Eine einfache Berechnung der Mantelfläche eines Drehkugelhufes

Nunmehr haben wir (wenn einfachheitshalber der Index i weggelassen wird):

$$K = \frac{\sum x^2}{\sum x} = \frac{\sum (M+\delta)^2}{\sum (M+\delta)} = \frac{n\,M^2 + 2\,M \sum \delta + \sum \delta^2}{n\,M + \sum \delta}$$

$$= \frac{n\,M^2 + \sum \delta^2}{n\,M} = M + \frac{\sigma^2}{M} \geqq M.$$

Weiter ist
$$K^2 = \left(M + \frac{\sigma^2}{M}\right)^2 = M^2 + 2\,\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{M^2}$$

und
$$Q^2 = \frac{\sum x^2}{n} = \frac{\sum (M+\delta)^2}{n} = \frac{n\,M^2 + \sum \delta^2}{n} = M^2 + \sigma^2.$$

Nun ist aber sicher
$$M^2 + 2\,\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{M^2} \geqq M^2 + \sigma^2 \geqq M^2,$$

also $K^2 \geqq Q^2 \geqq M^2$, d. h. $K \geqq Q \geqq M$.

Dabei haben sich als Nebenprodukt die einfachen Beziehungen zwischen K, Q und M ergeben:

$$Q^2 = M^2 + \sigma^2, \quad K = M + \frac{\sigma^2}{M}, \quad \frac{Q^2}{M} = K, \quad \text{also} \quad Q^2 = MK.$$

Nunmehr setzen wir $x_i = G\,e^{\alpha_i}$. Es folgt dann aus der Definition des geometrischen Mittels wegen $\Pi\, x_i = G^n$, daß $\sum \alpha_i = 0$ sein muß. Weiter ist stets $e^x \geqq 1 + x$, ungeachtet des Vorzeichens von x. Für positive x folgt die Ungleichung sofort aus der bekannten Reihendarstellung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

für negative x z. B. aus der Überlegung, daß $y = 1 + x$ die Tangente an e^x im Punkte $(0, 1)$ ist. Also gilt:

$$M = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{G \sum e^{\alpha_i}}{n} \geqq \frac{G \sum (1 + \alpha_i)}{n} = G + \frac{G \sum \alpha_i}{n} = G,$$

und
$$\frac{1}{H} = \frac{\sum x_i^{-1}}{n} = \frac{\sum e^{-\alpha_i}}{G\,n} \geqq \frac{\sum (1 - \alpha_i)}{G\,n} = \frac{1}{G} - \frac{\sum \alpha_i}{G\,n} = \frac{1}{G},$$

d. h.
$$M \geqq G \geqq H.$$

H. JECKLIN, Zürich.

Eine einfache Berechnung der Mantelfläche eines Drehkegelhufes[1])

c) Es soll nun der Mantelinhalt eines Drehkegelhufes berechnet werden, der zwischen einem *Hyperbelbogen* und dem ihm in der Zentralprojektion aus S entsprechenden Bogen des Grundkreises gelegen ist. (Abb. 3 wurde für die Annahme $q < p$ entworfen.)

[1]) Erster Teil in Heft 4 (1949) dieser Zeitschrift.

Bestimmen wir die Ebene der Hyperbel zunächst wieder durch die Entfernungen p und q ihrer Hauptscheitel von der Kegelspitze, so ergeben sich für die halbe Hauptachse a, die lineare Exzentrizität c und die halbe Nebenachse b der Grundrißhyperbel l' die Ausdrücke

$$a = \frac{p-q}{2} \sin\alpha = r\,\frac{p-q}{2s}, \tag{19}$$

$$c = \frac{p+q}{2} \sin\alpha = r\,\frac{p+q}{2s}, \tag{20}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{r}{s}\sqrt{p\,q}. \tag{21}$$

Der Satz von MENELAUS, angewandt auf das Dreieck PQS und die Transversale l'' in Abb. 3, liefert die Beziehung

$$\frac{r+d}{r-d} \cdot \frac{s-q}{q} \cdot \frac{p}{s+p} = 1, \tag{22}$$

aus der man

$$d = r\,\frac{2\,p\,q - (p-q)\,s}{(p+q)\,s} \tag{23}$$

erhält.

