Literaturüberschau

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **3 (1948)**

Heft 4

3° On fait tourner le plan horizontal de projection autour de la droite $V(0, 1, 0)$, $V(4, 7, 2)$ jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire au plan vertical. Déterminer la position que prend le point $A(7, 6, 0)$ après cette rotation.

4° On donne les droites $l = U(2, 0, 4)$, $V(4, 10, 0)$ et $m = W(10, 0, 0)$, $X(12, 0, 4)$, et les deux points $A(4, 3, 2)$ et $B(8, 3, 0)$. Les droites l et m se trouvent dans deux plans parallèles tangents à un cylindre de révolution qui passe par A et B. Construire l'axe d'un des cylindres possibles.

5° Répondre aux questions suivantes: a) Combien y a-t-il d'axes de symétrie dans un cube? Quelle est leur position? b) Combien y a-t-il d'axes de symétrie dans un octaèdre régulier? Quelle est leur position? c) Soit G un corps quelconque. G_1 est le symétrique de G par rapport à un plan E. G_2 est le symétrique de G_1 par rapport à un axe a. G_3 est le symétrique de G_2 par rapport à un point M. Quelle est la symétrie qui transforme directement G en G_3 si a est dans E et M sur a?

L'axe Ox des coordonnées est dirigé à droite, Oy en avant et Oz en haut. Unité = 1 cm. Explications claires et concises des constructions effectuées.

Darstellende Geometrie (April 1948).

Wahl des Koordinatensystems: Nullpunkt in der Mitte des verfügbaren Platzes; x-Achse nach vorn, y-Achse nach rechts, z-Achse nach oben; Einheit = 1 cm. Die Lösung jeder Aufgabe ist kurz zu beschreiben.

Grund- und Aufrißverfahren

1. Der Punkt $S(4, -2, 10)$ ist Spitze eines geraden Kreiskegels, dessen Achse noch durch $A(9, 8, 0)$ geht. Sein Grundkreis läuft durch $P(5, 7, 6)$. Man stelle Grundkreis und Kegelumriß dar und bestimme den Öffnungswinkel des Kegels.

2. Gegeben ein Parallelflach durch die in der Grundrißebene liegende Seitenfläche $A(5, -3, 0)$, $B(7, -7, 0)$, $C(3, -6, 0)$, $D(1, -2, 0)$ und durch den Endpunkt $E(5, 6, 9)$ der dritten von A ausgehenden Kante. Auf der Seitenfläche mit der ersten Spur AB ist ein Punkt $F(6, -2\frac{1}{2}, ?)$ gegeben und auf der Seitenfläche mit der Spur AD ein Punkt $G(2, 2, ?)$. Lege durch FG die Ebenen, die ein Rechteck aus dem Parallelflach schneiden und stelle die möglichen Rechtecke dar.

3. Gegeben eine Ebene E durch die Punkte $P(0, -5, 0)$, $Q(10, 5, 0)$, $R(0, 5, 10)$ und eine Gerade $A(8, 4, 8)$, $B(1, 0, 2)$. Lege durch diese Gerade eine Ebene, die mit E und mit der Grundrißebene gleiche Winkel einschließt. (Beide Lösungen sind durch die Sperren anzugeben.)

Kotierte Normalprojektion

4. Der Leitkreis eines schiefen Kreiszylinders liegt in der Grundrißebene und hat den Mittelpunkt $M(-4, 4, 0)$, und den Radius 3. Die Zylinderachse geht durch $N(3, -3, 5)$. Man konstruiere den Schnitt des Zylinders mit der Ebene, die durch die y-Achse und durch N geht.

Literaturüberschau

JOHANN HEINRICH LAMBERT

Mathematische Werke, 2. Band

Arithmetik, Algebra und Analysis II. Herausgegeben von ANDREAS SPEISER.

Johannis Henrici Lamberti Opera mathematica. Vol. secundum. Commentationes arithmeticae, algebraicae et analyticae. Pars altera. Edidit Andreas Speiser. Orell Füßli Verlag, Zürich (324 S., 8°. In Leinen Fr. 25.–).

