Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **5 (1950)**

Heft 5

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Unter Berücksichtigung von (59) wird dann

$$C_{ik} = j_{ik}\, C. \tag{62}$$

Als Beispiel erwähnen wir das Drehmoment, das eine an der Spitze des Vektors $\vec{r}$ angreifende Kraft $\vec{F}$ erzeugt. Statt der (58) entsprechenden Vektorgleichung

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{63}$$

setzen wir nach (60)

$$M_{ik} = -\, r_i F_k + F_i r_k. \tag{64}$$

Mit

$$M = r\, F \sin(\vec{r}, \vec{F}) \tag{65}$$

geht (64) über in

$$M_{ik} = j_{ik}\, M. \tag{66}$$

Ganz analog kann man andere äußere Vektorprodukte und andere «axiale Vektoren» darstellen, so zum Beispiel die Fläche, die zwei Vektoren aufspannen, ferner die Winkelgeschwindigkeit, die magnetische Induktion.

9. *Verzeichnis der hauptsächlich benützten Literatur*

[1] L. Bouthillon, *Sur la nature des grandeurs électriques et magnétiques et l'application de la notation tensorielle aux lois de l'électricité*, Bull. Soc. franç. Electriciens *8*, 41 (1938).
[2] L. Brillouin, *Les tenseurs en mécanique et en élasticité* (Masson & Cie, Paris 1946).
[3] A. Duschek und A. Hochrainer, *Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung*, I. Teil: *Tensoralgebra* (Springer, Wien 1946).
[4] G. Kron, *Tensor analysis of networks* (John Wiley & Sons, New York, 1939).
[5] A. Mineur, *Géométrie vectorielle*, I: *Algèbre vectorielle*, 4. Auflage (Albert Vanderlinden, Brüssel).
[6] H. Rothe, *Einführung in die Tensorrechnung* (L. W. Seidel & Sohn, Wien 1924).
[7] J. Schouten und D. Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, 1. Band: *Algebra und Übertragungslehre*, 2. Auflage (P. Noordhoff N. V., Groningen und Batavia, 1935).
[8] G. von Staudt, *Über die Inhalte der Polygone und Polyeder*, J. reine angew. Math. *24*, 252 (1842).
[9] S. Stigant, *Modern electrical engineering mathematics* (Hutchinson's Scientific and Technical Publications, London 1946).
[10] H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, 5. Auflage (Springer, Berlin 1923).

M. Landolt, Winterthur.

Kleine Mitteilungen

I. *Eine Bemerkung zur Definition des geometrischen Ortes*

In einigen schweizerischen Lehrmitteln[1] ist die folgende Definition des geometrischen Ortes gegeben: «Ein geometrischer Ort ist eine Linie, auf der alle Punkte liegen müssen (und keine andern), die eine vorgeschriebene Bedingung erfüllen.» Daß diese Definition

[1] F. Gonseth und P. Marti, *Planimetrie* I (Orell Füßli, Zürich). – H. Frick, *Planimetrie* (Schultheß, Zürich).

unzulässig ist (abgesehen davon, daß auch in der Ebene ein geometrischer Ort keine Linie zu sein braucht) erkennt man aus folgendem:

Überall, wo der Begriff des geometrischen Ortes gebraucht wird, kann das Attribut «geometrisch» weggelassen werden, ohne daß die Ausdrucksweise an Deutlichkeit verliert. Beispiel: der Satz: «Der Ort aller Punkte, die von zwei festen Punkten gleich weit entfernt sind, ist die Mittelsenkrechte zur Verbindungsstrecke dieser Punkte» ist nicht weniger deutlich als der Satz: «Der geometrische Ort aller Punkte usw.». Läßt man aber in der obigen Definition des geometrischen Ortes das Attribut «geometrisch» weg, so erhält man den Satz: «Ein Ort ist eine Linie, auf der alle Punkte liegen müssen usw.». Dies ist eine vollkommen sinnlose Aussage.

