Über das Extrapolationsverfahren von Adams zur angenäherten Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen

Autor(en): **Matthieu, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **5 (1950)**

Heft 2

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14903

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band V Nr. 2 Seiten 25–48 Basel, 15. März 1950

Über das Extrapolationsverfahren von Adams zur angenäherten Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen

In einem ersten Aufsatz, der in dieser Zeitschrift erschienen ist[1]), wurde das Iterationsverfahren von PICARD-LINDELÖF behandelt und dabei bereits erwähnt, daß sich seit etwa zwei Jahrzehnten eine gewisse Weiterbildung dieses letzteren, nämlich das im Titel genannte Verfahren[2]), immer mehr eingebürgert hat und heute als die wichtigste und praktischste Methode zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen gilt. Der Grundgedanke und die graphische Form des Extrapolationsverfahrens wurden in dem genannten Artikel, den wir hier als bekannt voraussetzen, ebenfalls dargelegt. Ihrer enormen praktischen Bedeutung wegen (speziell auch für Zwecke der Industrie) soll nun im vorliegenden Aufsatz weiterhin noch die analytische Form behandelt werden.

Einleitend sei bemerkt, daß sich die Genauigkeit des Extrapolationsverfahrens ohne große Mühe beliebig weit steigern läßt. Auch ist es leicht möglich, eine Abschätzung für den entstehenden Fehler anzugeben, so daß man damit die Lösung einer Differentialgleichung vollständig beherrscht. Das Verfahren macht sich in sehr eleganter Weise die Elemente der Interpolations- und Differenzenrechnung zunutze[3]). Es läßt sich auf alle gewöhnlichen Differentialgleichungen und auf alle Systeme von solchen anwenden. Der Lösungsgang soll jedoch zunächst für den Fall der Gleichungen erster Ordnung dargelegt werden.

Es sei eine solche Gleichung in der Form

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

gegeben, und die Lösung $y(x)$ sei dadurch bestimmt, daß sie für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ annehmen soll. Wie im ersten Aufsatz entwickelt wurde, konvergiert dann die ausgehend von einer ersten Näherungslösung $y_1(x)$ gebildete Funktionenfolge

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx \tag{2}$$

[1]) MATTHIEU, *Über das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf zur angenäherten Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen*, El. Math. *4*, Nr. 2, 34 (1949).

[2]) Vgl. dazu KAMKE, *Differentialgleichungen*, 2. Aufl. (Leipzig 1943), Teil A, § 8. Daselbst ist auch weitere Literatur angegeben.

[3]) Vgl. dazu z. B. RUNGE und KÖNIG, *Numerisches Rechnen* (Berlin 1924), Kap. 4.

unter sehr allgemeinen Stetigkeitsvoraussetzungen gegen die wirkliche Lösung $y(x)$. Die Konvergenz ist dabei um so besser, je kleiner erstens das in Betracht gezogene Intervall ist, und je besser zweitens in diesem die Ausgangskurve $y_1(x)$ gewählt wurde. Die konsequente Berücksichtigung dieser beiden Gesichtspunkte stellt den eigentlichen Grundgedanken des Extrapolationsverfahrens dar, wie dies bereits früher dargelegt wurde. Man erfüllt dabei die beiden Bedingungen so gut, daß man in der Folge (2) mit einer Iteration auskommt, also zur Näherungsfunktion $y_1(x)$ nur eine einzige Verbesserung $y_2(x)$ bilden muß.

Zur systematischen Durchführung dieser Prinzipien teilt man zuerst das Intervall, in dem (1) integriert werden soll, ausgehend von $x = x_0$ in eine Anzahl gleicher Teilintervalle der Breite h. Die Begrenzungspunkte dieser Intervalle seien durch $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ $(x_n - x_{n-1} = h)$ bezeichnet. Dann bestimmt man für eine mit x_0 beginnende Folge dieser Punkte, z. B. für die vier ersten Werte x_0, x_1, x_2, x_3, auf irgendeine Weise eine möglichst gute Näherungslösung $y^*(x)$. Das soll sehr genau geschehen. Diese Funktionswerte seien durch y_ν^* bezeichnet, die zugehörigen Werte von $f(x, y)$ durch $f_\nu^* = f(x_\nu, y_\nu^*)$ $(\nu = 0, 1, 2, 3)$, wobei natürlich $y_0^* = y_0$ ist. Zur Durchführung dieses vorbereitenden Schrittes gibt es verschiedene Methoden, die weiter unten behandelt werden. Dann stellt man für die vier Werte $f_0^*, f_1^*, f_2^*, f_3^*$ das Interpolationspolynom $F_3(x)$ auf, indem man das Differenzenschema