Dem Herausgeberfleiß des Professors Dr. ANDREAS SPEISER ist es gelungen, schon nach Jahresfrist den zweiten inhaltsreichen Band von LAMBERTS Werken den mathematischen Lesern vorzulegen, und sie werden ihm dafür Dank wissen.

Über den originellen Kauz LAMBERT, der sich stolz Mulhusino Helvetus nannte, haben die «Elemente» in ihrem 2. Band, S. 79, bereits berichtet; neuen Lesern sei daher nur mitgeteilt, daß er von 1728 bis 1777 lebte und den Höhepunkt seines Wirkens als Mitglied der Berliner Akademie, reiner Forschung sich hingebend, erreichte; mit EULER zählte er zu den berühmtesten Köpfen dieser Arbeitsstätte.

Wiederum hat es sich der Bearbeiter angelegen sein lassen, in einer «Vorrede» die Brücke von LAMBERTS Abhandlungen zum Verständnis des heutigen Lesers zu schlagen, wie es nach einer Zeitspanne von bald zwei Jahrhunderten nötig ist. Man bewundert dabei seine Ingenieurkunst; denn der Brückenschlag ist durchaus notwendig. Gleichzeitig reizen diese Einführungen den Leser zum Durcharbeiten der Originalarbeiten. Die dreizehn Teile seien hier zuerst einmal aufgezählt.

1. Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen zur Erleichterung und Abkürzung der bei Anwendung der Mathematik vorfallenden Rechnungen (Berlin 1770).
2. Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques (Berlin 1768).
3. Sur la méthode du calcul intégral (Berlin 1769).
4. Adnotata quaedam de numeris eorumque anatomia (Nova acta eruditorum 1769).
5. Solutio problematis ad methodum tangentium inversam pertinensis (Ebendort, 1769).
6. Observations sur les équations d'un degré quelconque (Berlin 1770).
7. Observations sur les diviseurs des équations d'un degré quelconque qui peuvent être trouvés indépendamment de la solution des équations (Berlin 1770).
8. Observations trigonométriques (Berlin 1770).
9. Observations analytiques (Berlin 1770 und 1772).
10. Zusatz zu der Lehre vom Einschalten (Berlin 1777).
11. Über die Mehrheit der Wurzeln höherer Gleichungen (Leipzig 1787).
12. Die Differential- und Integralrechnung endlicher Größen (Leipzig 1788).
13. J. H. LAMBERTS mathematische Ergötzungen über die Glücksspiele. Aus dessen hinterlassenen Schriften von Herrn Direktor BERNOULLI mitgeteilt (Leipzig 1799).

Im beigefügten Namensverzeichnis erscheinen EULER und NEWTON als die meistgenannten Quellen.

Die drei zuletzt angeführten Nummern sind postum herausgekommen; die Jugendarbeit über die Wahrscheinlichkeit in einigen ungenügend beschriebenen Kartenspielen verdiente kaum die Wiedergabe. Doch die Nummern 11 und 12 sind bedeutend, bringt doch Nr. 12 die Anfänge moderner Differenzenrechnung in eigenwilliger Form. Die unvollendete Betrachtung (11) über die Mehrheit der Wurzeln löst sich zum Schluß in Notizen auf; sie enthält aber auch so eine Fülle von Anregungen, sogar für den Schulunterricht, in angewandten Gleichungen ersten und höheren Grades. Nur beim ersten Grade findet man einzig die Größe, die man sich gedacht hat; in allen andern Fällen, da man nur *eine* Größe sucht, aber eine Gleichung zweiten oder höheren Grades verwenden muß, findet man mehrere Größen und hat zu entscheiden, ob sie alle zulässig seien oder ob welche unter ihnen dank Nebenbedingungen auszuschließen seien. Ein von CLAIRAUT stammendes Beispiel liefert nach LAMBERT die Lösungen $\sin \omega = 1 \pm \sin \lambda$. Wenn λ der oberen Halbebene angehört, muß das Pluszeichen ausgeschlossen werden! Origineller und ganz im Geiste LAMBERTS ist ein anderes Beispiel, worin ein Quecksilberstand im Barometer gesucht wird, die quadratische Gleichung aber zwei Lösungen liefert, wovon eine dadurch unmöglich wird, daß das Quecksilber über die Röhre hinausragen müßte. In solcher Diskussion der Lösungen enthüllt sich erst der Problemkern; man weiß aus der Schule, daß es den Anfängern Mühe, aber auch Vergnügen bereitet. Ein früherer Herausgeber, OBERREIT in Dresden, hat einen vernünftig einschränkenden Zusatz beigesteuert.

