Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 2 (1947)
Heft: 5

Rubrik: Literaturüberschau

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

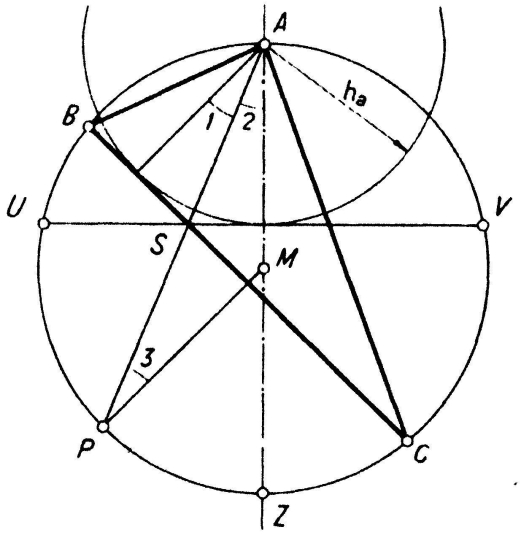
Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

di ottavo ordine fa parte l'asse centrale O_1O_2 di K_1 et K_2 contato 4 volte; onde si conclude che *il luogo richiesto del centro di K è una quartica.*

Tale quartica è interessante sotto vari aspetti: e sarà oggetto di studio in un articolo a parte. NORA CATTANEO, Lugano.

Aufgabe 21. Man konstruiere ein Dreieck aus einer Höhe, dem Umkreisradius und dem Inkreisradius. VIKTOR KRAKOWSKI.



Lösung: Schlage um A den Kreis mit dem Radius h_a und ziehe an diesen die Tangente UV, die senkrecht zum Durchmesser AZ steht. Ziehe die Sehne AP durch den Schnittpunkt S von BC und UV. Nun ist

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, weil BC und UV Tangenten an denselben Kreis sind,

$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 2$, weil das ΔPAM gleichschenklig ist; demnach

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$; d. h. MP steht senkrecht auf BC und AP ist folglich Winkelhalbierende von ΔABC. Daraus folgt, daß der Inkreis von ΔABC auch UV berührt.

Aus der Umkehrung des Satzes von EULER über den Zentralabstand von In- und Umkreis des Dreiecks folgt, daß es ein Dreieck mit der Grundlinie UV gibt, das mit dem ΔABC Um- und Inkreis gemeinsam hat. Das Zentrum seines Inkreises liegt auf dem Kreis um Z durch U und V.

Hieraus ergibt sich die folgende einfache Konstruktion:

Zeichne den Umkreis und wähle darauf A. Bestimme die Punkte U und V. Das Zentrum des Inkreises liegt im Schnitt des Kreises um Z durch U und V mit der Parallelen zu UV im Abstand ϱ nach der Seite, auf der A liegt. Schluß der Konstruktion und Diskussion sind selbstverständlich. WILLI LÜSSY, Winterthur.

Rechnerische Lösungen, die einen leicht konstruierbaren Ausdruck für eine Seite oder eine andere geeignete Größe im Dreieck liefern, teilten L. KIEFFER (Luxembourg) und A. AESCHLIMANN (Burgdorf) mit.

Literaturüberschau

J. G. VAN DER CORPUT:

On sets of integers, I. Indagationes Mathematicae *9*, 159–168 (1947).

In unserem Bericht über den Begriff der Dichte einer Folge natürlicher Zahlen[1]) wurde darauf hingewiesen, daß für die Dichte γ der Summenfolge $A + B$ der Folgen A, B mit den Dichten α, β vermutlich gilt $\gamma \geqq \alpha + \beta$. Inzwischen ist bekannt geworden, daß ein erster Beweis dieser berühmten Hypothese schon 1942 in Amerika von H. B. MANN[2]) gefunden wurde. Verbesserte Beweisanordnungen gaben E. ARTIN und P. SCHERK sowie F. J. DYSON. Aber erst die Darstellung VAN DER CORPUTS gestattet einen Überblick über den Beweis.

Zu $A\{a_i\}$ und $B\{b_i\}$ werde $a_0 = 0$ resp. $b_0 = 0$ hinzugefügt, so daß $A + B$ aus allen $a_i + b_k$ besteht. $A(m)$, $B(m)$, $(A + B)(m)$ bedeute hingegen nur die Anzahl der positiven $x \leqq m$ in A, B, $A + B$. Die Hypothese folgt dann sofort aus dem schärferen *Satz:*

Gibt es ein natürliches g (Länge der Folge), so daß für jedes natürliche $m \leqq g$ $A(m) + B(m) \geqq \gamma\, m$ $(\gamma \leqq 1)$, so gilt auch

$$(A + B)(m) \geqq \gamma\, m.$$

[1]) El. math. *1* (1946), S. 57–60.

[2]) Vgl. die Literaturangaben in der referierten Arbeit.