$$\begin{array}{cccccc}
x_0 & y_0^* & f_0^* & & & \\
 & & & \bar{\Delta} f_1 & & \\
x_1 & y_1^* & f_1^* & & \bar{\Delta}^2 f_2 & \\
 & & & \bar{\Delta} f_2 & & \bar{\Delta}^3 f_3 \\
x_2 & y_2^* & f_2^* & & \bar{\Delta}^2 f_3 & \\
 & & & \bar{\Delta} f_3 & & \bar{\Delta}^3 f_4 \\
x_3 & y_3^* & f_3^* & & \bar{\Delta}^2 f_4 & \\
 & & & \bar{\Delta} f_4 & & \\
x_4 & y_4^* & f_4^* & & &
\end{array} \tag{3}$$

benutzt (zunächst nur oberhalb der Treppenlinie zu betrachten; bei den Differenzen sind ferner der Einfachheit wegen die Sterne weggelassen). Am besten eignet sich zur Bildung von $F_3(x)$ die Newtonsche Interpolationsformel für aufsteigende Differenzen[1]):

$$F_3(x) = f_3^* + \frac{\bar{\Delta} f_3}{1!} u_3 + \frac{\bar{\Delta}^2 f_3}{2!} u_3(u_3 + 1) + \frac{\bar{\Delta}^3 f_3}{3!} u_3(u_3 + 1)(u_3 + 2) \tag{4}$$

mit
$$u_3 = \frac{x - x_3}{h}. \tag{5}$$

Dieses Polynom wird nun für das nächste Intervall $x_3 \leqq x \leqq x_4$ als Ausgangskurve genommen und daraus gemäß

$$y_4^* = y_3^* + \int_{x_3}^{x_4} F_3(x)\, dx \tag{6}$$

[1]) Vgl. die in Note 3, S. 25, gemachte Literaturangabe.

der Wert y_4^* als nächster Funktionswert der Kurve $y^*(x)$ bestimmt. Wenn man (4) und (5) in (6) einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned} y_4^* &= y_3^* + h\int_0^1 \left[f_3^* + \frac{\bar{\Delta} f_3}{1!}\, u_3 + \frac{\bar{\Delta}^2 f_3}{2!}\, u_3(u_3+1) + \frac{\bar{\Delta}^3 f_3}{3!}\, u_3(u_3+1)\,(u_3+2)\right] du_3 \\ &= y_3^* + h\left(f_3 + \frac{1}{2}\,\bar{\Delta} f_3 + \frac{5}{12}\,\bar{\Delta}^2 f_2 + \frac{3}{8}\,\bar{\Delta}^3 f_3\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Damit kennt man den weiteren Näherungswert y_4^*, kann mit diesem den zugehörigen Wert $f_4^* = f(x_4, y_4^*)$ berechnen und damit das Differenzenschema (3) durch die unterhalb der Treppenlinie befindlichen Größen erweitern. Das ist der erste Extrapolationsschritt. Ganz entsprechend kann man nun, ausgehend von den vier Abszissen x_1, x_2, x_3, x_4, eine weitere Extrapolation durchführen, nachher in gleicher Weise weiterfahren und damit die Kurve $y^*(x)$ nach Belieben fortsetzen, wobei bei jedem Schritt auch das Differenzenschema um eine Reihe von Größen erweitert wird. Statt, wie es bis jetzt geschehen ist, vier Wertepaare zur Aufstellung der Interpolationspolynome zu benutzen, kann man ebensogut eine größere Anzahl verwenden, wodurch die Rechnung beliebig genau gemacht werden kann. Für sieben Wertepaare erhält man z. B. die (7) entsprechende allgemeine Formel

