2. $\underline{y = x^4}$; $y' = 4x^3$; $y'' = 12x^2$.

Für $x = 0$ ist $y' = 0$ und $y'' = 0$. Für $x \neq 0$ ist $y'' > 0$. Daher: $x = 0$ *ist hier Geradstelle und Extremstelle*, weil Waagestelle und keine Wendestelle.

3. $\underline{y = x^3}$; $y' = 3x^2$; $y'' = 6x$.

Für $x = 0$ ist $y' = 0$, $y'' = 0$, aber für $x > 0$ ist $y'' > 0$ und für $x < 0$ ist $y'' < 0$, somit Kurve positiv gekrümmt für positives x und negativ gekrümmt für negatives x, daher ist $x = 0$ *Terrassenstelle*.

4. $\underline{y = \sqrt[3]{x}}$; $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$x = 0$ *ist eine Vertikalstelle*. Dreht man das Koordinatensystem um 90^0, so heißt das, man ersetze in der Funktionsgleichung x durch $(-\bar{y})$ und y durch $\bar{x}$. Man erhält so die neue Funktionsgleichung $\bar{y} = -\bar{x}^3$; die frühere Vertikalstelle ist jetzt Waagestelle und behandelbar. Sie erweist sich als Terrassenstelle.

VIKTOR KRAKOWSKI, Zürich.

Anwendung der Fourier-Sätze in der Theorie der Seismographen und Schwingungsmesser

§ 1. *Komplexe Darstellung reeller Zahlen*

a, b = reelle Zahlen, $\quad k = +\sqrt{a^2 + b^2}$, $\quad x = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$,

$j = \sqrt{-1}$, $\quad e = 2{,}718\ldots$ = Basis der natürlichen Logarithmen.

$$\mathfrak{k} = a + jb = ke^{jx} = k(\cos x + j \sin x).$$

$\bar{\mathfrak{k}} = a - jb = k \cdot e^{-xj}$ stellt die zu $\mathfrak{k}$ konjugiert komplexe Zahl dar.

$\underline{a = \frac{1}{2}(\mathfrak{k} + \bar{\mathfrak{k}})}$ ist die komplexe Darstellung der reellen Zahl a.

§ 2. *Komplexe Darstellung einer Sinusschwingung*

t = Zeit. $s = R\cos(\omega t + \psi)$ = Sinusschwingung mit der Amplitude R, der Kreisfrequenz ω und der Phase ψ. ($R > 0$, $\omega > 0$, ψ reell).
Man setze

$$\mathfrak{k} = R\,e^{j(\omega t + \psi)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{2} R\,e^{j\psi} = \text{komplexe Amplitude}.$$

Dann ist

$$s = \frac{1}{2}(\mathfrak{k} + \bar{\mathfrak{k}})$$

oder

$s = \mathfrak{S}\,e^{j\omega t} + \bar{\mathfrak{S}}\,e^{-j\omega t}$ die komplexe Darstellung der Sinusschwingung s.

§ 3. *Komplexes Linienspektrum einer periodischen Funktion*

$s(t)$ sei eine reelle stetige Funktion der reellen Variabeln t. Die Funktion besitze die Periode $T = \frac{2\pi}{\eta} > 0$, und das Intervall $0 \leqq t \leqq T$ zerfalle in endlich viele Teilintervalle, in denen $s(t)$ monoton ist. $s(t)$ läßt sich in eine Fourier-Reihe entwickeln[1]:

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos(n\eta t + \psi_n).$$

Die Konstanten s_0, R_n und ψ_n lassen sich aus $s(t)$ berechnen. Das n-te Glied der Reihe soll nach § 2 in komplexer Darstellung geschrieben werden:

$$s(t) = \mathfrak{S}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{S}_n e^{jn\eta t} + \bar{\mathfrak{S}}_n e^{-jn\eta t}).$$

$$\mathfrak{S}_0 = s_0, \quad \mathfrak{S}_n = \frac{1}{2} R_n e^{j\psi_n}, \quad \bar{\mathfrak{S}}_n = \frac{1}{2} R_n e^{-j\psi_n}.$$