Wo sich der Fehler eingeschlichen hat, wird klar, wenn wir zum Vergleich die Definition des geometrischen Ortes heranziehen, die der italienische Geometer FEDERIGO ENRIQUES in einem elementaren Geometriebuch[1]) gibt. Es heißt dort (wörtlich übersetzt):

«Eine Figur heißt *geometrischer Ort* (oder bloß *Ort*) *aller Punkte, die eine gewisse Eigenschaft haben,* wenn

a) alle Punkte der Figur diese Eigenschaft haben;

b) jeder Punkt, der diese Eigenschaft hat, der Figur angehört». (Die Hervorhebung findet sich so im zitierten Text.)

Wie wir sehen, wird die Definition des geometrischen Ortes in dem Moment sinnvoll, wo wir nicht das Wort «geometrischen Ort», sondern den festen Ausdruck «geometrischer Ort aller Punkte, die eine gewisse Eigenschaft haben», definieren. Außerdem ist in der Definition «Figur» bedeutend glücklicher als «Linie».

Nun kann man sich allerdings fragen, ob man den Schülern eine solche Definition noch zumuten soll. Denn das Wesentliche daran ist ja, daß sie das «Notwendige und Hinreichende» enthält. Das «notwendig» bzw. die Bedingung b in der Definition von ENRIQUES ist aber in der Ausdrucksweise «der geometrische Ort aller Punkte, die..., ist...» schon enthalten. Diskutabel ist vielleicht das Wörtchen «aller». Es scheint mir aber, daß sich eine Definition überhaupt erübrigt, wenn man diese Ausdrucksweise dahin abändert, daß man sagt: «der geometrische Ort *genau derjenigen* Punkte, die..., ist...»[2]).

K. F. MOPPERT, Basel.

II. *Eine geometrische Kennzeichnung der Primzahlen*

Nach einem bekannten Satz[3]) ist der Inhalt eines Gitterpolygons P in der Ebene durch

$$i - 1 + \frac{r}{2} \tag{1}$$

angegeben, wobei i und r die Anzahl der im Innern bzw. am Rande von P liegenden Gitterpunkte bezeichnen. Daraus läßt sich ein Kriterium geometrischer Natur für die Primzahlen gewinnen.

Sei $n\,(\geqq 2)$ eine natürliche Zahl. Mit D_k $(k = 1, \ldots, n)$ bezeichnen wir das Dreieck, das durch die Eckpunkte $(0, 0)$, $(n, k-1)$, (n, k) bestimmt ist. Jedes dieser n Dreiecke hat denselben Inhalt $n/2$. Im Innern von D_1 und D_n liegen offenbar keine Gitterpunkte. Wir beweisen den folgenden

Satz: Ist $n \neq 4$, so ist n dann und nur dann eine Primzahl, falls alle Dreiecke $D_2, \ldots, D_{n-1}$ dieselbe Anzahl von Gitterpunkten im Innern enthalten[4]).

Beweis. Für $n = 2$ ist der Satz trivial, da dann eigentlich keine Dreiecke D_k $(1 < k < n)$ vorhanden sind. Sei nun $n = p$ eine ungerade Primzahl. Dann liegen am Rande der Dreiecke $D_2, \ldots, D_{p-1}$ nur die drei Eckpunkte, und so folgt aus (1), daß alle diese Dreiecke genau $(p-1)/2$ Gitterpunkte im Innern enthalten.

---

[1]) F. ENRIQUES und U. AMALDI, *Geometria Elementare,* 1. Teil (Zanichelli, Bologna 1937), S. 66.

[2]) Warum nicht so: Der geometrische Ort derjenigen Punkte, die eine vorgeschriebene Eigenschaft haben, ist... (samt a und b)? *E.V.*

[3]) H. STEINHAUS, *Mathematical Snapshots* (1938), S. 17.

[4]) Es ist bemerkenswert, daß $n = 4$ auch beim Beweis des Wilsonschen Primzahlkriteriums einen Ausnahmefall bildet. Man kann sagen, daß für $n = 4$ auch jenes Kriterium «nur zufälligerweise» richtig ist.

