Zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik

Autor(en): **Nef, Walter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **5 (1950)**

Heft 4

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14909

auf A_1B_1 symmetrischen Kreis (U). Der Höhenschnittpunkt H von abx ist einer der Berührungskreismittelpunkte von $A_2B_2X_2$, und da der Winkel $A_2X_2B_2$ und folglich auch A_2HB_2 nach Größe und Sinn unverändert bleibt, bewegt sich H auf einem Kreis (H) durch A_2 und B_2.

Beide Kreise gehen durch C als Scheitel des ND. Sind U_0 und H_0 Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt des HD, so sind U_0A_1 und H_0A_2 normal zu a, so daß CU_0 Durchmesser von (U) ist und CH_0 Durchmesser von (H). Die Euler-Gerade U_0H_0 des HD geht also durch den zweiten Schnittpunkt D von (U) und (H). Zudem ist C^1 Zentrum von (H).

Zu jedem Dreieck der Schar abx gibt es in ihr ein gegensinnig ähnliches. Die Euler-Geraden UH und $\tilde{U}\tilde{H}$ eines solchen Paares liegen daher so, daß deren Winkelhalbierende parallel sind zu den Winkelhalbierenden von a und b. Außerdem liegen die Punkte $U, \tilde{U}, H, \tilde{H}$ auf einem Kreis (O) um O.

Weil X_1U stets normal ist zu A_1B_1, bewegt sich U auf (U) mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie X_1 auf (K). X_2H geht als Halbierende des Winkels $A_2X_2B_2$ dauernd durch C^1 (nicht durch C_1, entsprechend dem Spezialfall C_2C oder C_2H_0), dreht sich also um das Zentrum von (H) mit der Hälfte der Winkelgeschwindigkeit, mit der sich X_2 auf (K) bewegt. U und H verschieben sich somit auf ihren Kreisen mit gegenläufig gleicher Winkelgeschwindigkeit, so daß die Peripheriewinkel U_0DU und H_0DH entgegengesetzt gleich sind. Mithin sind die Sekanten DU und DH von (O) symmetrisch in bezug auf dessen Zentrale DO.

Hieraus folgt die Gleichheit der Winkel UDH und UOH, so daß jedes Paar U, H mit D und O auf einem Kreise liegt. Deshalb schneiden sich die Geraden DO, UH und $\tilde{U}\tilde{H}$ als Potenzlinien dreier Kreise in ein und demselben Punkt. Also:

Die Umkreismittelpunkte U und die Höhenschnittpunkte H aller Tangentendreiecke von (S) mit zwei festen Tangenten a und b durch C liegen je auf einem Kreis (U) bzw. (H). (U) und (H) schneiden sich in C und in einem Punkt der Euler-Geraden des einzigen Hauptdreiecks der Schar. Jedem Dreieck der Schar entspricht in ihr ein gegensinnig ähnliches, und die Euler-Geraden eines solchen Paares schneiden sich auf der Euler-Geraden des Hauptdreiecks mit Winkelhalbierenden parallel zu denen von a und b.

Da die Euler-Gerade eines rechtwinkligen Dreiecks durch den Scheitel des rechten Winkels und die Mitte der Hypotenuse geht, ergibt sich der bemerkenswerte Spezialfall: Verbindet man in einem Dreieck die Mitte einer Seite mit dem Höhenfußpunkt einer zweiten Seite und die Mitte derselben mit dem Höhenfußpunkt der ersten, dann schneiden sich diese Geraden auf der Euler-Geraden des Dreiecks, und ihre Winkelhalbierenden sind parallel zu denen der beiden Dreiecksseiten.

A. STOLL, Zürich.

Zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die Thermodynamik dem Physikschüler oft besondere Schwierigkeiten bereitet, die von ganz anderem Charakter sind als etwa in den übrigen Gebieten der Physik. Nach meinen eigenen Erfahrungen und denen von anderen sind es oft die mathematisch begabten Schüler, die diesen Schwierigkeiten unterworfen sind. Das liegt wohl vor allem daran, daß die Überlegungen, die in der Thermodynamik angestellt werden, ganz anderer Art sind als die in der Mechanik, Elektrodynamik usw. verwendeten. In seiner Arbeit *Kritische Betrachtungen zur traditionellen Darstellung der Thermodynamik* schreibt MAX BORN[1]) dazu: «Fragt man weiter, welche Formen und Sätze der Mathematik es eigentlich sind, die bei den thermodynamischen Schlußweisen gebraucht werden, so wird man diese schwer als solche kennzeichnen können» (S. 219).