Der Beweis ergibt sich direkt aus der Existenz einer Kette von Transformationen T_r:

$$A_r\{a_i^{(r)}\},\quad B_r\{b_i^{(r)}\} \to A_{r+1}\{a_i^{(r+1)}\},\quad B_{r+1}\{b_i^{(r+1)}\}$$

($r = 0, 1, 2, \ldots, A_0 = A, B_0 = B$) mit folgenden Eigenschaften:

I. Aus $A_r(m) + B_r(m) \geqq \gamma\, m$ folgt $A_{r+1}(m) + B_{r+1}(m) \geqq \gamma\, m$ für $m \leqq g$.

II. $(A_r + B_r)(m) \geqq (A_{r+1} + B_{r+1})(m)$.

III. Es gibt ein t mit $B_t = \{0\}$, d. h. $A_t(m) + B_t(m) = A_t(m)$.

Zur Veranschaulichung von T_r versehen wir alle $a_i^{(r)}$ in der Reihe 0, 1, 2, 3, ..., g mit einem Stern und ordnen auch B_r eine solche Reihe zu. Diese Reihen R_A und R_B werden so aufeinandergelegt, daß $b_0^{(r)} = 0$ über $a_r^{(r)}$ liegt. A_{r+1} und B_{r+1} entstehen nun, indem jeder Stern von R_B, der nicht über einem Stern von R_A liegt, auf die unter ihm liegende Zahl von R_A fällt oder in Wegfall kommt.

B_1: 0* 1 2 3* 4 5* 6 7* 8 9

A_1: 0* 1 2 3* 4 5* 6 7* 8 9*

Die Figur zeigt für $A\{0, 3, 5, 7\}$ und $B\{0, 3, 5, 7, 9\}$, $g = 9$, die Entstehung von $A_2\{0, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und $B_2\{0\}$.

Offenbar ist III erfüllt. II folgt daraus, daß jedes $a_i^{(r+1)} + b_k^{(r+1)}$ in $A_r + B_r$ ist, denn wenn $a_i^{(r+1)}$ nicht in A_r liegt, so ist $a_i^{(r+1)} = a_r^{(r)} + b_p^{(r)}$ und $a_r^{(r)} + b_k^{(r+1)}$ ist in A_r, weil sonst $b_k^{(r+1)}$ nicht mehr Element von B_{r+1} wäre.

T_r kann in (endlich viele) «elementare» Transformationen (e. T.) zerlegt werden, bei denen jeweils höchstens *ein* $b^{(r)}$ aus B_r verschwindet. $a_r^{(r)}$ ist dabei für alle $b^{(r)}$ das kleinste Element von A_r, so daß $a_r^{(r)} + b^{(r)}$ nicht in A_r liegt. I ist sogar bei jeder e. T. richtig. Wir nehmen zum indirekten Beweis an, daß I für alle Folgen einer Länge $\leqq k-1 \leqq g-1$ bei jeder e. T. gilt, während $A_{r+1}(k) + B_{r+1}(k) < \gamma\, k$. Dann ist $a_r^{(r)} + b^{(r)} > k$, also $a_r^{(r)} > k - b^{(r)}$. Wenn man von A_r und B_r nur die Teilstücke A_r' und B_r' der Länge $k - b^{(r)}$ betrachtet und aus B_r' alle Elemente entfernt, die für das Bestehen der Ungleichungen $A_r'(m) + B_r'(m) \geqq \gamma\, m$ ($m \leqq k - b^{(r)}$) nicht notwendig sind, so erkennt man, daß $B_r'(k - b^{(r)}) = 0$. Denn der Stern eines positiven Elementes aus B_r' würde bei einer späteren e. T. außerhalb A_r' fallen und hätte also schon anfangs entfernt werden müssen, weil I hier nach Voraussetzung gilt. Hieraus folgt

$$A_r'(k - b^{(r)}) = A_r(k - b^{(r)}) \geqq \gamma(k - b^{(r)}).$$

Für alle positiven $a^{(r)} \leqq k - b^{(r)} < a_r^{(r)}$ liegt $a^{(r)} + b^{(r)} \geqq b^{(r)} + 1$ in A_r, so daß, weil auch $b^{(r)}$ zu A_r gehört,

$$A_r(k) - [1 + A_r(b^{(r)} - 1)] \geqq A_r(k - b^{(r)}) \geqq \gamma(k - b^{(r)}). \tag{1}$$

Aus I folgt wegen $b^{(r)} \leqq k$ und $A_{r+1}(m) = A_r(m)$ für $m \leqq k < a_r^{(r)} + b^{(r)}$

$$A_r(b^{(r)} - 1) + B_{r+1}(b^{(r)} - 1) \geqq \gamma(b^{(r)} - 1). \tag{2}$$

Durch Addition von (1) und (2) ergibt sich

$$A_{r+1}(k) + B_{r+1}(k) \geqq A_r(k) + B_{r+1}(b^{(r)} - 1) \geqq \gamma(k - b^{(r)}) + 1 + \gamma(b^{(r)} - 1) \geqq \gamma\, k,$$

im Widerspruch zur Annahme.