Der Abstand x der geraden Hufkante UV vom Mittelpunkt M' der Grundrißhyperbel ist dann

$$x = c - d = r\,\frac{p-q}{p+q} \cdot \frac{p-q+2\,s}{2\,s} \tag{24}$$

und die Länge y der halben Hufkante

$$y = \sqrt{r^2 - d^2} = \frac{r}{s} \cdot \frac{2}{p+q}\sqrt{p\,q\,(p+s)\,(s-q)}. \tag{25}$$

Die Fläche M_5', die vom Grundriß des zu berechnenden Kegelhufmantels bedeckt wird, läßt sich folgendermaßen zerlegen:

$$M_5' = \text{Kreissektor } S'UV - \text{Viereck } S'UM'V + \text{Hyperbelsektor } M'UV.$$

Mit Hilfe der Flächeninhaltsformeln für den Kreis- und Hyperbelsektor kann man dafür schreiben:

$$M_5' = r^2 \operatorname{arc\,cos} \frac{d}{r} - c\,y + a\,b \operatorname{arcosh} \frac{x}{a}. \tag{26}$$

Setzt man darin für a, b, c, d, x und y die eben erhaltenen, durch p, q, r und s dargestellten Ausdrücke ein und dividiert M_5' durch den Sinus des Achsenwinkels α, so findet man für den Mantelinhalt des von einem Hyperbelbogen begrenzten Drehkegelhufes die folgende Formel, in der nur die Größen p, q, r und s vorkommen:

$$\underline{M_5 = r\,s \operatorname{arc\,cos} \frac{2\,p\,q - (p-q)\,s}{(p+q)\,s} - \frac{r}{s}\sqrt{p\,q\,(p+s)\,(s-q)}}$$

$$\underline{+\, r\,\frac{p-q}{2\,s}\sqrt{p\,q} \operatorname{arcosh} \frac{p-q+2\,s}{p+q}}. \tag{27a}$$

Diese Formel nimmt, wenn man die Verhältniswerte (6) benutzt, die Gestalt an

$$\underline{M_5 = r\,s\left[\arccos\frac{2\,u\,v - u + v}{u+v} - \sqrt{u\,v\,(1+u)\,(1-v)}\right.}$$

$$\underline{\left.+\frac{u-v}{2}\sqrt{u\,v}\,\operatorname{arcosh}\frac{u-v+2}{u+v}\right].} \tag{27b}$$