In besonderem Maße gelten diese Bemerkungen für die Begründung des zweiten Hauptsatzes. Es ist üblich, die ihm zugrunde liegenden Erfahrungstatsachen in der Aussage von der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile zweiter Art zusammenzufassen. Diese Aussage wird für die weiteren Überlegungen, die zur Definition der Entropie und dem Satz von ihrer Zunahme führen, als eine Art Axiom verwendet. PLANCK[2]) sagt dazu: «Da der zweite Hauptsatz ein Erfahrungssatz ist, so kann man von seinem Beweise nur insofern reden, als sein gesamter Inhalt sich aus einem einzigen einfachen Erfahrungssatz von einleuchtender Gewißheit deduzieren läßt.»

Man kommt aber wohl nicht um die Feststellung herum, daß die Aussage von der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile zweiter Art recht kompliziert ist für einen Satz, der als Quintessenz einer gewissen Summe von experimentellen Erfahrungen an die Spitze einer Theorie gestellt werden soll.

C. CARATHÉODORY kommt das Verdienst zu, den zweiten Hauptsatz in eine solche Form gebracht zu haben, daß er einer einwandfreien Behandlung mit rein mathematischen Mitteln zugänglich wird. Das von ihm verwendete mathematische Hilfsmittel ist ein Satz über Pfaffsche Differentialformen, und die Aussage des zweiten Hauptsatzes läßt sich damit aus folgendem Axiom ableiten: «In jeder Umgebung eines jeden Zustandes eines jeden Systems gibt es andere Zustände, die vom ersten aus nicht durch adiabatische Vorgänge erreicht werden können[3]).»

Für den Unterricht wird aber die Carathéodorysche Theorie wohl im allgemeinen zu große mathematische Anforderungen stellen, als daß der zweite Hauptsatz in dieser Form behandelt werden könnte.

Ich möchte hier nun zeigen, daß der zweite Hauptsatz allein schon aus der Tatsache der Existenz irreversibler Vorgänge folgt. Wir nehmen also folgenden Satz als auf Grund aller Erfahrung richtig an:

«Es gibt irreversible Vorgänge»

und zeigen, daß man aus ihm den zweiten Hauptsatz ableiten kann. Dabei ist die Meinung nicht die, daß die Ableitung des zweiten Hauptsatzes aus dem angegebenen Prinzip einfacher sei als etwa die aus der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile zweiter Art. In dieser Beziehung ist kein Unterschied vorhanden. Hingegen ist die Aussage von der Existenz irreversibler Vorgänge in ihrer logischen Form wesentlich einfacher als die von der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile zweiter Art. Es dürfte einfacher sein, an Hand von Beispielen die Existenz von irreversiblen Vor-

[1]) M. BORN, Phys. Z. *22*, 218 ff. (1921).

[2]) M. PLANCK, *Thermodynamik*, 2. Aufl. (Leipzig 1905), § 116.

[3]) C. CARATHÉODORY, *Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik*, Math. Ann. *61*, 355 (1909).

gängen «glaubhaft» zu machen, als die Nichtexistenz eines Perpetuum mobile zweiter Art. Vom axiomatischen Standpunkt aus ist ferner zu sagen, daß unser «Axiom» nicht nur weniger aussagt als die Nichtexistenz eines Perpetuum mobile zweiter Art, sondern auch weniger als die anderen hie und da an den Anfang gestellten Sätze, z. B. die Aussage von der Irreversibilität der Ausdehnung eines idealen Gases ohne Änderung der inneren Energie (Gay-Lussac-Versuch). Es sagt aber auch weniger aus als das Carathéodorysche Axiom, das doch im wesentlichen postuliert, daß von jedem Zustand eines jeden Systems ein infinitesimaler irreversibler Vorgang ausgehen kann. Es wäre wohl auch möglich, aus unserem Axiom das Carathéodorysche abzuleiten und dann das weitere längs der von ihm gefundenen Bahnen zu verfolgen. Demgegenüber ist es aber meine Absicht, die Dinge so darzustellen, daß sie (wie es ja auch dem Sinn der Zeitschrift entspricht) als Anregung für den Unterricht dienen können.

Um die Begriffe klarzustellen, wollen wir hier formulieren, was wir unter einem irreversiblen Vorgang verstehen:

Sei V ein Vorgang und S das System aller an ihm beteiligten Dinge. V heißt irreversibel, wenn wir aus seinem Ablauf schließen können, daß S niemals wieder in den ursprünglichen Zustand übergeführt werden kann, ohne daß außerhalb S Veränderungen zurückbleiben.

Es sei bemerkt, daß infolgedessen durch den Anfangs- und Endzustand eines Systems völlig bestimmt ist, ob der betreffende Vorgang reversibel oder irreversibel ist.

