Elementare Ableitung der Coriolisbeschleunigung in der Ebene und im Raume

1. Ein Massenpunkt m (siehe Fig. 1) bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_r auf einem Strahl r durch O, der sich seinerseits mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Wir fragen nach der *Beschleunigung*, die m während dieser Bewegung erfährt.

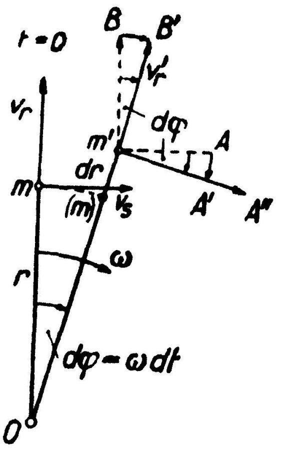

Fig. 1

Nach Fig. 1 hat m zur Zeit $t = 0$ die *Radialgeschwindigkeit* v_r und die *Transversalgeschwindigkeit* $v_s = \omega r$. Nach dem Zeitelement dt hat sich m nach m' bewegt, und die entsprechenden Geschwindigkeiten sind jetzt v_r' und $v_s' = \omega (r + dr)$. Wie aus Fig. 1 ersichtlich, hat sich die Transversalkomponente der *Richtung* und der *Größe* nach geändert, während die Radialkomponente nur ihre *Richtung* geändert hat. Diese Änderungen betragen:

$$\begin{aligned} \overline{AA'} &= v_s\, \omega\, dt = \omega^2 r\, dt && \text{(zentripetal gerichtet)},\\ \overline{A'A''} &= v_s' - v_s = \omega\, dr && \text{(transversal gerichtet)},\\ \overline{BB'} &= v_r\, \omega\, dt && \text{(transversal gerichtet)}. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Komponenten der Beschleunigung.

1) *Parallel* zu r: $$\frac{\overline{AA'}}{dt} = \omega^2 r \quad (d\varphi \sim 0).$$

Das ist die *Zentripetalbeschleunigung* des mitführenden Strahl- oder Systempunktes, da man den Strahl als ein in der ruhenden Ebene sich drehendes System ansehen kann, relativ zu welchem sich m bewegt.

2) *Senkrecht* zu r: $$\frac{\overline{A'A''}}{dt} = \omega \frac{dr}{dt} \text{ und } \frac{\overline{BB'}}{dt} = v_r\, \omega.$$

Da also $\overline{A'A''} \parallel \overline{BB'}$ ist, addieren sich diese beiden Komponenten, und weil $\frac{dr}{dt} = v_r$ ist, erhält man:

$$\frac{\overline{A'A''}}{dt} + \frac{\overline{BB'}}{dt} = 2\,v_r\,\omega.$$

Das ist die Coriolis*beschleunigung*, die transversal gerichtet ist, und zwar im gezeichneten Fall gleichsinnig mit v_s. Wäre v_r nach innen statt nach außen gerichtet, so ergäbe die analoge Konstruktion eine zu v_s entgegengesetzt gerichtete Coriolisbeschleunigung.

Dieses einfache Beispiel ist recht instruktiv, weil es anschaulich zeigt, daß die Coriolisbeschleunigung zwei verschiedene Ursachen hat: 1. die Änderung des *Betrages* der Transversalgeschwindigkeit; 2. die Änderung der *Richtung* der Radialgeschwindigkeit.

Da der erhaltene Wert für die Coriolisbeschleunigung nur von den Geschwindigkeiten v_r und ω abhängt, ist zu erwarten, daß sich auch im allgemeineren Fall, wo v_r und ω nicht konstant, sondern Funktionen der Zeit sind, der gleiche Wert ergeben wird. Diese Vermutung läßt sich wie folgt leicht beweisen.

