinkel des Kegels 60° beträgt.
C. BINDSCHEDLER (Küsnacht).

Lösung: Jedes Flächenstück auf dem Mantel eines Drehkegels mit dem Öffnungswinkel 2φ ist gleich seiner Normalprojektion auf eine Ebene normal zur Kegelachse, dividiert durch $\sin\varphi$.

Die beiden kongruenten Parabelbögen liegen symmetrisch in bezug auf eine Ebene durch die Kegelachse und mögen sich in A und B schneiden. Liegen, umgekehrt, A und B auf gegenüberliegenden Mantellinien, so bestimmen sie eindeutig die beiden Parabelbögen.

A und B mögen von der Kegelspitze S die Abstände a und b haben, und ihre Projektionen seien A' und B'. Die Projektion des einen Parabelbogens ist ein Parabelbogen zwischen A' und B' und mit der Projektion S' von S als Brennpunkt. Die Tangenten $A'C'$ und $B'C'$ stehen daher senkrecht aufeinander, und $C'S'$ ist normal zu $A'B'$.

Die doppelte Fläche des Dreiecks $A'B'C'$ ist somit gleich $(a+b)\sqrt{a\,b}\sin^2\varphi$. Die in Frage stehende Fläche ist also allgemein

$$F(a, b, \varphi) = \frac{2}{3}(a+b)\sqrt{a\,b}\sin\varphi .$$

Im vorliegenden Falle ist $\sin\varphi = 1/2$, und da die Parabeltangente in A mit der Kegelmantellinie einen Winkel von 45° bildet, ist $\sqrt{a\,b}\sin\varphi = a$, $b = 4\,a$. Mit $a = m$ ist also die gesuchte Fläche

$$F = \frac{10}{3}m^2 .$$

A. Stoll (Zürich).

Eine weitere Lösung sandte A. Schwarz (Seuzach).

Aufgabe 93. Man bestimme den größtmöglichen Flächeninhalt eines «Zwerchfelles» (vgl. Aufgabe 65), das innerhalb einer gegebenen Kugel vom Radius a liegt, wenn der «Mittelpunkt» des Zwerchfelles nicht innerhalb der gegebenen Kugel liegt.

F. Goldner (London).

Lösung: Der «Mittelpunkt» des Zwerchfells von maximaler Fläche liegt auf der Oberfläche der gegebenen Kugel; denn sonst könnte das Zwerchfell ohne Änderung seines Randkreises vergrößert werden. Ist nämlich ϱ der Radius und α der halbe Öffnungswinkel des Rotationskegels, der den «Mittelpunkt» des Zwerchfells als Spitze und seinen Randkreis als Grundkreis besitzt, so hat die Fläche des Zwerchfells den Wert

$$Z = \frac{\varrho^2\pi}{\cos^2\alpha/2}$$

und dieser Ausdruck nimmt mit wachsendem α zu.

Ist nun r der Radius der Zwerchfellkugel, deren Mittelpunkt auf der Oberfläche der gegebenen Kugel liegt, so erhält man mit dem Kathetensatz

$$Z = 2\pi r\left(r - \frac{r^2}{2\,a}\right)$$

mit dem maximalen Wert $32\pi a^2/27$ für $r = 4\,a/3$. H. Faehndrich (Bern).

Weitere Lösungen gingen ein von C. Bindschedler (Küsnacht) und R. Lauffer (Graz).

Aufgabe 94. Um jeden Punkt $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ einer Ellipse als Mittelpunkt wird der Kreis mit dem Radius $c\cos\varphi$ $(c = \sqrt{a^2 - b^2})$ beschrieben. Man bestimme die Enveloppe dieser Kreise.

E. Trost (Zürich).

1. Lösung: Die gesuchte Enveloppe besteht aus den beiden Kreisen um die Brennpunkte der Ellipse, die sich in den Endpunkten der kleinen Achse schneiden. Ist nämlich (x, y) ein Ellipsenpunkt, so gilt für die beiden Brennstrahlen mit $e = c/a$

$$r_{1,2} = a \pm e\,x = a \pm c\cos\varphi .$$

Geometrisch bedeutet das, daß der Kreis um (x, y) mit dem Radius $c \cos\varphi$ die beiden genannten Kreise berührt, den einen von außen und den andern von innen.