Gemäß unserer Absicht stellen wir nun nochmals den Satz

Es gibt irreversible Vorgänge (i)

an die Spitze und behaupten, daß hieraus der zweite Hauptsatz abgeleitet werden könne. Nun leitet PLANCK (a. a. O., § 118 ff.) den zweiten Hauptsatz aus dem folgenden ab:

Die Ausdehnung eines idealen Gases ohne Änderung der inneren Energie ist ein irreversibler Vorgang. (g)

Wir beschränken uns deshalb darauf, den Satz (g) aus dem Satz (i) abzuleiten. Dazu ist es genügend, den folgenden Satz zu beweisen:

Wenn der Vorgang der Ausdehnung eines idealen Gases ohne Änderung der inneren Energie reversibel ist, so ist jeder Vorgang reversibel. (r)

Beweis: Sei V irgendein Vorgang und S das System aller an ihm beteiligten Dinge. Z_0 sei der Zustand von S vor, Z_1 der Zustand nach dem Ablauf von V. Wir haben zu zeigen, daß, wenn die Voraussetzung des Satzes (r) richtig ist, das System S vom Zustand Z_1 in den Zustand Z_0 übergeführt werden kann, ohne daß irgendwelche Veränderungen außerhalb S zurückbleiben. Nun kann man jedes System aus irgendeinem Zustand in irgendeinen andern überführen, indem man dem System von außen her in geeigneter Weise Wärme und mechanische Energie zuführt oder solche nach außen ableitet. Auf diese Weise wollen wir jetzt das System S vom Zustand Z_1 in den Zustand Z_0 überführen. Dabei tauschen wir aus:

1. Wärme mit einer nicht zu S gehörigen Menge idealen Gases;
2. mechanische Energie mit einem heb- und senkbaren, ebenfalls nicht zu S gehörigen Gewicht M;
3. mechanische Energie zwischen dem idealen Gas und dem Gewicht M, um das Gas je nach Bedarf auf eine Temperatur zu bringen, welche die gewünschte Art des Wärmeaustausches mit S gestattet.

Das System S hat in den beiden Zuständen Z_1 und Z_0 dieselbe Energie. Denn es war vorausgesetzt, daß S das System aller am Vorgang V beteiligten Dinge sei.

Nachdem nun S im Zustand Z_0 ist, haben auch das ideale Gas und das Gewicht M zusammen wieder dieselbe Gesamtenergie wie am Anfang. Um nun das Gas wieder in den ursprünglichen Zustand zurückzuführen, führen wir ihm von M mechanische Energie in dem Betrage zu, daß es die ursprüngliche innere Energie hat. Jetzt kann es ohne Änderung der inneren Energie in den ursprünglichen Zustand zurückgeführt werden, ohne daß irgendwo Veränderungen zurückbleiben. Nämlich:

1. wenn sein Volumen zu klein ist, durch Ausdehnung ohne Änderung der inneren Energie (Gay-Lussac-Vorgang);
2. wenn das Volumen zu groß ist, durch den dazu «reversen» Prozeß, der nach der Voraussetzung des Satzes (r) existiert.

Nach dem 1. Hauptsatz hat jetzt auch M wieder die ursprüngliche Energie, ist also wieder im ursprünglichen Zustand, da dieser durch die Energie eindeutig bestimmt ist.

Damit ist (g) aus (i) abgeleitet und daraus läßt sich, wie schon bemerkt wurde, der zweite Hauptsatz deduzieren. Der Weg, den PLANCK am angeführten Orte geht, ist kurz der folgende:

1. Definition der Entropie für ideale Gase (§ 119ff.).
2. Beweis des zweiten Hauptsatzes für ideale Gase (§ 124).
3. Beweis des zweiten Hauptsatzes für beliebige Systeme.

WALTER NEF, Fribourg.

Kleine Mitteilungen

I. *Sur un problème de M. Hadamard*

Le problème 50 proposé par M. HADAMARD dans les *Elemente der Mathematik* (*4*, 18 [1949]) peut être exprimé plus généralement sous la forme suivante:

Soit c une conique quelconque et soient A et B deux points quelconques sur une droite a. Considérons toutes les coniques c' passant par A et B, tangentes à c et en collinéation centrale avec elle, le centre de collinéation R étant sur la droite a. Quel est le lieu du pôle P de la droite a par rapport aux coniques c' ?

Faisons les notations suivantes: D et E: intersections de a et de c; M: pôle de DE par rapport à c; t: axe de collinéation tangent en T à c et c'; K: intersection des droites t, EM, BP (en supposant d'abord que les points B et E, A et D se correspondent dans la collinéation); S: intersection de a et de t. On remarquera tout de suite que S est le deuxième point double de la projectivité définie sur a par $(RAB\ldots)$ et $(RDE\ldots)$.