Eine geometrische Anwendung der grundlegenden algebraischen Mittelwerte

Autor(en): **Jecklin, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **3 (1948)**

Heft 3

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-13576

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Wenn demnach für jedes System A von n Zahlen die Ungleichungen

$$m_1(A) \geqq m_2(A) \geqq m_3(A) \geqq \cdots \geqq m_n(A) \tag{1}$$

gelten, so gelten folgende Ungleichungen für das System B von $n+1$ Zahlen:

$$m_1(B) \geqq m_2(B) \geqq m_3(B) \geqq \cdots \geqq m_n(B). \tag{4}$$

Man kann schließlich noch beweisen, daß aus der Ungleichung

$$m_1^*(B) \geqq m_n(B) \tag{5}$$

notwendig die Ungleichung folgt

$$m_n(B) \geqq m_{n+1}(B). \tag{6}$$

Wendet man nämlich Ungleichung (5) auf das System der reziproken Werte $\frac{1}{b_1}; \frac{1}{b_2}; \ldots; \frac{1}{b_{n+1}}$ an, so wird

$$\frac{m_n^n(B)}{m_{n+1}^{n+1}(B)} \geqq \sqrt[n]{\frac{m_1(B)}{m_{n+1}^{n+1}(B)}},$$

was geschrieben werden kann

$$m_n^{n^2-1}(B) \geqq \frac{m_1(B)}{m_n(B)}\, m_{n+1}^{n^2-1}(B),$$

oder wegen (5)

$$m_n^{n^2-1}(B) \geqq m_{n+1}^{n^2-1}(B),$$

somit

$$m_n(B) \geqq m_{n+1}(B). \tag{6}$$

Aus (4) und (6) folgen also die behaupteten Relationen

$$m_1(B) \geqq m_2(B) \geqq m_3(B) \geqq \cdots \geqq m_{n+1}(B). \tag{2}$$

Die Ungleichungen (1) und (2) gelten aber für $n=2$, somit gelten sie auch für $n=3$, dann für $n=4$ usw., das heißt, sie gelten *allgemein für jedes ganzzahlige n.*

H. KREIS, Winterthur.

Eine geometrische Anwendung der grundlegenden algebraischen Mittelwerte

Seien gegeben n positive Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, und bezeichne $\underset{k}{C}\, a_i$ eine Kombination derselben zur Klasse k, so ergeben sich für jedes k im ganzen $\binom{n}{k}$ verschiedene solcher Kombinationen, und durch Summation derselben erhalten wir die den n Größen a_i zugeordneten n elementarsymmetrischen Funktionen $s_{n,k} = \Sigma \underset{k}{C}\, a_i$.

Mit $M_{n,k} = \sqrt[k]{\frac{s_{k,n}}{\binom{n}{k}}}$ definieren wir den grundlegenden algebraischen Mittelwert k-ter Ordnung der n Größen a_i (siehe «Elemente der Mathematik» III, Nr. 1). Es gilt, sofern nicht alle a_i einander gleich sind,

$$M_{n,1} > M_{n,2} > M_{n,3} > \cdots > M_{n,n},$$

wobei $M_{n,1}$ das arithmetische und $M_{n,n}$ das geometrische Mittel ist. Einen Beweis hiefür gibt u.a. die Arbeit von H. KREIS in diesem Heft.

Wir betrachten vorerst ein Rechteck mit den Seitenlängen a_1 und a_2. Der Umfang ist dann:

$$2(a_1 + a_2) = 2 s_{2,1} = 4 M_{2,1}$$

und die Fläche:

$$a_1 a_2 = s_{2,2} = M_{2,2}^2.$$

Offenbar ist $M_{2,1}$ die Seite des Quadrats mit gleichem Umfang und $M_{2,2}$ die Seite des Quadrats mit gleicher Fläche wie das Rechteck. Wegen $M_{2,1} > M_{2,2}$ folgt:

$$\text{a)} \quad M_{2,1}^2 > M_{2,2}^2 = a_1 a_2,$$

das heißt: von allen Rechtecken gleichen Umfangs hat das Quadrat den größten Flächeninhalt;

$$\text{b)} \quad 4 M_{2,2} < 4 M_{2,1} = 2(a_1 + a_2),$$

das heißt: von allen Rechtecken gleicher Fläche hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

Sei nun gegeben ein rechtwinkliger Quader mit den respektiven Seitenlängen a_1, a_2 und a_3, so ist

die gesamte Kantenlänge: $4(a_1 + a_2 + a_3) = 4 s_{3,1} = 12 M_{3,1}$,
die gesamte Oberfläche: $2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) = 2 s_{3,2} = 6 M_{3,2}^2$,
und das Volumen: $a_1 a_2 a_3 = s_{3,3} = M_{3,3}^3$.

Offenbar ist

$M_{3,1}$ die Länge der Kante des Würfels mit gleicher Kantenlängensumme,
$M_{3,2}$ die Länge der Kante des Würfels mit gleicher Oberfläche und
$M_{3,3}$ die Länge der Kante des Würfels mit gleichem Volumen wie der Quader.