Schreibt man $\bar{\mathfrak{S}}_n = \mathfrak{S}_{-n}$, so erhält die Fourier-Reihe die einfache Form

$$\underline{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}_n e^{jn\eta t},}$$

wobei sich für die Berechnung der Konstanten s_0, R_n und ψ_n die einheitliche Formel

$$\underline{\mathfrak{S}_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(\vartheta) e^{-jn\eta\vartheta} d\vartheta,} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ergibt[1]. Die Zahlenfolge $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \ldots$ ist das komplexe Linienspektrum von $s(t)$.

§ 4. *Kontinuierliches Spektrum einer willkürlichen Funktion*

$s(t)$ sei eine reelle, stetige Funktion, für welche $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(\vartheta)|\, d\vartheta$ existiert. In Analogie zu § 3 läßt sich $s(t)$ durch ein Fourierintegral darstellen[2]:

$$\underline{s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}(u) e^{jut} du,}$$

wobei

$$\underline{\mathfrak{S}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\vartheta) e^{-ju\vartheta} d\vartheta}$$

das komplexe, kontinuierliche Spektrum von $s(t)$ ist.

---

[1] Man vergl. z. B. E. GOURSAT, Cours d'Analyse, Bd. I, Seite 484–502, Gauthier-Villars, Paris 1933.

[2] R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Band I, Seite 58–69, Springer Berlin 1931.

§ 5. *Systeme mit Frequenzcharakteristik*

Eine zeitlich veränderliche Größe $s(t)$ wirke auf ein «System» Γ und steuere vermittelst dieses Systems eindeutig eine zweite Größe $h(t)$. Beispielsweise ist $s(t)$ die Vertikalkomponente der Verschiebung des Bodens aus der Ruhelage während eines Erdbebens, Γ ein Vertikalseismograph, $h(t)$ der Ausschlag des Zeigers des Seismographen[1]).

Das System habe die grundlegende Eigenschaft, daß einer Sinusschwingung im Sinne von § 2 $s = R\cos(\omega t + \psi)$ als Eingang eine Sinusschwingung $h = G\cos(\omega t + \varepsilon)$ mit gleicher Frequenz als Ausgang entspricht, wobei das Verhältnis $\frac{G}{R}$ der Amplituden und die Phasenverschiebungen $\varepsilon - \psi$ nur von ω, nicht aber von R und ψ abhängen, also

$$\frac{G}{R} = q(\omega) = \text{Amplitudencharakteristik des Systems } \Gamma.$$

$$\varepsilon - \psi = \chi(\omega) = \text{Phasencharakteristik des Systems } \Gamma.$$

Schreibt man wie in § 2 die Sinusschwingungen komplex, also

$$s = \mathfrak{S}\, e^{j\omega t} + \bar{\mathfrak{S}}\, e^{-j\omega t}, \qquad \mathfrak{S} = \frac{1}{2} R\, e^{j\psi},$$

$$h = \mathfrak{H}\, e^{j\omega t} + \bar{\mathfrak{H}}\, e^{-j\omega t}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{2} G\, e^{j\varepsilon},$$

so ist das Verhältnis der komplexen Amplituden

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{S}} = \frac{G}{R}\, e^{j(\varepsilon-\psi)} = q\, e^{j\chi} = \mathfrak{q}(\omega)$$

eine komplexe Zahl $\mathfrak{q}$, die nur von ω abhängt und komplexe Frequenzcharakteristik des Systems Γ genannt werden soll. Die Transformation des Eingangs s in den Ausgang h durch das System Γ im Falle einer Sinusschwingung ist daher mathematisch nichts anderes als die Multiplikation der komplexen Amplitude $\mathfrak{S}$ des Eingangs mit der Zahl $\mathfrak{q}$.