ERNST TROST, Zürich.

Extrait d'une lettre de M. Kollros à M. Lüssy

A propos de la «Trigonométrie» de MM. PAULI et POST, vous rappelez dans le dernier numéro des «Elemente» la phrase qui terminait ma conférence de 1938. Le lecteur

pourrait croire ainsi à une opposition entre les auteurs et moi. Or M. PAULI m'a montré le manuscrit avant l'impression et je l'ai approuvé sans réserve.

Ce que je voulais éviter après mon exposé de Lucerne, c'est que certains maîtres se croient obligés d'ajouter encore un chapitre au programme déjà trop chargé du Gymnase sous la forme d'une discipline nouvelle.

Mais je conseille depuis longtemps de faire un emploi judicieux des premiers éléments du calcul vectoriel dans un but de concision et de simplification, sans toutefois négliger la méthode cartésienne; elle a ses aventages incontestables et on ne peut en général terminer un problème concret sans revenir aux coordonnées.

Si le calcul vectoriel se répand de plus en plus dans le sens d'une simplification des programmes, j'en serai très heureux. L. KOLLROS.

HENRI KREIS:

Lineare Abhängigkeit und Äquivalenz von Punktsystemen

Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 46. Band. Bern 1946. S. 169–186.

Zur Untersuchung der Frage, ob zwischen zwei Merkmalen x und y eine Abhängigkeit bestehe, bedient man sich u. a. des Korrelationskoeffizienten C. Werden die einzelnen Merkmalspaare $(x_k; y_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, als Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt, so erhält man eine Punktmenge, die auf ihren funktionalen Zusammenhang zu untersuchen ist. Man legt nun ein zum $(x; y)$-System parallel orientiertes $(\xi; \eta)$-System durch den Schwerpunkt der Menge, so daß also

$$\Sigma \xi_k = \Sigma \eta_k = 0$$

wird, und definiert die sogenannten Streuungen mittelst der Momente zweiter Ordnung:

$$\sigma_\xi^2 = \frac{1}{n} \Sigma \xi_k^2; \quad \sigma_\eta^2 = \frac{1}{n} \Sigma \eta_k^2; \quad \sigma_{\xi\eta}^2 = \frac{1}{n} \Sigma \xi_k \eta_k.$$

Dann ist der Korrelationskoeffizient erklärt als

$$C = \frac{\sigma_{\xi\eta}^2}{\sigma_\xi \sigma_\eta}.$$

$|C|$ ist dann und nur dann gleich 1, wenn alle Punkte auf einer Gerade durch den Ursprung liegen; ist $|C|$ größer als beispielsweise 0,9, so kann daraus geschlossen werden, daß die Punkte «beinahe» auf einer Gerade liegen, d. h. daß y mit wachsendem x die Tendenz zu wachsen, bzw. abzunehmen zeigt. Was ist aber zu schließen aus einem Werte $C = 0{,}7$? Einmal ist zu bemerken, daß C höchstens etwas über die *lineare* Abhängigkeit der Punktmenge aussagt. Es lassen sich leicht Mengen von Punkten angeben, die auf einer Parabel oder gar auf zwei Geraden liegen, die also eine strenge funktionale Abhängigkeit zeigen, und für die jeder beliebige Wert $-1 < C < +1$ auftreten kann. $|C|$ kleiner als beispielsweise 0,9 besagt ***nicht mehr***, als daß zwischen den Variablen sicher keine rein lineare Abhängigkeit besteht.

Die Arbeit von KREIS liefert einen wichtigen Beitrag zu dieser Kritik des Korrelationskoeffizienten. Sie verdient es, in den «Elementen» angezeigt zu werden, weil sie mit durchaus elementaren Mitteln einen oft mißbrauchten Begriff zu klären hilft.

Es wird gezeigt: Zu jedem ebenen Punktsystem läßt sich auf unendlich viele Arten ein äquivalentes Punktetripel angeben, das mit dem vorgelegten System nicht nur den Korrelationskoeffizienten C gemeinsam hat, sondern auch die beiden Regressionsgeraden, d. h. die Geraden, tür die die Summe der Quadrate der Abweichungen in der x-Richtung, bzw. der y-Richtung ein Minimum wird. Alle Punkte dieser äquivalenten Tripel liegen auf einer Ellipse, der Äquivalenzellipse, die Regressionsgeraden verbinden die Berührungspunkte der zur x- bzw. y-Achse parallelen Tangenten. Diese Ergebnisse werden auf Punktmengen im Raume erweitert, zu denen stets unendlich viele äquivalente Punktequadrupel angegeben werden können, deren geometrischer Ort das Äquivalenzellipsoid ist. WILLI LÜSSY, Winterthur.