Sei nun $n = q\,s > 4$ eine zusammengesetzte Zahl, wobei q den kleinsten eigentlichen Teiler von n bezeichnet. Dann enthält D_2 keinen oder nur einen Gitterpunkt – nämlich $(n/2,\ 1)$ – an seinem Rande (abgesehen von den Eckpunkten), je nachdem $q > 2$ oder $q = 2$ ist. Dagegen hat D_s den Gitterpunkt $(q,\ 1)$ bzw. noch die weiteren Gitterpunkte $(2,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $\ldots$, $(n-2,\ n/2-1)$ an seinem Rande (entsprechend den beiden Fällen), woraus nach (1) folgt, daß D_2 in jedem Falle eine größere Anzahl von Gitterpunkten als D_s im Innern enthält. Damit ist der Satz bewiesen. P. MEDGYESSY, Debrecen.

Bericht

Zur Graeffeschen Methode für die Auflösung algebraischer Gleichungen

(Zusammenfassung eines Vortrages von Herrn Prof. Dr. A. OSTROWSKI
im Mathematischen Kolloquium Winterthur am 13. Februar 1950)

Die Koeffizienten a_k in der Gleichung

$$f_0(z) \equiv a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0 \tag{1}$$

sind symmetrische Funktionen der Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ der Gleichung. Eine Grundidee des Verfahrens von GRAEFFE ist, diese Symmetrie zu zerstören, indem Ausdrücke (Funktionen der Koeffizienten) konstruiert werden, für deren Wert wesentlich nur noch *eine* Wurzel maßgebend ist. GRAEFFE verwendet dazu die «Transformierten» der Gleichung (1), d. h. Gleichungen, deren Lösung die zweiten, vierten, achten usw. Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Es sind dies:

$$f_k(z) \equiv a_n^{2k} \prod_{\nu=1}^{n} (z - \zeta_\nu^{2k}) \equiv a_0^{(k)} + a_1^{(k)} z + \cdots + a_n^{(k)} z^n = 0. \quad (k = 2, 4, 8, 16, \ldots)$$

Das Polynom $f_{2k}(z)$ kann berechnet werden, indem man das Produkt

$$(-1)^n f_k(z)\, f_k(-z) \equiv a_n^{4k} \prod_{\nu=1}^{n} (z - \zeta_\nu^{2k}) \prod_{\nu=1}^{n} (z + \zeta_\nu^{2k}) \equiv a_n^{4k} \prod_{\nu=1}^{n} (z^2 - \zeta_\nu^{4k})$$

bildet und darin z^2 durch z ersetzt.

Denkt man sich die Wurzeln der Gleichung (1) so numeriert, daß $|\zeta_1| \leqq |\zeta_2| \leqq \cdots \leqq |\zeta_n|$, und gilt für ein bestimmtes m: $|\zeta_m| < |\zeta_{m+1}|$, so folgt aus den Beziehungen von VIETA:

$$\lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} (\zeta_{m+1}\, \zeta_{m+2} \cdots \zeta_n)^{-2k} = (-1)^{m-n}\, a_n^{(k)}. \tag{2}$$

Gilt sogar

$$|\zeta_{m-1}| < |\zeta_m| < |\zeta_{m+1}|, \tag{3}$$

so ergibt sich aus (2):

$$\zeta_m = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{-\frac{a_{m-1}^{(k)}}{a_m^{(k)}}}\,,$$

woraus theoretisch ζ_m berechnet werden kann. Diese Formel gilt aber nur unter der Voraussetzung (3), und die Werte von m, welche diese Bedingung erfüllen, sind nicht zum vornherein bekannt. GRAEFFE glaubte, die Schwierigkeit mit der folgenden Überlegung überwinden zu können: Führt man die Berechnungen mit einer festen Zahl von bedeutsamen Ziffern durch und ergibt sich bei dieser Genauigkeit für alle $k > k_0$ Übereinstimmung der Zahlen $a_m^{(2k)}$ und $[a_m^{(k)}]^2$, so ist $|\zeta_m| < |\zeta_{m+1}|$. Leider ist das