$\mathfrak{q}$ ist zunächst nur für $\omega > 0$ definiert.

Für

$$\omega < 0 \quad \text{sei} \quad q(\omega) = q(-\omega),$$
$$\chi(\omega) = -\chi(-\omega),$$

woraus $\mathfrak{q}(-\omega) = \bar{\mathfrak{q}}(\omega)$ folgt.

Vom System mit der Frequenzcharakteristik $\mathfrak{q}$ werde ferner vorausgesetzt, daß es additiv wirke, das heißt, entsprechen den Eingängen $s_1, s_2, \ldots, s_k$ die Ausgänge $h_1, h_2, \ldots, h_k$, so soll dem Eingang $a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_k s_k$ der Ausgang $a_1 h_1 + a_2 h_2 + \cdots + a_k h_k$ entsprechen, wo $a_1, a_2, \ldots, a_k$ willkürliche Konstante bedeuten. Die Additivität gelte auch für Fourierreihen und Fourierintegrale, das heißt, ist der Eingang $s(t)$ im Sinne von § 3 eine periodische Funktion mit dem Linienspektrum $\mathfrak{S}_n$ respektive im Sinne von § 4 eine Funktion mit dem kontinuierlichen Spektrum $\mathfrak{S}(u)$, so ist der Ausgang eine periodische Funktion mit dem Linienspektrum

---

[1]) Die Verwendung von FOURIER-Integralen in der Theorie der Seismographen ist beschrieben in W. T. BORN und J. M. KENDALL, Application of the Fourier-Integral to some geophysical instrument problems. Geophysics, Vol. VI, 1941, S. 105–115.

$\mathfrak{q}(n\,\eta)\cdot\mathfrak{S}_n$ respektive dem kontinuierlichen Spektrum $\mathfrak{q}(u)\cdot\mathfrak{S}(u)$. Es ergibt sich also folgende Gegenüberstellung von Eingängen mit den zugehörigen Ausgängen:

Eingang s	*Ausgang h*	
s_l .	h_l,	$l = 1, 2, \ldots, k,$
$\sum_{l=1}^{k} a_l\, s_l$	$\sum_{l=1}^{k} a_l\, h_l$,	
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}_n\, e^{i n \eta t}$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{q}(n\,\eta)\, \mathfrak{S}_n\, e^{i n \eta t}$,	
$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}(u)\, e^{i u t}\, du$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{q}(u)\, \mathfrak{S}(u)\, e^{i u t}\, du.$	

Natürlich ist dabei vorauszusetzen, daß $\mathfrak{q}(\omega)$ so beschaffen ist, daß die Fourierreihe und das Fourierintegral für den Ausgang h konvergieren.

§ 6. *Zusammensetzung von Systemen*

Γ_1 sei ein System mit der Frequenzcharakteristik $\mathfrak{q}_1$, Γ_2 ein zweites System mit der Frequenzcharakteristik $\mathfrak{q}_2$. Die Systeme seien so beschaffen, daß man den Ausgang des ersten Systems als Eingang für das zweite benützen, das heißt die Systeme zusammensetzen kann. Offenbar hat das zusammengesetzte System ebenfalls eine Frequenzcharakteristik, nämlich $\mathfrak{q}_1\cdot\mathfrak{q}_2$. Als Beispiel sei ein Seismograph mit galvanometrischer Registrierung genannt. Γ_1 ist das Seismographenpendel, Γ_2 das Galvanometer. Der Ausgang von Γ_1 ist der Ausschlag des Pendels relativ zum Gestell. Auf dem Seismographenpendel ist eine Induktionsspule befestigt. Sie schwingt im Felde eines auf dem Gestell montierten Magneten. Wird die Spule mit dem Galvanometer zu einem Stromkreis geschlossen, so bilden Γ_1 und Γ_2 ein zusammengesetztes System.