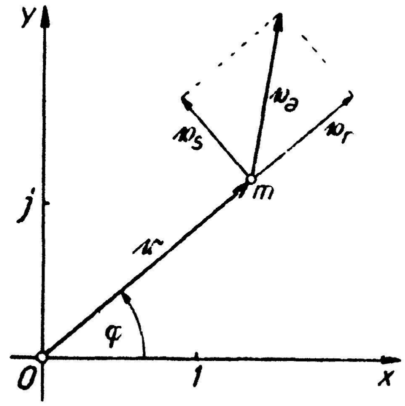

Fig. 2

2. In Fig. 2 ist m ein Massenpunkt, dessen Lage durch den Vektor $\mathfrak{r}$ gegeben ist. Der Beweis wird sehr einfach, wenn man $\mathfrak{r}$ als komplexen Vektor (komplexe Zahl) definiert. Wir setzen also $\mathfrak{r} = r \cdot e^{j\varphi}$, wobei sowohl r als auch φ beliebige Funktionen der Zeit sein sollen. Ihre ersten und zweiten Ableitungen nach der Zeit bezeichnen wir mit $\dot r$, $\ddot r$, $\dot\varphi$ und $\ddot\varphi$. Bewegt sich m in der Ebene, so erhält man für die resultierende Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v}_a = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = (\dot r + j\,r\,\dot\varphi)\,e^{j\varphi} = \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_s.$$

Die Ableitung von $\mathfrak{v}_a$ nach t ergibt die *resultierende* oder *absolute Beschleunigung* $\mathfrak{a}_a$ von m in der Ebene. Nach Zusammenfassung und Ordnung der Glieder erhält man den Ausdruck

$$\mathfrak{a}_a = \dot{\mathfrak{v}}_a = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = [\ddot r - r\dot\varphi^2 + j\,(r\ddot\varphi + 2\,\dot r\dot\varphi)]\,e^{j\varphi}.$$

In diesem Ausdruck können wir folgende Komponenten unterscheiden, wobei wir nur die reellen Werte anschreiben:

$\ddot r$ = Radialbeschleunigung (relative Beschleunigung auf $\mathfrak{r}$),

$-r\dot\varphi^2$ = Zentripetalbeschleunigung des mitführenden Strahlpunktes,

$r\ddot\varphi$ = Transversalbeschleunigung des mitführenden Strahlpunktes,

$2\,\dot r\dot\varphi$ = Coriolis*beschleunigung* (transversal).

Die *Richtung* dieser Komponenten ist jeweils durch den Faktor $e^{j\varphi}$, bzw. $j\,e^{j\varphi}$ und das Vorzeichen gegeben. Da $\dot{r}$ und $\dot{\varphi}$ nichts anderes als v_r und ω bedeuten, ist unsere obige Vermutung bewiesen.

3. Um die Coriolis*beschleunigung im Raume* zu veranschaulichen, gehen wir von dem bekannten Satze der Kinematik aus, welcher besagt, daß jede Bewegung eines Systems (zum Beispiel eines starren Körpers) *relativ* zu einem im Raume als ruhend angenommenen System (Koordinatenachsen) in dem Zeitelement dt als eine unendlich kleine *Schraubung* (in Sonderfällen auch nur Drehung) um die *Momentandrehachse* des beweglichen Systems betrachtet werden kann. Bewegt sich nun ein Massenpunkt m relativ zum beweglichen System, so kann man die Coriolis*beschleunigung* von m folgendermaßen ermitteln.

Man denke sich eine Ebene (unsere Ebene nach Fig. 2) durch m senkrecht zur Momentanachse gelegt. In dieser Ebene denke man sich eine Gerade von der Momentanachse nach m gezogen; ferner in m eine Gerade in der Ebene senkrecht zur ersten Gerade und eine weitere Gerade senkrecht zur Ebene, also parallel zur Momentanachse. Alsdann kann man den Vektor der relativen Geschwindigkeit v_{rel} von m auf diese drei Geraden projizieren und erhält damit eine *radiale*, eine *transversale* und eine *axiale* Komponente der relativen Geschwindigkeit. Bildet ihr Vektor mit der Momentanachse den Winkel δ, so ist die radiale Komponente gleich $v_{rel} \sin\delta$. Ist ferner ω die momentane Winkelgeschwindigkeit des mitführenden Systems, so erhält man nach dem Ergebnis von Abschnitt 2 für die Coriolis*beschleunigung* von m im betrachteten Augenblick die Größe

$$c = 2\,\omega\, v_{rel} \sin\delta.$$

Diese Beschleunigung ist transversal zur Momentanachse gerichtet. Die übrigen Komponenten der absoluten Beschleunigung von m setzen sich aus den *relativen* Beschleunigungskomponenten von m und den Beschleunigungskomponenten des mitführenden Systempunktes zusammen. Zur Veranschaulichung dieses Ergebnisses diene das folgende einfache Beispiel.