F. GOLDNER (London).

Dieselbe Lösung sandten A. SCHWARZ (Seuzach) und A. STOLL (Zürich).

2. Lösung: Da die Kreise der Schar den Kreis um O mit Radius b orthogonal schneiden (die Potenz in bezug auf die Scharkreise hat den konstanten Wert b^2), ist ihre Enveloppe eine bizirkulare C_4 mit der Ellipse als «Deferenten». Diese C_4 hat aber neben den imaginären Kreispunkten noch die beiden reellen Doppelpunkte $(0 | \pm b)$, zerfällt also in zwei Kreise, die sich in diesen beiden Punkten schneiden. Da die vier Punkte der x-Achse mit den Koordinaten $\pm a \pm c$ den beiden Kreisen angehören müssen, fallen deren Mittelpunkte in die Brennpunkte der Ellipse, und ihre Radien sind gleich a.

C. BINDSCHEDLER (Küsnacht).

Die Hüllkurve kann gedeutet werden als Schnittkurve eines Torus mit einer Bitangentialebene entsprechend dem bekannten Satz von VILLARCEAU. Der Torus entsteht dabei als Röhrenfläche aus einer Kugel vom Radius c, deren Mittelpunkt sich auf einem Kreis mit dem Radius a bewegt. Die Projektion dieses Kreises auf die Bitangentialebene ist eine Ellipse mit den Halbachsen a und b. Ist (x, y) ein Ellipsenpunkt, so hat der Schnittkreis der entsprechenden Kugel mit der Bitangentialebene den Radius $\sqrt{c^2 - c^2 y^2/b^2} = c \cos\varphi$. Zusammen mit der ersten der obigen Lösungen ergibt sich so ein einfacher Beweis des Satzes von VILLARCEAU.

Lösungen mittels Differentialrechnung gingen ein von J. BINZ (Biel), H. FLORIAN (Graz), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 95. Man bestimme die Ellipse, die durch drei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis doppelt berührt. Liegen die drei Punkte im Innern des Kreises, so ist die Aufgabe bekanntlich leicht lösbar, indem man die Figur als Normalprojektion einer eben geschnittenen Kugel auffaßt. Verlangt ist eine rein planimetrisch begründete Konstruktion, die auch den Fall berücksichtigt, wo die drei Punkte außerhalb des Kreises liegen.

W. LÜSSY (Winterthur).

Lösung des Aufgabenstellers: a) *Zahl der Lösungen.* Die Aufgabe hat verschiedene Lösungen, die von der Reihenfolge abhängen, in der die Elemente A, B, C, K_1, K_2 (A, B, C die gegebenen Punkte, K_1, K_2 die Berührungspunkte) auf der Ellipse durchlaufen werden sollen. Es bestehen folgende Möglichkeiten:

$$K_1K_2ABC, \quad K_1AK_2BC, \quad K_1ABK_2C, \quad AK_1BK_2C.$$

Die Aufgabe *kann* vier Lösungen haben.

b) *Ellipse und doppelt berührende Kreise.* An die Ellipse (Figur S. 90).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

werden im Punkte $K(x_0, y_0)$ die doppelt berührenden Kreise gelegt. Man findet:

$$M_1K = \varrho_1 = \frac{a\sqrt{c^2 y_0^2 + b^4}}{b^2}, \qquad M_2K = \varrho_2 = \frac{b\sqrt{a^4 - c^2 x_0^2}}{a^2},$$

$$M_1U = q_1 = \frac{a^2}{b^2}\, y_0, \qquad M_2V = q_2 = \frac{b^2}{a^2}\, x_0.$$

Für die Abstände d_1 und d_2 irgendeines Ellipsenpunktes $P(x, y)$ von M_1 bzw. M_2 gilt:

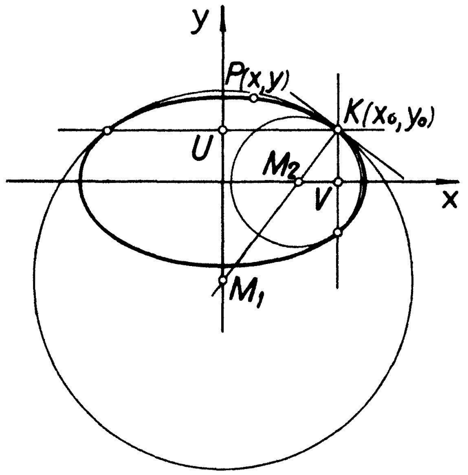
$$d_1^2 = x^2 + (q_1 + y - y_0)^2, \qquad d_2^2 = y^2 + (x_0 - x - q_2)^2.$$

Nun bestimme man die Potenzen p_1^2 und p_2^2 dieses Ellipsenpunktes bezüglich der beiden Kreise. Es ist

$$p_1^2 = \varrho_1^2 - d_1^2 = \frac{c^2}{b^2}(y - y_0)^2, \quad p_2^2 = d_2^2 - \varrho_2^2 = \frac{c^2}{a^2}(x - x_0)^2,$$

folglich
$$p_1 = \pm \frac{c}{b}(y - y_0), \quad p_2 = \pm \frac{c}{a}(x - x_0).$$

In jedem Fall gilt: *Die Wurzel aus der Potenz irgendeines Ellipsenpunktes bezüglich eines doppelt berührenden Kreises ist proportional dem Abstand dieses Punktes von der Berührungssehne.*



c) *Lösung der Aufgabe.* Die gesuchte Ellipse und der gegebene Kreis sind zentrisch kollinear bezüglich der Berührungssehne als Achse und dem Pol dieser Sehne als Zentrum.

Man bestimme die Wurzeln p_A, p_B, p_C aus den Potenzen der drei gegebenen Punkte bezüglich des gegebenen Kreises und teile die Seiten des Dreiecks ABC im Verhältnis der zu den Ecken gehörenden Werte von p. Die sechs Teilpunkte liegen auf vier Geraden, deren jede, sofern sie den Kreis schneidet, die Berührungssehne einer Lösung liefert. Liegen A, B und C innerhalb des Kreises, so existieren stets mindestens drei Lösungen; liegen sie außerhalb, so kann es unter Umständen keine einzige Lösung geben.

2. Lösung: Tout faisceau ponctuel de coniques détermine sur une droite quelconque une involution de points. Si les coniques sont bitangentes ou surosculatrices, une d'entre elles dégénère en une droite double qui passe donc par un des points doubles de l'involution.

Pour mener par trois points P_1, P_2, P_3 une conique bitangente à une conique donnée C, considérons le faisceau déterminé par C et la conique cherchée. Il définit sur la droite P_iP_j une involution donnée par P_iP_j et la paire de points où cette droite coupe C. Si les points doubles sont M_{ij} et N_{ij}, les quatre droites $M_{12}N_{23}$, $M_{12}M_{23}$, $N_{12}M_{23}$, $N_{12}N_{23}$ sont les cordes de contact des quatre coniques cherchées. J.-P. SYDLER (Zurich).

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) und R. LAUFFER (Graz).

Neue Aufgaben

130. An Unsolved Problem[1]): Show that 4, 5, 7 are the only values of n for which $n! + 1$ is a perfect square. D. H. BROWNE, Buffalo (U.S.A.).

131. Man beweise

$$\sqrt{2} = 2 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(4k-3)(4k-1)}{(4k-2)(4k-2)}$$

und stelle eine entsprechende Produktentwicklung für $\sqrt{n}$ auf.

K. SCHNEIDER (Oberdorf, BL).

132. Sind $a_1, a_2, \ldots, a_m$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$, $b_i \leqq a_i$ natürliche Zahlen und wird

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = A, \quad \sum_{i=1}^{m} b_i = B$$

gesetzt, so gilt
$$0 < \prod_{i=1}^{m} \binom{a_i}{b_i} \leqq \binom{A}{B}.$$

[1]) Diese Aufgabe wurde 1942 im *American Mathematical Monthly* gestellt. Eine im Jahrgang 1950 veröffentlichte Lösung enthält einen Fehlschluß, so daß die Frage wieder offen steht [vgl. Bd. *58*, 193 (1951)].

Man beweise diese Ungleichung. Erwünscht wären noch andere Abschätzungen dieses Produkts von Binomialkoeffizienten. ERWIN BAREISS (Zürich).