Die «Nova acta eruditorum» wurden lateinisch herausgegeben; daher sind die Abhandlungen 4 und 5 auch so abgefaßt. Die zahlentheoretische (4) beschäftigt sich mit den Perioden der Dezimalbrüche rationaler Zahlen und beweist elegant den zugehörigen Satz von FERMAT sowie den Satz über die Länge der Periode.

Die zweite lateinische Abhandlung (5) löst niedlich die Frage nach der Kurve, die ein Hund beschreibt, wenn er mit konstanter Geschwindigkeit vom Felde her stets in der Richtung gegen einen Hasen läuft, der ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit einer geradlinigen Mauer entlangrennt.

Mit einem Lieblingsgegenstand, auf den er verschiedentlich zurückkommt, beschäftigt sich LAMBERT in Nr. 8: es sind die *hyperbolischen Winkelfunktionen.* Ihren Nutzen zeigt er schlagend an einem Beispiel aus der Astronomie. Sein anderes großes Anliegen besteht in der Verbesserung von *Zahlentafeln* und in Zusätzen für geeignetere *Interpolation*; daher die Arbeiten 1 und 10.

Einen geschichtlichen Höhepunkt erklimmt LAMBERT in der bemerkenswerten und klassischen Arbeit (2) über transzendente Größen: er beweist darin erstmalig streng die *Irrationalität der Zahl* π, und zwar durch Betrachten der Kreisbögen mit rationalen Tangenswerten. Er beweist den schönen Satz: Die Tangensfunktion eines Winkels steht niemals zu ihrem Winkel in einem rationalen Verhältnis. Da nun $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$, so muß $\pi/4$ und damit π selber irrational sein. Am Schluß der Abhandlung vermutet er darüber hinaus, daß keine trigonometrische oder logarithmische Funktion sich durch Wurzelzeichen aus ihrem Argument darstellen lasse, beweist aber nur, daß $\operatorname{tg} \alpha$ mit rationalem α nicht Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl sein kann. Der Beweis für die Transzendenz hat ja noch lange auf sich warten lassen!

Die Geschichte der Mathematik kennt seit altersher geniale Einzelgänger und Pioniere; doch in der Neuzeit nimmt ihre Zahl stark ab. Die Wissenschaft erfordert die Kenntnis von Vorarbeiten und Versuchen. Auch der gewiß geniale EULER übersetzt eine englische Ballistik und erfüllt sie dabei durch Verbesserungen mit seinem eigenen Geist. Als einer der letzten erfolgreichen Alleingänger, der sich von seinen Vorbildern ganz unabhängig zu machen weiß, der alles, was er schreibt, mit seinem eigenwilligen Sinn durchtränkt und darum den Leser stets wieder in seinen Bann zieht, erscheint der Mulhusino Helvetus JOHANN HEINRICH LAMBERT. *E. Voellmy.*

JOHANN JAKOB BURCKHARDT:

Die Bewegungsgruppen der Kristallographie
Verlag Birkhäuser, Basel 1947 (184 S.).