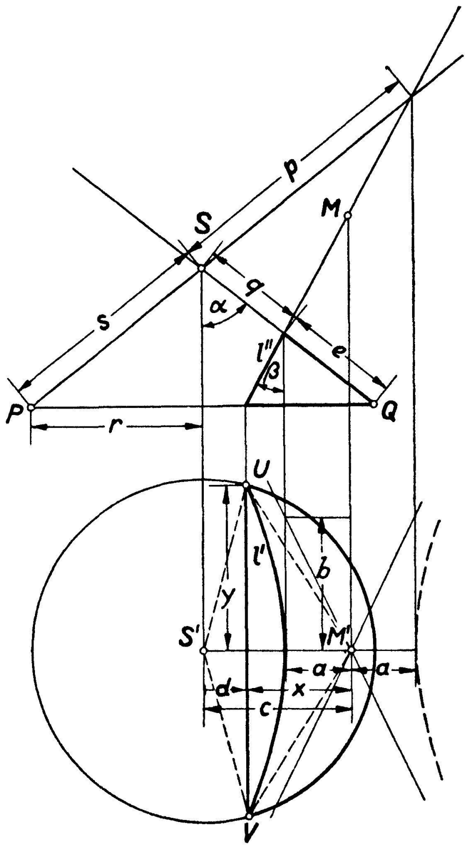

Abb. 3

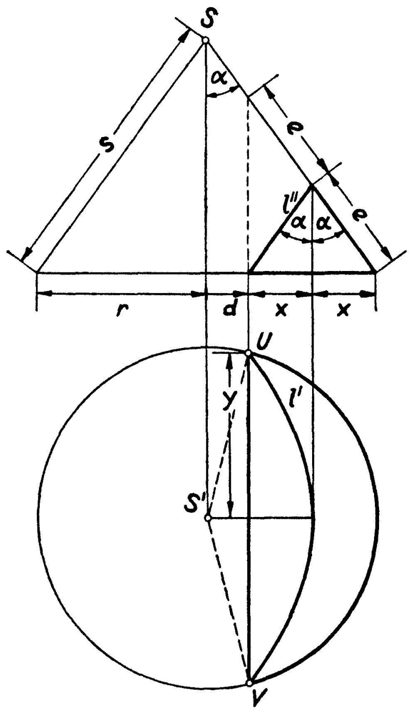

Abb. 4

Abb. 3. Der von einem Hyperbelbogen begrenzte Drehkegelhuf, dargestellt durch die Normalrisse auf seine Symmetrie- und seine Grundebene.

Abb. 4. Der von einem Parabelbogen begrenzte Drehkegelhuf, dargestellt durch die Normalrisse auf seine Symmetrie- und seine Grundebene.

Wird die Hyperbelebene durch die Größen d und e festgelegt, so folgt aus (14) und (22) für p die Darstellung

$$p = s\,\frac{(r-d)\,(s-e)}{r\,(2\,e-s)+d\,s}\,. \tag{28}$$

Damit erhält man für M_5 eine Formel, in der nur die Größen d, e, r und s auftreten:

$$\underline{M_5 = r\,s\,\arccos\frac{d}{r} - r\,\frac{e\,(s-e)}{r\,(2\,e-s)+d\,s}\sqrt{r^2-d^2} + r\,(s-e)^2\,[r\,(s-e)-d\,s]}$$

$$\underline{\times\sqrt{\frac{r-d}{s\,[r\,(2\,e-s)+d\,s]^3}}\,\operatorname{arcosh}\frac{e\,r+d\,s}{r\,(s-e)}\,.} \tag{27c}$$

Die Verwendung der Verhältniszahlen (16) führt dann zu

$$\underline{M_5 = r\,s\left[\arccos k - \frac{m(1-m)}{2m+k-1}\sqrt{1-k^2}\right.}$$

$$\underline{\left. + (1-m)^2 (1-m-k)\sqrt{\frac{1-k}{(2m+k-1)^3}}\,\operatorname{arcosh}\frac{m+k}{1-m}\right].} \tag{27d}$$

Wir wollen endlich den Kegelhuf durch r, s, d und β angeben und die Verhältniszahlen (17) benutzen. Setzen wir für e den Ausdruck (18) in (27c) ein, so erhalten wir die Darstellung:

$$\underline{M_5 = r\,s\left[\arccos k - t\,\frac{1+k\,t}{t^2-1}\sqrt{1-k^2} + \frac{(1+k\,t)^2}{(t^2-1)^{3/2}}\operatorname{arcosh}\frac{k+t}{1+k\,t}\right].} \tag{27e}$$

In dem Sonderfall, daß die geradlinige Hufkante ein Durchmesser des Grundkreises ist, bekommt man mit Hilfe von $d = 0$ bzw. $k = 0$ für den Mantelinhalt eines hyperbolisch begrenzten Drehkegelhufes die einfacheren Formeln:

$$\underline{M_5^* = \frac{\pi}{2}\,r\,s - r\,\frac{e(s-e)}{2e-s} + r\,\frac{(s-e)^3}{\sqrt{s(2e-s)^3}}\operatorname{arcosh}\frac{e}{s-e}} \tag{27c*}$$

bzw.

$$\underline{M_5^* = r\,s\left[\frac{\pi}{2} - \frac{m(1-m)}{2m-1} + \left(\frac{1-m}{\sqrt{2m-1}}\right)^3\operatorname{arcosh}\frac{m}{1-m}\right]} \tag{27d*}$$

und

$$\underline{M_5^* = r\,s\left[\frac{\pi}{2} - \frac{t}{t^2-1} + \frac{\operatorname{arcosh} t}{(t^2-1)^{3/2}}\right].} \tag{27e*}$$