133. Eine Gerade bewegt sich so, daß sie stets durch einen festen Punkt O geht und einer ihrer Punkte stets auf einem festen Kreise liegt. Ein Punkt P dieser Gerade werde so gewählt, daß die von ihm beschriebene Kurve k durch O geht. Zeige, daß der Krümmungsradius von k in O gleich dem halben Abstand von O und dem zugehörigen Momentanzentrum ist. R. SCHOECK (Winterthur).

134. Der Radius OA eines Kreises werde in fünf gleiche Teile geteilt. B_1, B_2, B_3 und B_4 seien die Schnittpunkte der in den Teilpunkten auf OA errichteten Lote mit der Kreisperipherie. Man beweise, daß alle Winkel AOB_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ mit dem rechten Winkel inkommensurabel sind. VICENTE INGLADA (Madrid).

Berichte

Zur Axiomatik der Wahrscheinlichkeitstheorie

Zusammenfassung eines Vortrages von Herrn Prof. Dr. H. HADWIGER im Mathematischen Kolloquium Winterthur am 4. Dezember 1950

Innerhalb der heute bestehenden Wahrscheinlichkeitstheorie, für die ein axiomatisch strenger Aufbau erstrebt wird, unterscheiden sich hauptsächlich zwei verschiedene Entwicklungsrichtungen. Die eine geht von einem maßtheoretischen, die andere von einem limestheoretischen Wahrscheinlichkeitsbegriff aus[1]). Diese neuzeitlichen Theorien geben wohl Definitionen für die mathematische Wahrscheinlichkeit und geben die Grundgesetze an, nach welchen aus bekannt vorausgesetzten Wahrscheinlichkeiten wieder andere abgeleitet werden können, aber eine eigentliche Berechnung irgendeiner Wahrscheinlichkeit ist nach den vorgesehenen Grundlagen nicht möglich. – Die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung kennt aber bekanntlich zahllose Fragestellungen, welche durch die tatsächliche Berechnung der Wahrscheinlichkeitswerte beantwortet werden. Es handelt sich hier um Probleme *a priori*, für die als charakteristisches Merkmal etwa angeführt werden kann, daß durch willkürlich, aber sinnvoll gewählte Annahmen über Gleichmöglichkeiten eine weitergehende Idealisierung des der Problemstellung zugrunde liegenden Modells erwirkt wird. Derartige Festsetzungen, von denen man lange irrtümlich annahm, sie weiter begründen zu müssen, sind durchaus zulässig und decken keineswegs eine Zirkelhaftigkeit der angewendeten Wahrscheinlichkeitsdefinition auf, sondern bedeuten eine implizite Definition des in einem bestimmten Sinne idealisierten Modells[2]).

Solche Wahrscheinlichkeitsprobleme lassen sich mit analogen zusätzlichen Festsetzungen auch innerhalb der neuen Theorien lösen. Die jeweils zusätzlich hinzutretenden Festsetzungen sind von den übrigen Axiomen völlig unabhängig und von Fall zu Fall willkürlich wählbar.

Der Referent ist der Meinung, daß es durchaus wünschbar wäre, durch weitere, zusätzlich zu den übrigen hinzutretende Axiome, die nur für die Fälle *a priori* in Kraft gesetzt werden sollen, eine allgemein verbindliche Richtlinie für die Wahl dieser Festsetzungen zu fixieren. Er schlägt ein Invarianz- und ein Eindeutigkeitsaxiom vor, die zusammen mit den übrigen Axiomen die Grundlage einer Wahrscheinlichkeitstheorie *a priori* bilden können. Es handelt sich erstens um die Forderung, daß ein Maß bzw. ein Limes bezüglich eines Ereignismengensystems gegenüber einer Gruppe invariant sei.

---

[1]) Vgl. etwa: A. KOLMOGOROFF, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, in: *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Bd. 2 (Springer, Berlin 1933). – R. VON MIESES, *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Z. *5* (1919). – E. KAMKE, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie* (Teubner, Leipzig 1932).

[2]) Vgl. auch die trefflichen Ausführungen hierüber bei P. FINSLER, *Über die mathematische Wahrscheinlichkeit*, El. Math. *2*, H. 6, 108 (1947).