Eine der wichtigsten Anwendungen der Gruppentheorie besteht in der Aufstellung der diskreten Bewegungsgruppen des euklidischen Raumes R_n mit endlichem Fundamentalbereich, der sogenannten Raumgruppen. Ihre Anzahl ist endlich, wie von HILBERT vermutet und von BIEBERBACH bewiesen wurde. In der Ebene erhält man damit die Symmetrien der Ornamente, im dreidimensionalen Raum R_3 die Kristallstrukturen. Die 17 ebenen Gruppen lassen sich leicht geometrisch ableiten, wie z.B. in dem prächtigen Kapitel über Ornamente in der «Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung» von A. SPEISER ausgeführt ist. Die Bestimmung der 230 Gruppen des R_3 ist eine mühsamere Aufgabe. Sie wurde zuerst 1891 von A. SCHOENFLIES gelöst. Dieses Resultat hat die Kristallographie gewaltig gefördert und führte zu einer neuen vollständigen Darstellung der Raumgruppen durch P. NIGGLI in seinem 1919 erschienenen fundamentalen Werk «Geometrische Kristallographie des Diskontinuums». Inzwischen ergaben sich mannigfaltige Beziehungen zwischen der Lehre der Raumgruppen und anderen mathematischen Gebieten, wie Topologie, Darstellungstheorie der Gruppen, Theorie der regulären Körper in mehrdimensionalen Räumen.

Die auf geometrischem Wege erzielte Klassifikation der Raumgruppen für $n \leqq 3$ wird im vorliegenden Buch auf möglichst einfache Weise arithmetisch hergeleitet. Diese Methode gibt nicht nur eine willkommene Kontrolle der bisherigen Resultate, sondern auch eine vertiefte Einsicht in die Struktur der Gruppen sowie die Aussicht, das Problem auch für mehr als drei Dimensionen zu lösen.

Im Zentrum der Betrachtungen stehen die Punktgitter. Ihre Eigenschaften werden durch die Deckoperationen oder Symmetrien dargestellt, die das Gitter in sich überführen. Das Gitter im R_n gestattet zunächst die Translationsgruppe T, eine freie Abelsche Gruppe mit n Erzeugenden, die den Koordinatenvektoren des Gitters entsprechen.

Die Deckoperationen, die einen Gitterpunkt festlassen, bilden eine endliche Gruppe von linearen homogenen orthogonalen Substitutionen in n Variabeln, deren Koeffizienten in dem durch T bestimmten Koordinatensystem ganzzahlig sind. Diejenigen dieser Gruppen, die durch Transformation mit einer unimodularen ganzzahligen Matrix auseinander hervorgehen, bilden eine arithmetische Kristallklasse.

Jede Bewegung im R_n läßt sich aus einer Rotation und einer Translation zusammensetzen. Die rotativen Bestandteile werden dabei durch quadratische orthogonale Matrizen mit n^2 Elementen dargestellt. In jeder Gruppe G von Bewegungen bilden die Translationen einen Abelschen Normalteiler T, dessen Faktorgruppe zur orthogonalen Gruppe G_0 der rotativen Bestandteile isomorph ist. Bei einer Raumgruppe im hier betrachteten Sinn ist T der maximale Abelsche Normalteiler. Er besitzt also n unabhängige Elemente, und das von diesen aufgespannte Gitter geht bei den Operationen der Raumgruppe in sich über. In diesem Fall ist die Gruppe G_0 endlich, und ihre Matrizen sind in dem durch T bestimmten Koordinatensystem ganzzahlig. Somit gehört G_0 zu einer Kristallklasse. Die Bestimmung aller zu einer Kristallklasse gehörenden Raumgruppen besteht nun in der «Erweiterung» von T in dem Sinn, daß man alle nicht isomorphen Gruppen G aufsucht, die einen mit T isomorphen Normalteiler enthalten, dessen Faktorgruppe zu G_0 isomorph ist. Diese Aufgabe hat nur endlich viele Lösungen und führt in diesem Fall auf die Auflösung gewisser Kongruenzen (mod 1) (Frobeniussche Kongruenzen). Auf diese Weise ergeben sich sämtliche Raumgruppen, nachdem die Kristallklassen aufgestellt sind. Dabei ist es wichtig, die gegenüber dem gewöhnlichen geometrischen Klassenbegriff verfeinerte Einteilung in arithmetische Kristallklassen zu verwenden, die von Burckhardt eingeführt worden ist.

