# Geradstellen ebener Kurven

Autor(en): **Krakowski, Viktor**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-12821

Die begrenzende «Kappenkörperkurve», deren Gleichung also

$$y = x^2$$

lautet, ist etwas stärker nach innen gekrümmt (vergleiche Figur 2) als die «isoperimetrische Kurve». In der Tat läßt sich die zweite Minkowskische Ungleichung (III) als Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung (I) auffassen, indem sie durch eine geeignete algebraische Umformung auf die Gestalt

$$F^3 - 36\pi V^2 \geqq \frac{9 V^2}{F} (M^2 - 4\pi F) \tag{III*}$$

gebracht werden kann.

Es ist nun ohne weiteres klar, daß in analoger Weise eine weitere Ungleichung

$$? \geqq 0 \tag{IV}$$

neben (III) bestehen muß, die ihrerseits eine Verschärfung der Art

$$M^2 - 4\pi F \geqq ? \tag{IV*}$$

sein wird. Das Gleichheitszeichen in (IV) hat für eine Körperschar zu gelten, die eine interpolierende Schar zwischen Kreisscheibe und Kugel darstellt und die also die rechte von $D$ nach $B$ führende Randkurve liefert.

Die in verschiedener Hinsicht plausible Annahme, daß diese Körperschar durch die Parallelkörper des Kreises, durch die Torotope, geliefert werde, stellte eine Vermutung von W. BLASCHKE dar, die sich aber später als unrichtig erwies. Es gibt Körper, deren Diagrammpunkte auf der rechten Seite der durch die kubische Gleichung

$$(\pi^2 - 8)^3 (2 - 3x + y)^2 - 4\pi^2 (12 - \pi^2)^2 (1 - x)^3 = 0$$

dargestellten «Torotopkurve» liegen. Dies trifft beispielsweise zu für die Halbkugel, für welche

$$x = \frac{48}{(4+\pi)^2}; \quad y = \frac{256}{(4+\pi)^3}$$

ist.

Zahlreiche Anstrengungen, diese fehlende Randkurve beziehungsweise die fehlende Ungleichung (IV) aufzufinden, verliefen bisher ohne Resultat.

H. HADWIGER, Bern.

---

# Geradstellen ebener Kurven

Aus didaktischen Gründen, aber auch aus Gründen mathematischer Sauberkeit scheinen mir, wenigstens für die Schule, die üblichen Krümmungsbegriffe für ebene Kurven einer zielbewußten, wenn auch einschränkenden Klarstellung zu bedürfen. Zur Rechtfertigung meines Unterfangens müßte ich korrekterweise diese Begriffe, wie sie in der Literatur oder in anerkannt guten Lehrbüchern geboten werden, einer umfassenden Analyse kritisch unterziehen. Ich möchte mich jedoch lediglich mit wenigen kontrollierbaren Feststellungen begnügen, die ich mit Absicht Hochschulbüchern entnehme.

Auf Seite 342–348 seines berühmten Traité (Tome I, deuxième édition) behandelt E. PICARD das Problem der Berührung höherer Ordnung zweier ebener Kurven und gelangt zu einem hier interessierenden Ergebnis, daß die Kurve $x = f(t), y = F(t)$ von einer Geraden $y = a_1 x + a_2$ ($a_1$ und $a_2$ sind Parameter) in jenen Punkten von mindestens zweiter Ordnung berührt wird, die der Relation