$$\begin{aligned} y_{n+1}^* = y_n^* + h\Big(f_n + \frac{1}{2}\,\bar{\Delta} f_n + \frac{5}{12}\,\bar{\Delta}^2 f_n + \frac{3}{8}\,\bar{\Delta}^3 f_n + \frac{251}{720}\,\bar{\Delta}^4 f_n \\ + \frac{95}{288}\,\bar{\Delta}^5 f_n + \frac{19087}{60480}\,\bar{\Delta}^6 f_n\Big), \qquad n \geqq 6 \end{aligned} \tag{8}$$

nach der alle Extrapolationen vorgenommen werden können. Mit dieser Formel wird man praktisch immer auskommen, da ja eine Vergrößerung der Genauigkeit stets auch durch Verkleinerung der Intervallänge h erreicht werden kann. In den meisten Fällen wird man sogar in (8) die Differenzen von einer gewissen Ordnung an vernachlässigen können, wobei n wieder entsprechend kleinere Werte annehmen kann. Dadurch ergeben sich einfachere und kürzere Extrapolationsformeln. Sehr bequem ist es z. B., die Differenzen bis zur dritten Ordnung zu berücksichtigen, wodurch man auf (7) bzw. auf die entsprechende Formel mit allgemeinem Index zurückkommt.

Noch bequemere Formeln erhält man nach NYSTRÖM[1]), wenn man zunächst wieder die erste Extrapolation unter Verwendung von vier Wertepaaren an Stelle von (6) gemäß der Formel

$$y_4^* = y_2^* + \int_{x_2}^{x_4} F_3(x)\,dx \tag{9}$$

vornimmt, also vom zweitletzten bekannten Wert ausgeht und die Integration über zwei Teilintervalle erstreckt. Setzt man hier für $F_3(x)$ wieder den Ausdruck (4) ein, so erhält man eine (7) entsprechende Formel, die jedoch deshalb noch wesentlich einfacher wird, weil das Integral jetzt zwischen den Grenzen -1 und $+1$ zu erstrecken ist, was zur Folge hat, daß sich bei der Integration viele Terme aufheben. Man erkennt

[1]) Vgl. die in Note 2, S. 25, erwähnten Literaturangaben.

leicht, daß im Integral alle Potenzen von u_3 mit ungeradem Exponenten weggelassen werden können. Genau wie früher können an diesen ersten Extrapolationsschritt beliebige weitere angeschlossen werden, und es können auch hier wieder mehr Wertepaare zur Aufstellung der Interpolationspolynome herangezogen werden. Bei Verwendung von 7 Wertepaaren erhält man z. B. entsprechend (8) die folgende, leicht durch Ausrechnung zu bestätigende Extrapolationsformel

$$\begin{aligned} y^*_{n+1} = y^*_{n-1} + h\Big[2 f_n &+ \frac{1}{3}(\bar{\Delta}^2 f_n + \bar{\Delta}^3 f_n + \bar{\Delta}^4 f_n + \bar{\Delta}^5 f_n + \bar{\Delta}^6 f_n) \\ &- \frac{1}{90}(\bar{\Delta}^4 f_n + \bar{\Delta}^5 f_n + 3\bar{\Delta}^6 f_n) + \frac{1}{756}\bar{\Delta}^6 f_n\Big]. \end{aligned} \tag{10}$$

Auch hier können natürlich in den meisten Fällen die Differenzen von einer gewissen Ordnung an vernachlässigt werden. Verwendet man z. B. wieder die Differenzen bis zur dritten Ordnung, so ergibt sich die wunderbar einfache Formel

$$y^*_{n+1} = y^*_{n-1} + h\Big[2 f_n + \frac{1}{3}(\bar{\Delta}^2 f_n + \bar{\Delta}^3 f_n)\Big], \tag{11}$$

die in fast allen Fällen genügen wird.