Alle für das Verständnis notwendigen Hilfsmittel aus der Algebra und der Gruppentheorie sind am Anfang zusammengestellt. Die Darstellung ist sehr übersichtlich und klar und wird durch zahlreiche Abbildungen unterstützt. Da der Anschluß an die Kristallographie gewahrt ist, kann dieses vorzügliche Werk in Verbindung mit der kristallographischen Literatur studiert werden. Es wird sowohl dem Mathematiker wie dem Kristallographen neue Einsichten vermitteln. *E. Trost.*

L'Œuvre scientifique et technique de G.-H. Dufour

Ausgewählt von F. Baeschlin, H. Favre, L. Kollros und F. Stüssi.
Editions du Griffon, Neuchâtel 1947

Guillaume-Henri Dufour, dreimal oberster Befehlshaber der schweizerischen Armee, jedem Schweizer von Jugend an bekannt als General der eidgenössischen Truppen im Sonderbundskrieg, durch dessen maßvolle, kluge und rasche Durchführung er auch zum Mitschöpfer unseres Bundesstaates geworden ist, ferner Schöpfer des großartigen, seinerzeit schönsten Kartenwerkes 1:100000, dem heute noch mustergültigen sogenannten Dufour-Atlas, wird in der Publikation, einer Sammlung unveröffentlichter Schriften Dufours, dem Leser in reizvoller Art als Mathematiker und Bauingenieur nähergebracht. Den Mathematiker wird die Abhandlung des 84jährigen Dufour über Gnomonik, ferner das Kapitel Perspektive mit Anwendungen für Schattenkonstruktionen mit Zeichnungen des Studenten Dufour interessieren. Seine angewandte Mechanik und Festigkeitslehre gibt einen schönen Querschnitt durch den damaligen Stand dieser Wissenschaft und die hervorragenden Kenntnisse Dufours auf diesem Gebiet. Der gewissenhafte und erfindungsreiche Ingenieur zeigt sich in den von ihm erstellten und beschriebenen Brückenbauten für seine Vaterstadt Genf und dem allerdings nicht ausgeführten Projekt für eine Hängebrücke in Fribourg von einer auch in Fachkreisen wenig bekannten Seite. Für den Fachmann reizvoll, wie er bei aller Anerkennung der durch seinen Konkurrenten Chaley ausgeführten, damals kühnsten Hängebrücke, deren Schwächen erkennt und die sich, wenn auch viel später, am Bauwerk zeigten. Eingehende eigene Untersuchungen über die Festigkeit des Stahls und Messungen am fertigen Bauwerk zeigen den neue Wege einschlagenden Ingenieur. Mit einer Abhandlung über Hydraulik, verwendet in einem Kurs an der Genfer Akademie, mit besonderer Berücksichtigung in deren Anwendung für Flüsse, wobei DUFOUR als Genfer, das eindrucksvolle Schauspiel der Einmündung der Arve in die Rhone vor Augen, das Problem der Vereinigung zweier Flüsse besonders beschäftigt, schließt der interessante Band. Der große Topograph kommt nur in einer kleinen Skizze über die sogenannte abgeänderte Projektion von FLAMSTEED (Bonnesche Projektion) zu Wort, da die Herausgeber es in dem in französischer Originalfassung sauber und klar gedruckten Band vermeiden wollten, Bekanntes zu wiederholen. Eine Bibliographie, zusammengestellt von PIERRE BOURGEOIS, ergänzt aufs beste die Kenntnis über die wissenschaftliche, technische und militärische Lebensarbeit DUFOURS. *Max Schmid.*