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

genügen; «ce sont les points d'inflexion», sagt PICARD kommentarlos im Anschluß daran. Dieser Zusatz kann offenbar nur definierende Bedeutung haben, da diese Punkte gar nicht Wendepunkte im üblichen Sinn des Wortes zu sein brauchen. Die Inkorrektheit der Benennung tadelt SCHEFFERS auf Seite 21 in seiner «Einführung in die Theorie der Kurven» (2. Auflage 1910), sucht aber trotzdem diese Bezeichnung durch Berufung auf imaginäre Kurven beizubehalten und im reellen Fall durch Unterscheidung in eigentliche und uneigentliche Wendepunkte zu retten. Auch bei ihm heißt also jede Nullstelle der zweiten Ableitung von $y$ nach $x$ Wendestelle. Andere Autoren unterscheiden deutlich zwischen Wendepunkten im geometrischen Sinn des Wortes und Nichtwendepunkten, ohne jedoch damit einem sich aufdrängenden Bedürfnis gerecht zu werden. Denn genau wie bei der Wahl der Benennung der Nullstellen der ersten Ableitung (Waagestellen, Horizontalstellen), das durch sie repräsentierte eindeutig Geometrische im reellen Fall wegleitend war (man wollte nämlich damit Stellen mit dem Steigungsmaß Null andeuten), so sollte man den Nullstellen der zweiten Ableitung im reellen Falle ebenfalls eindeutig Geometrisches zuordnen können. Um zu einer solchen für alle reellen Nullstellen von $y''$ gültigen, einheitlichen geometrischen Interpretation bei reellen Kurven zu gelangen, könnte man versucht sein, die Begriffe «Konvexität und Konkavität» einer ebenen Kurve heranzuziehen: wird doch eine Kurve an einer Stelle (bei Vorhandensein der zweiten Ableitung und im Falle deren Nichtverschwindens an dieser Stelle) auf diese Charaktere hin untersucht, indem man bekanntlich das Vorzeichen von $y''$ an dieser Stelle ermittelt. Aber sie eignen sich für unser Vorhaben schlecht, denn gerade im Fall $y'' = 0$ wird der Zusammenhang zerrissen, da die Kurve an einer reellen Nullstelle von $y''$ sowohl Konvexität nach oben als auch Konkavität nach oben als auch einen Übergang von der einen Krümmungsart in die andere bieten kann.

Dagegen bringt der engere Begriff des «Gekrümmtseins» einer ebenen Kurve an einer Stelle, wie er nachstehend auseinandergesetzt werden soll, eine, wie ich glaube, befriedigende, weil für die Schule natürlichere Lösung.

Für das Folgende seien Kurven vorausgesetzt, die Schaubilder eindeutiger reeller Funktionen einer reellen Variabeln sind, und die im Definitionsbereich ebenfalls eindeutige erste und zweite Ableitungen, letztere überdies stetig, besitzen. Vertikalstellen, also Stellen mit dem Steigungsmaß $\infty$, sind vorläufig demnach auszuschließen.

1. *Definition:* Eine Kurve unserer Art $y = f(x)$ heiße an einer Stelle $x_1$ gekrümmt, falls $\frac{d\alpha}{dx}$ an dieser Stelle $\neq 0$. Dabei bedeute $\alpha$ den Steigungswinkel, d. h. $\operatorname{tg}\alpha = y'$ und

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

*Satz* 1: Eine Kurve $y=f(x)$ ist dann und nur dann an einer Stelle $x_1$ gekrümmt, falls die zweite Ableitung, also $y''$, an dieser Stelle $\neq 0$.

Beweis: a) Die Bedingung ist notwendig, denn aus $y'=\operatorname{tg}\alpha$ folgt $\alpha=\operatorname{arc}\operatorname{tg} y'$ und

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_{x_1}=\frac{1}{1+(y')^2_{x_1}}\cdot(y'')_{x_1}. \tag{2}$$

Wegen $\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_{x_1}\neq 0$ und des endlichen von Null verschiedenen Nenners ergibt sich $(y'')_{x_1}\neq 0$.

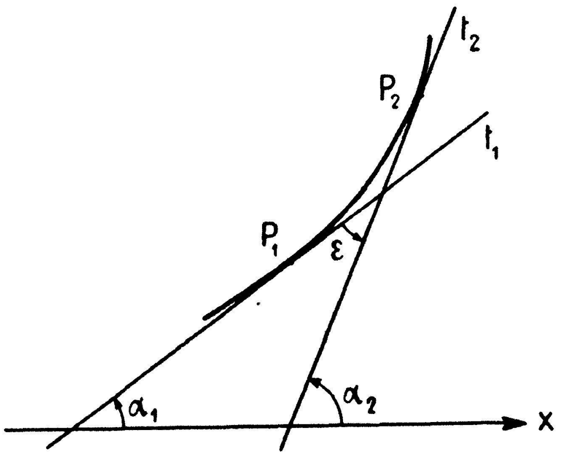
b) Die Bedingung ist hinreichend, denn aus $(y'')_{x_1}\neq 0$ und $1+(y')^2_{x_1}\neq 0$ folgt