Wie bereits erwähnt wurde, ist es zur Durchführung des Extrapolationsverfahrens zuerst nötig, die Lösung für ein kleines Anfangsstück möglichst genau vorauszuberechnen. Das kann z. B. durch mehrfache Iteration gemäß (2) geschehen, wobei man von selbst auf allerlei Kunstgriffe zur möglichst praktischen Durchführung kommen wird. Weitere sehr beliebte Methoden sind die Verwendung von Potenzreihenansätzen und der Gebrauch der Runge-Kuttaschen Formeln[1]. Die bisherigen Entwicklungen sollen nun zunächst an einem Beispiel erläutert werden:

1. Beispiel: Es soll im Intervall $0 \leq x \leq 1$ diejenige Lösung der Gleichung $y' = x - y$ gefunden werden, die durch den Ursprung geht.

Wir wählen $h = 0{,}1$ und verwenden Formel (11). Dann ergibt sich die Berechnung gemäß dem Differenzenschema auf Seite 29, in welchem alle Zahlen auf die 5. Stelle nach dem Komma auf- oder abgerundet sind.

Dabei müssen vorbereitend zuerst die über der Treppenlinie befindlichen Zahlen ermittelt werden. Die Bestimmung der vier y^*-Werte erfolgt im vorliegenden Fall am besten durch Integration mittels Potenzreihen. Die übrigen Zahlen ergeben sich dann durch elementare Rechnungen. Nach dieser vorbereitenden Rechnung kann jetzt das eigentliche Extrapolationsverfahren beginnen. Der erste Extrapolationswert y^*_4 ergibt sich gemäß

$$y^*_4 = 0{,}01873 + 0{,}1\Big[2\cdot 0{,}25918 + \frac{1}{3}(-0{,}00820 + 0{,}00085)\Big] = 0{,}07032,$$

woraus dann f^*_4 und die zugehörigen Differenzen berechnet werden können. Die übrigen Zahlen des Schemas ergeben sich in genau gleicher Weise. Man erkennt an diesem Beispiel, wie außerordentlich übersichtlich das Verfahren ist. Die exakte Lösung der obigen Gleichung lautet $y = e^{-x} + x - 1$. Der letzte extrapolierte Wert $y^*_{10} = 0{,}36788$ stimmt in allen Stellen vollständig mit dem genauen Wert $y(1) = e^{-1}$

[1]) Vgl. z. B. das in Note 2, S. 25, genannte Werk.

x_n	y_n^*	f_n^*	$\bar{\Delta} f_n$	$\bar{\Delta}^2 f_n$	$\bar{\Delta}^3 f_n$
0,0	0,00000	0,00000			
			0,09516		
0,1	0,00484	0,09516		− 0,00905	
			0,08611		0,00085
0,2	0,01873	0,18127		− 0,00820	
			0,07791		0,00079
0,3	0,04082	0,25918		− 0,00741	
			0,07050		0,00070
0,4	0,07032	0,32968		− 0,00671	
			0,06379		0,00064
0,5	0,10653	0,39347		− 0,00607	
			0,05772		0,00058
0,6	0,14881	0,45119		− 0,00549	
			0,05223		0,00051
0,7	0,19658	0,50342		− 0,00498	
			0,04725		0,00049
0,8	0,24933	0,55067		− 0,00449	
			0,04276		
0,9	0,30657	0,59343			
1,0	0,36788				

überein, und man erkennt daraus, wie außerordentlich exakt das Verfahren arbeitet trotz der einfachen Mittel, die es verwendet.