R. JUNGEN: *Vierstellige Logarithmen und Zahlentafeln*
Orell Füßli Verlag, Zürich (24 S., 8°. Fr. 2.25).

Der Zweck dieser Tafeln, welche im Rahmen des mathematischen Unterrichtswerkes, herausgegeben vom Verein schweizerischer Mathematiklehrer, erschienen sind, ist es, die Lücke zwischen den großen fünfstelligen Tafeln und dem Rechenschieber, der in seiner üblichen Form ja nur drei Stellen gibt, durch ein wirklich handliches Rechenhilfsmittel auszufüllen. Diese Lücke entstand durch den Wegfall ähnlicher Tafeln deutscher Herkunft. – Je auf zwei Seiten finden wir die dekadischen Logarithmen (dazu für Zinseszinsrechnungen die Logarithmen der Zahlen 100 bis 110 fünfstellig), die trigonometrischen Funktionen und deren Logarithmen von 10′ zu 10′ (alte Teilung), die Logarithmen von sin und tg der kleinen Winkel von 1′ zu 1′ sowie die Quadratzahlen und die Kuben. Zwei weitere Seiten bringen die Kehrwerte, die Quadratwurzeln, die natürlichen Logarithmen und die Tabellen mit π, wie sie für Kreis- und Kugelrechnungen gebraucht werden. Spezialwerte mit π sind in einer besonderen kleinen Zusammenstellung enthalten; eine einfache Zinseszins- und Rententabelle ist auf einer einzigen Seite untergebracht. Damit die Benützer dieser kleinen Tafel neben den Benützern der großen Tafel von VOELLMY bei Prüfungen nicht benachteiligt werden, enthält auch die Tafel von JUNGEN auf den letzten vier Seiten eine sorgfältig ausgewählte Sammlung der wichtigsten Formeln. – Überall dort, wo für Übungen im Gebrauch solcher Tafeln verhältnismäßig wenig Zeit zur Verfügung steht, ist diese vierstellige Tafel besser als die fünfstellige dazu angetan, den Schüler ihren Nutzen empfinden zu lassen, weil er viel weniger blättern muß und dadurch weniger in ihr «ertrinkt». Außerdem kann die Interpolation geübt werden, ohne daß die gegebenen Zahlen eine Genauigkeit aufweisen müssen, wie sie nur durch eigentliche Präzisionsmessungen erreicht werden kann; nimmt doch schließlich der Schüler nach Übungen mit einer fünfstelligen Tafel fälschlicherweise die Angabe der einzelnen Sekunden von den als gemessen angenommenen Winkeln so gut als Selbstverständlichkeit hin wie den Zentimeter bei einer 800 m langen Strecke. – Gerade weil die Tafeln von JUNGEN darauf verzichten, ein Rechenhilfsmittel für Ingenieure und Fachleute ähnlicher Richtung zu sein, werden sie dank ihrer Handlichkeit und Übersichtlichkeit (und ihres bescheidenen Preises) in Laboratorien und in vielen Schulen sehr gute Dienste leisten. Sie eignen sich für humanistische Mittelschulen und Lehrerbildungsanstalten nicht weniger als für Volkshochschulen und vielleicht auch für gewisse Klassen gewerblicher Fortbildungsschulen. *Karl Beck.*

Anfrage aus dem Leserkreis

Ist ein Dreieck aus den Längen der drei Winkelhalbierenden oder aus den Längen der drei Mittelsenkrechten (Seitenmitte bis Umkreismittelpunkt) mit Zirkel und Lineal konstruierbar? Antworten erbeten an Dr.-Ing. J. BRUNNER, Weinbergstraße 84, Zürich. (Zur ersten Frage: Die Bestimmung eines Dreiecks aus den Winkelhalbierenden führt auf eine Gleichung zehnten Grades und ist mit Zirkel und Lineal nicht möglich. Siehe K. WOLFF, J. reine angew. Math. *177*, 1937, S. 134; die Gruppe der Gleichung bestimmte B. L. VAN DER WAERDEN, *179*, 1938, S. 65.)