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_{x_1}\neq 0.$$

*Anmerkung:* In den meisten Fällen, so für Schulgattungen vom Typus $A$ und $B$, wird man von der Arcustangens-Funktion keinen Gebrauch machen dürfen. Die Formel (2) wird dann elementar mit Hilfe des Additionstheorems für die Tangensfunktion wie folgt hergeleitet (Figur): Es ist

$$\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_1}=\frac{(y')_{x_2}-(y')_{x_1}}{1+(y')_{x_2}\cdot(y')_{x_1}}.$$

Aber, wenn $P_2$ auf der Kurve ganz nahe beim Kurvenpunkt $P_1$ angenommen wird, ist $\varepsilon=\alpha_2-\alpha_1$ sehr klein, daher darf man bekanntlich statt $\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)$, bei Benutzung




des Bogenmaßes für die vorkommenden Winkel, $\alpha_2-\alpha_1$ setzen. Man macht dabei einen Fehler, der aber der Null zustrebt, wenn $P_2$ auf der Kurve sich $P_1$ nähert.

Daraus folgt:

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}\right)_{x_1}=\frac{\alpha_2-\alpha_1}{x_2-x_1}\approx\frac{\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)}{x_2-x_1}=\frac{\dfrac{(y')_{x_2}-(y')_{x_1}}{1+(y')_{x_2}\cdot(y')_{x_1}}}{x_2-x_1}=\frac{1}{1+(y')_{x_1}\cdot(y')_{x_2}}\cdot\left(\frac{\Delta y'}{\Delta x}\right)_{x_1}.$$

Strebt $x_2$ gegen $x_1$, dann

$$\left(\frac{\Delta y'}{\Delta x}\right)_{x_1}\to(y'')_{x_1}\text{ und }\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}\right)_{x_1}\to\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_{x_1}=\frac{1}{1+(y')^2_{x_1}}\cdot(y'')_{x_1}.$$

2. *Definition:* Eine Kurve $y=f(x)$ heißt an einer Stelle $x_1$ positiv bzw. negativ gekrümmt, falls an dieser Stelle $\frac{d\alpha}{dx}>0$ bzw. $<0$.

*Satz* 2: Eine Kurve $y=f(x)$ ist an einer Stelle $x_1$ dann und nur dann positiv bzw. negativ gekrümmt, falls an dieser Stelle $y'' > 0$ bzw. $< 0$.

Beweis analog wie bei Satz 1.

3. *Definition:* Eine Kurve $y=f(x)$ heißt an einer Stelle *gerade* (*flach*), falls daselbst $\frac{d\alpha}{dx} = 0$. Eine solche Stelle heißt *Geradstelle*, der zugehörige Kurvenpunkt *Geradpunkt* (auch Flachstelle bzw. Flachpunkt).

*Satz* 3: Eine Kurve $y=f(x)$ besitzt an einer Stelle $x_1$ dann und nur dann einen Geradpunkt, falls $(y'')_{x_1}=0$.

Beweis an Hand der Beziehung (2).

## *Zusammenfassende Ergebnisse:*

1. *Nullstellen der ersten Ableitung sind Waagestellen.* Damit will man im reellen Fall Stellen mit dem Steigungsmaß Null kennzeichnen.

2. *Nullstellen der zweiten Ableitung heißen Geradstellen.* Damit will man andeuten, daß die Kurve sich an einer solchen Stelle im reellen Fall wie eine Gerade verhält.

3. Die Tangente in einem Geradpunkt kann die Kurve durchsetzen, dann ist die Geradstelle eine Wendestelle. Oder aber die unmittelbare Umgebung des Geradpunktes auf der Kurve liegt auf demselben Ufer bezüglich dieser Tangente.

4. Ob sich die Kurve an einer Geradstelle wendet oder nicht, kann durch Feststellung des Gekrümmtseins ermittelt werden: man braucht nur das Vorzeichen von $y''$ in der Umgebung dieser Stelle festzustellen.

5. Darf man die TAYLOR-Reihe voraussetzen, so kann man für den Fall, daß $y=f(x)$ beliebig viele Ableitungen besitzt, $y''$ in eine nach Potenzen von $x-x_1$ fortschreitende Reihe entwickeln ($x_1=$ Geradstelle). Unter Heranziehung des Satzes 2 läuft dann die gewünschte Entscheidung auf die bekannte Bedingung hinaus: ist eine reelle Geradstelle eine $k$-fache Nullstelle von $y''$ (das heißt die erste an dieser Stelle nicht verschwindende Ableitung, ausgehend von der zweiten, ist von der Ordnung $k+2$), so ist die Geradstelle eine Wendestelle oder nicht, je nachdem $k$ ungerade ist oder nicht ($k=1, 2, 3, \ldots$).