Nach dem gleichen Prinzip können auch sämtliche Gleichungen höherer Ordnung behandelt werden. Wir betrachten etwa noch den Fall der Gleichungen zweiter Ordnung. Es sei eine solche in der Form

$$y'' = f(x, y, y') \tag{12}$$

vorgelegt, und es soll die Lösung $y(x)$ gefunden werden, die für $x = x_0$ den Funktionswert $y = y_0$ und die Ableitung $y' = y_0'$ annimmt. Man berechnet dann wiederum eine möglichst gute Näherungslösung $y^*(x)$ sowie ihre Ableitung $y^{*\prime}(x)$ für eine Reihe äquidistanter Ausgangsabszissen x_ν (z. B. wieder für vier solche Abszissen, so daß dann ν die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen kann), wobei zur Durchführung dieses vorbereitenden Schrittes wieder die gleichen Methoden wie bei den Gleichungen erster Ordnung verwendet werden können. Diese Näherungswerte seien entsprechend wie früher mit y_ν^* und $y_\nu^{*\prime}$ bezeichnet. Dann stellt man für die zugehörigen Funktionswerte $f_\nu^* = f(x_\nu, y_\nu^*, y_\nu^{*\prime})$ wieder das Differenzenschema und das Interpolationspolynom auf und operiert damit ganz analog wie bei den Gleichungen erster Ordnung. An Stelle von (6) bzw. der entsprechenden Gleichung mit allgemeinem Index treten dabei [vgl. Formel (11) des ersten Aufsatzes] die Formeln

$$y_{n+1}^{*\prime} = y_n^{*\prime} + \int_{x_n}^{x_{n+1}} F_n(x)\,dx, \qquad y_{n+1}^* = y_n^* + y_n^{*\prime}(x_{n+1} - x) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} F_n(x)\,dx^2, \tag{13}$$

welche ausgerechnet die Gestalt

$$
\begin{aligned}
y^{*\prime}_{n+1} &= y^{*\prime}_n + h\left[f^*_n + \frac{1}{2}\bar{\Delta} f_n + \frac{5}{12}\bar{\Delta}^2 f_n + \frac{3}{8}\bar{\Delta}^3 f_n\right],\\
y^*_{n+1} &= y^*_n + h\, y^{*\prime}_n + h^2\left[\frac{1}{2} f_n + \frac{1}{6}\bar{\Delta} f_n + \frac{1}{8}\bar{\Delta}^2 f_n + \frac{19}{180}\bar{\Delta}^3 f_n\right]
\end{aligned}
\tag{14}
$$

annehmen. Auch im jetzigen Fall der Gleichungen zweiter Ordnung ist es wieder vorteilhafter, gemäß ähnlichen Überlegungen, wie sie zu Formel (10) führten, zu extrapolieren, und zwar haben sich hier vor allem die Formeln

$$
\begin{aligned}
y^{*\prime}_{n+1} &= y^{*\prime}_{n-1} + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} F_n(x)\, dx,\\
y^*_{n+1} + y^*_{n-1} - 2\, y^*_n &= (y^*_{n+1} - y^*_n) + (y^*_{n-1} - y^*_n)\\
&= \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} F_n(x)\, dx^2 + \int\limits_{x_n}^{x_{n-1}} \int\limits_{x_n}^{x_{n-1}} F_n(x)\, dx^2
\end{aligned}
\tag{15}
$$

als nützlich erwiesen. Die Ausrechnung dieser letzteren ergibt:

$$
\begin{aligned}
y^{*\prime}_{n+1} &= y^{*\prime}_{n-1} + h\left[2 f_n + \frac{1}{3}(\bar{\Delta}^2 f_n + \bar{\Delta}^3 f_n)\right],\\
y^*_{n+1} &= 2\, y^*_n - y^*_{n-1} + h^2\left[f_n + \frac{1}{12}(\bar{\Delta}^2 f_n + \bar{\Delta}^3 f_n)\right].
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Die erste dieser Formeln entspricht in ihrem Aufbau vollständig der Gleichung (11). Wenn in der rechten Seite von (12) die Ableitung y' nicht auftritt, was häufig von Anfang an der Fall ist, oder durch eine einfache Substitution erreicht werden kann, kommt man mit der zweiten Formel (16) allein aus. Natürlich können auch im jetzigen Fall wieder mehr als nur vier Wertepaare zur Aufstellung der Interpolationspolynome herangezogen werden[1]). Es soll nun wieder ein Beispiel für die Anwendung dieser Formeln gegeben werden:

2. Beispiel: Die Gleichung $y'' = (y' + y)/6$ soll ausgehend von den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1/2$ integriert werden.