4. In den Fig. 3 und 4 sei K ein unendlich dünner Ring aus Masse, der mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω um die x-Achse rotiert. Gleichzeitig werde die Ebene von K um die y-Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω

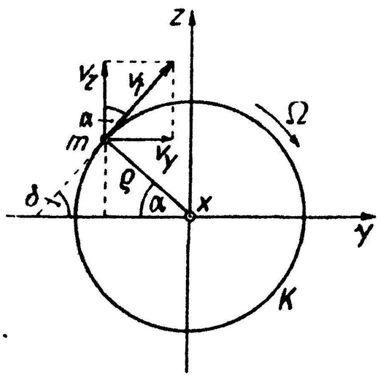

Fig. 3

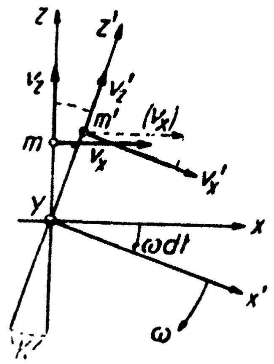

Fig. 4

gedreht. Es soll zunächst untersucht werden, welche Beschleunigungen ein Massenpunkt m von K erfährt. Das mitführende System ist hier die Ebene von K, wobei die y-Achse für jeden Zeitpunkt die Momentanachse des Systems ist. m besitzt eine tangentiale Geschwindigkeit v_t, die als die *relative* Geschwindigkeit von m in der Kreisebene zu betrachten ist; es ist also $v_{rel} = v_t$. Ferner besitzt m die (zur y-Achse) *transversale* Geschwindigkeit $v_x = \omega\,\varrho\,\sin\alpha$. v_t zerlegen wir in die bezüglich der y-Achse *radiale* Komponente v_z und in die *axiale* Komponente v_y. Wie aus Fig. 4, die K von der Seite gesehen in zwei um den infinitesimalen Winkel $\omega\,dt$ voneinander abweichenden Stellungen zeigt, ersichtlich ist, ändert die transversale Komponente v_x, während m nach m' wandert, ihre *Größe* und *Richtung* und ebenso die radiale Komponente v_z, während die axiale Komponente v_y nur ihre *Größe* ändert, ihre Richtung aber beibehält. Dabei ist: $v_t = \Omega\,\varrho = v_{rel}$; $v_x = \omega\varrho\,\sin\alpha$;

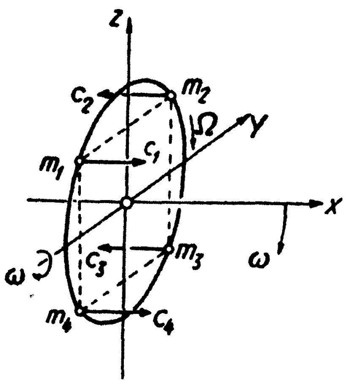

Fig. 5

$v_y = \Omega\varrho\,\sin\alpha$; $v_z = \Omega\,\varrho\,\cos\alpha = v_{rel}\,\sin\delta$. Daraus ergeben sich die folgenden Größen für die Beschleunigungskomponenten von m:

$$a = \frac{v_t^2}{\varrho} = \Omega^2\,\varrho \qquad \text{(Zentripetalbeschleunigung)}$$

$$b = \frac{v_x^2}{\varrho\cdot\sin\alpha} = \omega^2\,\varrho\,\sin\alpha \qquad \text{(Axipetalbeschleunigung)}$$

und aus der oben abgeleiteten Beziehung $c = 2\,\omega\,v_{rel}\,\sin\delta$, die CORIOLIS*beschleunigung*:

$$c = 2\,\omega\,v_z = 2\,\omega\,\Omega\,\varrho\,\cos\alpha\,.$$

Diese Größe kann man auch unmittelbar, analog wie bei Fig. 1 an Hand der Fig. 3 und 4 berechnen, was jedoch etwas umständlicher ist.