Wegen $M_{3,1} > M_{3,2} > M_{3,3}$ folgt

$$\text{a)} \quad 6 M_{3,1}^2 > 6 M_{3,2}^2 = 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3),$$
$$M_{3,1}^3 > M_{3,3}^3 = a_1 a_2 a_3,$$

das heißt von allen Quadern mit gleichem Kantenlängentotal hat der Würfel die größte Oberfläche und das größte Volumen;

$$\text{b)} \quad 12 M_{3,2} < 12 M_{3,1} = 4(a_1 + a_2 + a_3),$$
$$M_{3,2}^3 > M_{3,3}^3 = a_1 a_2 a_3,$$

das heißt von allen Quadern mit gleicher Oberfläche hat der Würfel die kleinste gesamte Kantenlänge, aber das größte Volumen;

$$\text{c)} \quad 6 M_{3,3}^2 < 6 M_{3,2}^2 = 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3),$$
$$12 M_{3,3} < 12 M_{3,1} = 4(a_1 + a_2 + a_3),$$

das heißt von allen Quadern mit gleichem Volumen hat der Würfel die kleinste Oberfläche und das kleinste Kantenlängentotal.

Wir bezeichnen jetzt mit $B_{n,k}$ die Summe der k-dimensionalen Begrenzungselemente eines n-dimensionalen rechtwinkligen Quaders. Nachdem $M_{n,k}$ offenbar die Länge einer Kante des Würfels mit gleichem $B_{n,k}$ wie der Quader ist, folgt

$$B_{n,k} = Z_{n,k} M_{n,k}^k = Z_{n,k} \frac{s_{n,k}}{\binom{n}{k}},$$

wenn $Z_{n,k}$ die Zahl der k-dimensionalen Begrenzungselemente des n-dimensionalen Quaders bedeutet. Es ist aber

$$Z_{n,k} = Z_{n,k-1} \frac{n-k+1}{2k} = \binom{n}{k} 2^{n-k},$$

woraus auch folgt:

$$\frac{Z_{n,k}}{\binom{n}{k}} = \frac{Z_{n+t,\,k+t,}}{\binom{n+t}{k+t}} = 2^{n-k}.$$

Sinngemäß bedeutet $Z_{n,0}$ die Zahl der Ecken des n-dimensionalen Quaders und ist gleich 2^n. Es ist somit also:

$$B_{n,k} = \binom{n}{k} 2^{n-k} M_{n,k}^k = \binom{n}{k} 2^{n-k} \frac{s_{n,k}}{\binom{n}{k}} = 2^{n-k} s_{n,k}.$$

Folgender kleiner Tabellenausschnitt gibt eine ziffernmäßige Veranschaulichung der eben genannten Formeln:

n	$\binom{n}{0}$	$Z_{n,0}$	$\frac{Z_{n,0}}{\binom{n}{0}}$	$\binom{n}{1}$	$Z_{n,1}$	$\frac{Z_{n,1}}{\binom{n}{1}}$	$\binom{n}{2}$	$Z_{n,2}$	$\frac{Z_{n,2}}{\binom{n}{2}}$	$\binom{n}{3}$	$Z_{n,3}$	$\frac{Z_{n,3}}{\binom{n}{3}}$
0	1	1	1									
1	1	2	2	1	1	1						
2	1	4	4	2	4	2	1	1	1			
3	1	8	8	3	12	4	3	6	2	1	1	1
4	1	16	16	4	32	8	6	24	4	4	8	2
5	1	32	32	5	80	16	10	80	8	10	40	4
6	1	64	64	6	192	32	15	240	16	20	160	8

Es besteht also eine sehr einfache Beziehung zwischen der Summe der k-dimensionalen Begrenzungselemente einerseits und den elementarsymmetrischen Funktionen bzw. den grundlegenden algebraischen Mittelwerten anderseits, und es lassen sich die vorgängig für Ebene und euklidischen Raum genannten Sätze ohne weiteres auf n Dimensionen übertragen. Wegen

$$M_{n,1} > M_{n,2} > \cdots > M_{n,k-1} > M_{n,k} > \cdots > M_{n,n}$$

ist $\quad Z_{n,k+t} M_{n,k}^{k+t} > Z_{n,k+t} M_{n,k+t}^{k+t} = B_{n,k+t} \qquad k+t \leqq n$

und $\quad Z_{n,k-t} M_{n,k}^{k-t} < Z_{n,k-t} M_{n,k-t}^{k-t} = B_{n,k-t}, \qquad k-t \geqq 1$

das heißt: von allen n-dimensionalen Quadern mit $B_{n,k}$ = konstant hat der Würfel die größten $B_{n,k+t}$ und die kleinsten $B_{n,k-t}$, oder, mit anderen Worten: von allen n-dimensionalen Quadern mit gleicher Summe der k-dimensionalen Begrenzungselemente hat der Würfel die größten Summen der mehr als k-dimensionalen Begrenzungselemente und die kleinsten Summen der weniger als k-dimensionalen Begrenzungselemente.

H. JECKLIN, Zürich.