Wir wählen $h = 0{,}2$ und verwenden die Formeln (16). Dann ergibt sich für die Rechnung das Schema auf Seite 31, dessen Zahlen auf die vierte Stelle nach dem Komma auf- oder abgerundet sind.

Dabei müssen wieder zuerst die über der Treppenlinie befindlichen Zahlen berechnet werden, was wie beim ersten Beispiel am besten mittels Potenzreihen geschieht. Nach diesem vorbereitenden Schritt können nunmehr ganz analog wie im ersten Beispiel die Werte $y^{*\prime}_4$ und y^*_4 auf Grund der Formeln (16) berechnet werden. Dadurch wird auch f^*_4 bekannt, und es kann das Differenzenschema vervollständigt werden. In gleicher Weise können nach Belieben weitere Extrapolationen vorgenommen werden. Die genaue Lösung der obigen Gleichung lautet $y = e^{x/2}$. Die letzten

[1]) Vgl. dazu das in Note 2, S. 25, genannte Werk.

x_n	$y_n^{*\prime}$	y_n^*	f_n^*	$\bar{\Delta} f_n$	$\bar{\Delta}^2 f_n$	$\bar{\Delta}^3 f_n$
0,0	0,5000	1,0000	0,2500			
				0,0263		
0,2	0,5526	1,1052	0,2763		0,0027	
				0,0290		0,0005
0,4	0,6107	1,2214	0,3054		0,0032	
				0,0322		0,0001
0,6	0,6750	1,3499	0,3375		0,0033	
				0,0355		0,0004
0,8	0,7459	1,4919	0,3730		0,0037	
				0,0392		0,0004
1,0	0,8244	1,6488	0,4122		0,0041	
				0,0433		
1,2	0,9111	1,8222	0,4556			
1,4	1,0069	2,0138				

Näherungswerte $y_7^{*\prime} = 1{,}0069$ und $x_7^* = 2{,}0138$ stimmen wiederum in allen Stellen mit den genauen Werten $y'(1{,}4) = e^{0{,}7}/2$ und $y(1{,}4) = e^{0{,}7}$ überein.

Es bedarf wohl keiner besonderen Erwähnung, daß nach demselben Prinzip auch Systeme von Differentialgleichungen behandelt werden können. Liegt z. B. ein System von zwei Gleichungen erster Ordnung vor, so hat man entsprechend den Gleichungen (9) des ersten Aufsatzes für jede der beiden abhängigen Variabeln eine besondere Rechnung durchzuführen und dementsprechend mit zwei Differenzenschemata zu arbeiten. Im übrigen sind die Überlegungen den bisherigen Betrachtungen so analog, daß wir nicht näher darauf eingehen.

Aus den bisherigen Entwicklungen geht hervor, daß die Extrapolation, die den wesentlichen Punkt des Verfahrens bildet, auf recht mannigfache Weise vorgenommen werden kann. Es handelt sich dabei jedoch stets um ganz elementare Umgestaltungen des ursprünglichen Gedankens. Einige solche Varianten sind ja vorstehend angegeben worden. In ganz analoger Weise können natürlich noch ungezählte andere Varianten hergeleitet werden, die sehr wohl in allgemeinen oder speziellen Fällen von großem praktischem Wert sein können. Nach Ansicht des Verfassers liegt hier noch ein weites und dankbares Forschungsgebiet für elementarmathematische Untersuchungen vor. Auch scheinen die Gleichungen dritter und höherer Ordnung bis jetzt nie systematisch untersucht worden zu sein.

Schließlich sei noch erwähnt, daß auch praktisch gut verwendbare Fehlerabschätzungen für das Extrapolationsverfahren entwickelt worden sind. Ein näheres Eintreten auf diesen wichtigen Punkt würde jedoch hier zu weit führen. Literatur über diese Fehlerabschätzungen findet sich zusammengestellt in dem in Note 2, S. 25, genannten Werk, wo auch noch einige weitere Ergänzungen angegeben sind.

P. MATTHIEU, Zürich.