6. Eine Geradstelle kann auch Waagestelle sein. Dann ist sie entweder Extremstelle (Maximum oder Minimum) oder Wendestelle. Im letzteren Falle heißt sie zweckmäßig Terrassenstelle.

7. Die Untersuchung auf Gekrümmtsein kann auch bei den eingangs ausgeschlossenen Vertikalstellen vorgenommen werden. Man braucht zu diesem Zweck nur das Koordinatensystem um einen zwischen $0^0$ und $90^0$ (obere Grenze eingeschlossen) gelegenen Winkel $\beta$ zu drehen und mit der neuen Funktionsgleichung zu arbeiten.

8. Das Attribut «gekrümmt an einer Stelle» kommt einer Kurve zu, wenn sie an dieser Stelle einen endlichen Krümmungsradius $\neq 0$ aufweist.

## *Einige Beispiele*

1. $\underline{y=x^4-4x^3+6x^2}$. $y'=4x^3-12x^2+12x$; $y''=12x^2-24x+12=12(x-1)^2$.

Für $x=1$ ist $y''=0$ und $y'=4$. Für $x\neq 1$ ist $y''>0$, also Kurve positiv gekrümmt, somit ist $x=1$ *eine Geradstelle, die keine Wendestelle und keine Waagestelle ist.*

2. $\underline{y=x^4}$; $y'=4x^3$; $y''=12x^2$.

Für $x=0$ ist $y'=0$ und $y''=0$. Für $x \neq 0$ ist $y''>0$. Daher: $x=0$ *ist hier Geradstelle und Extremstelle,* weil Waagestelle und keine Wendestelle.

3. $\underline{y=x^3}$; $y'=3x^2$; $y''=6x$.

Für $x=0$ ist $y'=0$, $y''=0$, aber für $x>0$ ist $y''>0$ und für $x<0$ ist $y''<0$, somit Kurve positiv gekrümmt für positives $x$ und negativ gekrümmt für negatives $x$, daher ist $x=0$ *Terrassenstelle.*

4. $\underline{y=\sqrt[3]{x}}$; $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$x=0$ *ist eine Vertikalstelle.* Dreht man das Koordinatensystem um $90^0$, so heißt das, man ersetze in der Funktionsgleichung $x$ durch $(-\bar{y})$ und $y$ durch $\bar{x}$. Man erhält so die neue Funktionsgleichung $\bar{y}=-\bar{x}^3$; die frühere Vertikalstelle ist jetzt Waagestelle und behandelbar. Sie erweist sich als Terrassenstelle.

VIKTOR KRAKOWSKI, Zürich.

---

# Anwendung der Fourier-Sätze in der Theorie der Seismographen und Schwingungsmesser

## § 1. *Komplexe Darstellung reeller Zahlen*

$a, b =$ reelle Zahlen, $\qquad k = +\sqrt{a^2+b^2}, \qquad x = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{b}{a}$,

$j=\sqrt{-1}$, $\quad e = 2{,}718\ldots =$ Basis der natürlichen Logarithmen.

$$\mathfrak{f} = a + jb = ke^{jx} = k(\cos x + j \sin x).$$

$\bar{\mathfrak{f}} = a - jb = k \cdot e^{-xj}$ stellt die zu $\mathfrak{f}$ konjugiert komplexe Zahl dar.

$\underline{a = \frac{1}{2}(\mathfrak{f} + \bar{\mathfrak{f}})}$ ist die komplexe Darstellung der reellen Zahl $a$.

## § 2. *Komplexe Darstellung einer Sinusschwingung*

$t =$ Zeit. $s = R\cos(\omega t + \psi) =$ Sinusschwingung mit der Amplitude $R$, der Kreisfrequenz $\omega$ und der Phase $\psi$. ($R>0$, $\omega>0$, $\psi$ reell).
Man setze

$$\mathfrak{f} = R\, e^{j(\omega t + \psi)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{2} R\, e^{j\psi} = \text{komplexe Amplitude.}$$

Dann ist

$$s = \frac{1}{2}(\mathfrak{f} + \bar{\mathfrak{f}})$$

oder

$s = \mathfrak{S}\, e^{j\omega t} + \bar{\mathfrak{S}}\, e^{-j\omega t}$ die komplexe Darstellung der Sinusschwingung $s$.