Den Beschleunigungen a, b, c entsprechen nach dem NEWTONschen Grundgesetz gleichgerichtete *Kräfte* $m\cdot a$, $m\cdot b$, $m\cdot c$. Die Kräfte $m\cdot a$ und $m\cdot b$ werden durch den Ring K selbst aufgebracht, den man sich irgendwie fest auf der x-Achse gelagert denken muß, und treten nach außen nicht in Erscheinung, da sie durch die inneren Reaktionskräfte des Ringes aufgehoben werden. Der CORIOLISbeschleunigung entspricht die aufzuwendende *Kraft*

$$k = m\,c = 2\,m\,\omega\,\Omega\cdot\varrho\,\cos\alpha\,.$$

Dieser Kraft entspricht ein *Drehmoment* um die y-Achse

$$\mathfrak{d}_y = k\,\varrho\,\sin\alpha = 2\,m\,\omega\,\Omega\,\varrho^2\cos\alpha\,\sin\alpha$$

und ein Drehmoment um die z-Achse:

$$\mathfrak{d}_z = k\,\varrho\cos\alpha = 2\,m\,\omega\,\Omega\,\varrho^2\cos^2\alpha\,.$$

Betrachten wir vier symmetrische Punkte m_1, m_2, m_3, m_4 des in Fig. 5 perspektivisch gezeichneten Ringes K, so haben die entsprechenden CORIOLISbeschleunigungen c_1, c_2, c_3, c_4 die dort ersichtlichen Richtungen, weil $\cos\alpha$ für m_1 und m_4 positiv, für m_2 und m_3 negativ zu setzen ist. Daraus ist schon zu ersehen, daß die Summe der Drehmomente für den ganzen Ring in bezug auf die y-Achse Null wird, während dies für die z-Achse nicht der Fall ist. Die Rechnung bestätigt dies und ergibt folgendes Resultat. Ein Element des Ringes hat das Volumen $q\,\varrho\,d\alpha$, wenn q der (unendlich kleine) Querschnitt des Ringes ist. Ist μ die Dichte der Masse, so ist $m = \mu\,q\,\varrho\,d\alpha$. Somit ist

$$\mathfrak{d}_y = 2\,\mu\,q\,\varrho^3\,\omega\,\Omega\cos\alpha\sin\alpha\,d\alpha,$$
$$\mathfrak{d}_z = 2\,\mu\,q\,\varrho^3\,\omega\,\Omega\cos^2\alpha\,d\alpha,$$

$$\mathfrak{D}_y = \sum \mathfrak{d}_y = 2\,\mu\,q\,\varrho^3\,\omega\,\Omega\int_0^{2\pi}\cos\alpha\sin\alpha\,d\alpha = 0,$$

$$\mathfrak{D}_z = \sum \mathfrak{d}_z = 2\,\mu\,q\,\varrho^3\,\omega\,\Omega\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha\,d\alpha = \underline{2\,\pi\,\mu\,q\,\varrho^3\omega\,\Omega}.$$

$2\,\pi\,\mu\,q\,\varrho^3$ ist gleich dem *Trägheitsmoment* des Ringes bezüglich der x-Achse. Bezeichnen wir dieses mit Θ_x, so können wir schreiben:

$$\mathfrak{D}_z = \Theta_x\,\Omega\,\omega\,.$$

Bei der Drehung des Ringes K um die *y-Achse* ist also ein Drehmoment um die *z-Achse* von der Größe $\mathfrak{D}_z$ aufzuwenden. Die Formel für $\mathfrak{D}_z$ gilt auch, wenn statt des unendlich dünnen Ringes ein Ring mit endlichem Querschnitt oder eine Scheibe usw. vorliegt, da man diese Rotationskörper in Elementarringe zerlegen kann. Unter Θ_x ist dann das Trägheitsmoment des ganzen Rotationskörpers um die *x-Achse* zu verstehen. Auf dem oben abgeleiteten Drehmoment beruht bekanntlich die Wirkung des Kreisels, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll. Man erkennt aber aus obiger Elementarableitung deutlich, daß die Kreiselwirkung ihre Ursache in der bei der Bewegung des Kreisels auftretenden CORIOLIS*beschleunigung* seiner Massenpunkte hat.

W. MICHAEL, Bern

Über eine symbolisch-topologische Formel

In der vorliegenden Note soll eine elementare topologische Formel der ebenen Geometrie besprochen werden, die an sich keinen dem Topologen unbekannten Sachverhalt enthüllt, die aber in der nachfolgend erörterten symbolischen Gestalt der Betrachtung wert ist.

In dieser Form umfaßt die Formel verschiedene kombinatorisch-topologische Relationen und Aussagen, wie beispielsweise den EULERschen Polyedersatz, die Baumrelation, den HELLY-RADONschen Satz sowie zahlreiche kombinatorische Formeln, wie sie etwa bei der Zerlegung der Ebene durch Geraden auftreten usw.