Man kann in den Formeln (27) den Areacosinushyperbolicus auch durch den Logarithmus darstellen, da zwischen diesen beiden Funktionen die Beziehung besteht

$$\operatorname{arcosh} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right). \tag{29}$$

d) Ein von einem *Parabelbogen* begrenzter Drehkegelhuf ist schon durch die Abmessung e seiner längsten Erzeugenden festgelegt (Abb. 4). Es ergeben sich dann für die Abstände d und x der geraden Hufkante vom Mittelpunkt des Grundkreises bzw. vom Scheitel der Grundrißparabel und für die Länge y der halben Hufkante die Werte

$$d = r\,\frac{s-2e}{s}, \tag{30}$$

$$x = \frac{r-d}{2} = r\,\frac{s}{e}, \tag{31}$$

und

$$y = \sqrt{r^2-d^2} = \frac{2r}{s}\sqrt{e(s-e)}. \tag{32}$$

Den Grundriß M_6' des parabolisch begrenzten Drehkegelhufmantels M_6 zerlegen wir für die Berechnung in

$$M_6' = \text{Kreissektor } S'UV - \text{Dreieck } S'UV - \text{Parabelabschnitt}.$$

In mathematische Formeln umgesetzt liefert dies:

$$M_6' = r^2 \arccos \frac{d}{r} - d\,y - \frac{4}{3}\,x\,y = r^2 \arccos \frac{d}{r} - y\left(d + \frac{4}{3}\,x\right). \tag{33}$$

Setzt man darin für d, x und y die vorhin gefundenen Werte ein und dividiert M_6' durch den Sinus des Achsenwinkels α, so findet man für die Formel des Mantelinhaltes eines von einem Parabelbogen begrenzten Drehkegelhufes die beiden folgenden Gestalten, in denen nur die Größen d, r und s bzw. e, r und s vorkommen:

$$\underline{M_6 = r\,s \arccos \frac{d}{r} - \frac{s}{r} \cdot \frac{2\,r + d}{3} \sqrt{r^2 - d^2}} \tag{34a}$$

und

$$\underline{M_6 = r\,s \arccos \frac{s - 2\,e}{s} - 2\,r\left(1 - \frac{2\,e}{3\,s}\right)\sqrt{e\,(s - e)}.} \tag{34b}$$

Die Benutzung der Verhältniszahlen (16) führt schließlich auf die Ausdrücke

$$\underline{M_6 = r\,s\left[\arccos k - \frac{k + 2}{3}\sqrt{1 - k^2}\right]} \tag{34c}$$

und

$$\underline{M_6 = r\,s\left[\arccos\,(1 - 2\,m) - \frac{2}{3}\,(3 - 2\,m)\sqrt{m\,(1 - m)}\right].} \tag{34d}$$

Wird die Ebene der Parabel durch einen Durchmesser des Grundkreises gelegt, so ist $d = 0$ bzw. $k = 0$. Für diesen besonderen Fall erhält man

$$\underline{M_6^* = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) r\,s = 0{,}90413\,r\,s.} \tag{34*}$$

4. *Grenzübergänge und Zusammenhänge im Komplexen*

Läßt man beispielsweise in den Formeln (13a) und (27a) für den Mantelinhalt des elliptisch bzw. hyperbolisch begrenzten Drehkegelhufes $p \to \infty$ oder in den Formeln (13e) und (27e) $\beta \to \alpha$ und damit $t \to 1$ gehen, so erhält man als Grenzfall die Formeln (34b) bzw. (34c) für den Mantelinhalt des parabolisch begrenzten Kegelhufes.

Ferner werden die Formeln (13c) und (27c) für den Mantelinhalt eines von einem Ellipsen- bzw. Hyperbelbogen begrenzten Drehkegelhufes durch den Grenzübergang $s \to \infty$ und ebenso die Formeln (13e) und (27e), nachdem man in sie für s den sich aus (18) ergebenden Wert eingesetzt hat, durch den Grenzübergang $t \to \infty$ in die Formel

$$M_7 = \frac{2\,r\,e}{r - d}\left[\sqrt{r^2 - d^2} - d \arccos \frac{d}{r}\right] \tag{35}$$

für den Mantelinhalt eines Drehzylinderhufes[1]) übergeführt.