§ 7. *Experimentelle Bestimmung der Frequenzcharakteristik*

Für die experimentelle Bestimmung der Frequenzcharakteristik eines gegebenen Systems Γ seien folgende beiden Verfahren genannt:

a) Man benützt als Eingang Sinusschwingungen verschiedener Frequenzen ω und beobachtet Amplitude und Phasenverschiebung des Ausgangs. Sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{H}$ die komplexen Amplituden des Eingangs und Ausgangs, so ist $\mathfrak{q}(\omega) = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{S}}$ die gesuchte Charakteristik.

b) Man benützt als Eingang eine geeignete willkürliche Funktion $s(t)$ im Sinne von § 4. Man registriert sowohl $s(t)$, wie den zugehörigen Ausgang $h(t)$. Nach § 4 bestimmt man die Spektren $\mathfrak{S}(u)$ und $\mathfrak{H}(u)$ des Eingangs und des Ausgangs. Dann ist $\mathfrak{q}(u) = \frac{\mathfrak{H}(u)}{\mathfrak{S}(u)}$.

Ist Γ ein Seismograph, so kann man bei beiden Verfahren einen Schwingungstisch, auf den der Seismograph gestellt wird, benützen. Der Ausschlag $s(t)$ des Schwingungstisches ist der Eingang von Γ.

§ 8. *Bestimmung der wahren Bodenbewegung aus den Registrierungen von Seismographen*

Es sei die Aufgabe gestellt, mit Hilfe von Seismographen die Bodenbewegungen zu bestimmen, die bei einem Erdbeben auftreten oder die durch Sprengungen, Straßenverkehr usw. erzeugt werden. Eine Betrachtung der dabei auftretenden Amplituden und Wellenlängen zeigt, daß man in der Regel annehmen darf, daß das Bodenstück, auf dem der Seismograph steht, lediglich translatorische Bewegungen ausführt, das heißt die Wirkung der Dreh- und Neigungsbewegungen auf den Seismographen dagegen vernachlässigbar sind. Auch vom Gestell des Seismographen, das mit dem Boden fest verbunden gedacht wird, ist daher vorausgesetzt, daß es ausschließlich translatorische Bewegungen ausführe. Die räumlichen Bewegungen des Bodenstückes werden beschrieben, indem man die Projektionen irgendeines Punktes des Bodenstückes auf drei im Raume feste Achsen verfolgt. Gewöhnlich werden zwei zueinander senkrecht stehende horizontale Achsen und eine vertikale Achse gewählt. Während der Bodenbewegung bewegen sich die drei Projektionen des Punktes auf den drei Achsen. Ihre Abszissen, Komponenten der Bodenbewegung genannt, sind drei Funktionen der Zeit, die zu bestimmen sind. Zur Bestimmung dieser Funktionen werden auf dem Bodenstück drei Seismographen aufgestellt, deren Arbeitsrichtungen mit den drei Achsenrichtungen zusammenfallen, also z. B. ein Vertikal-Seismograph, ein NS-Seismograph und ein EW-Seismograph. Ist $s(t)$ eine der drei Komponenten der Bodenbewegung, Γ der Seismograph mit der zugehörigen Arbeitsrichtung, so ist $s(t)$ der Eingang von Γ. Der Ausgang $h(t)$ ist die Registrierung des Seismographen. Diese ist gegeben, ebenso wird die komplexe Frequenzcharakteristik $\mathfrak{q}(\omega)$ des Seismographen als bekannt vorausgesetzt. Zu bestimmen ist $s(t)$.