Bei halbkreisförmiger Grundfläche hat der Drehzylinderhuf den Mantelinhalt

$$M_7^* = 2\,r\,e. \tag{35*}$$

Alle hier angegebenen Grenzübergänge lassen sich zwar sehr einfach beschreiben, ihre rechnerische Durchführung ist aber etwas langwierig und nicht elementar, son-

[1]) Siehe etwa «Hütte», *Des Ingenieurs Taschenbuch*, Bd. I, 27. Aufl., Berlin 1941, S. 215, oder H. DUBBEL, *Taschenbuch für den Maschinenbau*, Bd. I, 8. Aufl., Berlin 1941, S. 162.

dern erfordert Hilfsmittel der Analysis (Auswertung unbestimmter Formen, Regel von DE L'HOSPITAL).

Beachtet man den bekannten Zusammenhang, der zwischen dem Arkuskosinus und dem Areacosinushyperbolicus im komplexen Gebiet besteht, so erweisen sich die Formeln (13) und (27) für den elliptisch bzw. hyperbolisch begrenzten Drehkegelhuf als völlig gleichwertig. So führt etwa die Formel (13a), wenn man in ihr p durch $-p$ ersetzt, also für p auch negative Werte zuläßt, auf die Formel (27a).

Nach dem bisher Gesagten ist es naheliegend, zu versuchen, etwa nur mit der Formel für den Mantelinhalt des elliptisch begrenzten Drehkegelhufes das Auslangen zu finden. Berechnet man aber den (reellen) Mantelinhalt eines parabolisch bzw. hyperbolisch begrenzten Drehkegelhufes etwa mit Hilfe von (13a), so hat man dabei einen nichtelementaren Grenzübergang bzw. Rechnungen mit komplexen Zahlen durchzuführen. Der theoretische Vorteil einer einzigen Formel muß demnach teuer erkauft werden.

Will man aber im Bereiche der natürlichen Anschauung bleiben und für das praktische Rechnen zahlenmäßig unmittelbar auswertbare Formeln bereitstellen, so muß man die im Text durchgeführten Fallunterscheidungen vornehmen.

ARNULF REUSCHEL, Wien.

Kleine Mitteilungen

$c = \sqrt{a^2 \pm b^2}$ *auf dem Rechenschieber*

Bisweilen kommt in einer Zahlenrechnung, die mit dem Rechenschieber durchgeführt wird, die Auswertung eines Ausdruckes von der Form $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ oder auch $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ vor ($|a| > |b|$). Meist werden dazu die beiden Quadrate unter der Wurzel einzeln berechnet, dann addiert bzw. voneinander subtrahiert, und schließlich liefert die Wurzel daraus das gesuchte Ergebnis. — Auf eine andere Weise, die jedoch wenig in Gebrauch

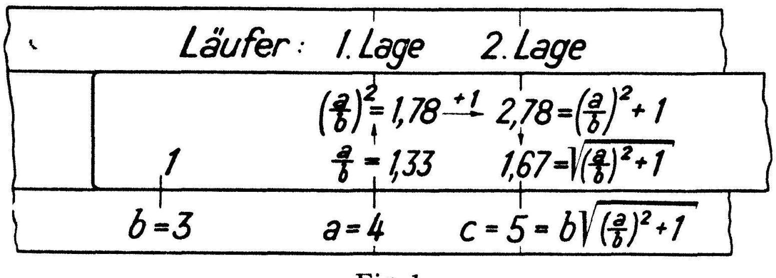

Fig. 1

sein dürfte, läßt sich nun diese Aufgabe viel schneller lösen. Der Rechnungsgang muß nur so vorgenommen werden, wie es die folgende Umformung angibt:

$$c = b\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 \pm 1}\,; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 > 1.$$

Ein Zahlenbeispiel, das gleichzeitig als Gedächtnisstütze dienen mag, wird am besten dieses Verfahren erläutern. Es sei $a = 4$ und $b = 3$, also $c = 5$, wenn das Pluszeichen gewählt wird. Zunächst wird das Verhältnis a/b so gebildet, daß es auf der unteren Teilung der *Zunge* erscheint, wie es in der Fig. 1 in leicht ersichtlicher Weise dargestellt ist.