Für die Registrierung $h(t)$ seien folgende drei Möglichkeiten betrachtet: a) reine Sinusschwingung, b) periodische Bewegung, c) unperiodische Bewegung. Nach § 5 ist die entsprechende Bodenbewegung $s(t)$ sofort bestimmbar:

a) Gegeben die komplexe Amplitude $\mathfrak{H}$ von $h(t)$, ferner die Frequenz ω. Dann ist $\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{q}(\omega)}$ die komplexe Amplitude von s, also

$$\underline{s(t) = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{q}(\omega)}\, e^{j\omega t} + \frac{\bar{\mathfrak{H}}}{\bar{\mathfrak{q}}(\omega)}\, e^{-j\omega t}.}$$

b) Das komplexe Linienspektrum von h ist

$$\mathfrak{H}_n = \frac{1}{T}\int_0^T h(\vartheta)\, e^{-jn\eta\vartheta}\, d\vartheta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$T = \text{Periode von } h(t), \qquad \eta = \frac{2\pi}{T}.$$

$\frac{\mathfrak{H}_n}{\mathfrak{q}(n\eta)}$ ist das komplexe Linienspektrum von s, so daß

$$\underline{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{H}_n}{\mathfrak{q}(n\eta)}\, e^{jn\eta t}} \qquad \text{ist.}$$

c) Das kontinuierliche Spektrum der Registrierung h ist

$$\mathfrak{H}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)\, e^{-ju\vartheta}\, d\vartheta,$$

dasjenige von s demnach $\frac{\mathfrak{H}(u)}{\mathfrak{q}(u)}$ und

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{H}(u)}{\mathfrak{q}(u)} e^{jut} du.$$

§ 9. *Bestimmung der Frequenzcharakteristik aus der Differentialgleichung der Bewegungen des Seismographen*

Die Bewegungsgleichung des Seismographen habe die Form

$$b_0 h + b_1 \frac{dh}{dt} + b_2 \frac{d^2h}{dt^2} + \cdots + b_\lambda \frac{d^\lambda h}{dt^\lambda} = c_0 s + c_1 \frac{ds}{dt} + \cdots + c_\mu \frac{d^\mu s}{dt^\mu}.$$

$b_0, b_1, \ldots, b_\lambda; c_0, c_1, \ldots, c_\mu$ seien reelle Konstante.

$$B(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_\lambda x^\lambda,$$
$$C(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_\mu x^\mu.$$

Nimmt man für s eine reine Sinusschwingung mit der willkürlichen Frequenz ω an, so läßt sich die Bewegungsgleichung erfüllen, wenn für h eine Sinusschwingung der gleichen Frequenz gewählt wird. Sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{H}$ die komplexen Amplituden von s und h, so ergibt das Einsetzen in der Bewegungsgleichung

$$\mathfrak{H} \cdot B(j\,\omega) = \mathfrak{S} \cdot C(j\,\omega).$$

Setzt man noch voraus, daß das Polynom $B(x)$ keine rein imaginären Wurzeln besitzt, so ist $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{S}} = \frac{C(j\,\omega)}{B(j\,\omega)}$.

Der Seismograph ist dann im Sinne von § 5 ein System mit der Frequenzcharakteristik

$$\mathfrak{q}(\omega) = \frac{C(j\,\omega)}{B(j\,\omega)}.$$

Folgende Spezialfälle seien erwähnt:

Mechanisch registrierender Seismograph:

$$b_0 h + b_1 \frac{dh}{dt} + b_2 \frac{d^2h}{dt^2} = c_2 \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Elektrischer Induktionsseismograph:

$$b_0 h + b_1 \frac{dh}{dt} + b_2 \frac{d^2h}{dt^2} = c_3 \frac{d^3s}{dt^3}.$$

F. GASSMANN, Zürich

(Mitteilung Nr. 7 aus dem Institut für Geophysik der Eidg. Technischen Hochschule)

Summary:

A paper by W. T. Born and J. M. Kendall "Application of the Fourier Integral to some geophysical instrument problems" has been followed by some considerations on the application of the Fourier Integral and the Fourier Series to the theory of seismographs and vibrographs. The frequency characteristic is stated for the case in which the differential equation of the seismographic movements is known and possesses the form mentioned in § 9.