Rotation d'un corps solide autour d'un axe

Autor(en): **Kollros, Louis**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 2

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-12815

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band II Nr. 2 Seiten 25–48 Basel, 15. März 1947

Rotation d'un corps solide autour d'un axe

On fait tourner un corps d'un angle φ autour d'un axe passant par un point fixe O, origine d'un système de coordonnées rectangulaires. Un point quelconque $P(x, y, z)$ du corps aura après la rotation la position P_1 dont on cherche les coordonnées (x_1, y_1, z_1).

Soit I le point d'intersection des tangentes en P et P_1 au cercle de centre C et de rayon r, trajectoire du point mobile; les angles PCI et ICP_1 sont égaux à $\frac{\varphi}{2}$ et soit α l'angle $POC = P_1OC$.

On peut arriver de O à I par le chemin OPI et par OP_1I. Introduisons les vecteurs $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OP_1} = \vec{p}_1$, $\overrightarrow{PI}$ et $\overrightarrow{P_1I}$; on aura:

$$\vec{p}_1 + \overrightarrow{P_1I} = \vec{p} + \overrightarrow{PI}.$$

Or, $\overrightarrow{PI}$ est égal au produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{p}$ si la longueur du vecteur $\vec{a}$ porté par l'axe est $a = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$; on a, en effet:

$$|\vec{a} \times \vec{p}| = a\,p \sin \alpha = a\,r = r \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = PI.$$

On voit de même que

$$\overrightarrow{P_1I} = \vec{p}_1 \times \vec{a},$$

et on a l'égalité fondamentale:

$$\underline{\vec{p}_1 + (\vec{p}_1 \times \vec{a}) = \vec{p} + (\vec{a} \times \vec{p})} \tag{1}$$

qu'il faut résoudre par rapport à $\vec{p}_1$; si on la multiple vectoriellement à gauche par $\vec{a}$, en appliquant la formule du double produit vectoriel:

$$\vec{a} \times (\vec{p}_1 \times \vec{a}) = a^2 \vec{p}_1 - (\vec{a} \cdot \vec{p}_1)\,\vec{a}$$
$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{p}) = (\vec{a} \cdot \vec{p})\,\vec{a} - a^2 \vec{p}$$

on aura:

$$(\vec{a} \times \vec{p}_1) + a^2 \vec{p}_1 - (\vec{a} \cdot \vec{p}_1)\,\vec{a} = (\vec{a} \times \vec{p}) + (\vec{a} \cdot \vec{p})\,\vec{a} - a^2 \vec{p}. \tag{2}$$

La somme de (1) et (2) donne le résultat cherché:

$$\underline{(1 + a^2)\,\vec{p}_1 = (1 - a^2)\,\vec{p} + 2\,(\vec{a} \cdot \vec{p})\,\vec{a} + 2\,(\vec{a} \times \vec{p})} \tag{3}$$

puisque $\vec{a} \times \vec{p_1} = -(\vec{p_1} \times \vec{a})$ et que les deux produits scalaires $(\vec{a} \cdot \vec{p_1})$ et $(\vec{a} \cdot \vec{p})$ sont égaux.

Exemple: La rotation de 120^0 autour de l'axe $(-13;\ 5;\ 13)$, dans le sens positif, amène le point $P(2;\ 6;\ 9)$ en $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$. Le vecteur $(-13;\ 5;\ 13)$ a la longueur $\sqrt{363} = 11\sqrt{3}$; puisque $\operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}$, il faut portersur l'axe le vecteur $\vec{a}\left(-\frac{13}{11};\frac{5}{11};\frac{13}{11}\right)$ de longueur $a = \sqrt{3}$; $1 + a^2 = 4$; $1 - a^2 = -2$; le produit scalaire $(\vec{a} \cdot \vec{p}) = 11$, et le produit vectoriel $(\vec{a} \times \vec{p})$ a les composantes $(-3;\ 13;\ -8)$. L'équation (3) donne

$$2\vec{p_1} = -\vec{p} + 11\vec{a} + (\vec{a} \times \vec{p})$$

ou

$$\begin{cases} 2x_1 = -2 - 13 - 3 = -18 \\ 2y_1 = -6 + 5 + 13 = 12 \\ 2z_1 = -9 + 13 - 8 = -4. \end{cases}$$

P_1 a donc les coordonnées $(-9;\ 6;\ -2)$.

Si P tourne de 120^0 dans le sens inverse, il n'y a que le produit vectoriel qui change de signe dans l'équation (3); P prend alors la position $P_2\ (-6;\ -7;\ 6)$.

La formule (3) est identique aux trois formules connues sous le nom de Cayley (ou d'Olinde Rodrigues en France):

Si $(b;c;d)$ sont les composantes du vecteur $\vec{a}$, $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$; $(\vec{a} \cdot \vec{p}) = bx + cy + dz$ et les trois composantes de $(\vec{a} \times \vec{p})$ sont $(cz - dy;\ dx - bz;\ by - cx)$; l'équation (3) est équivalente aux trois équations de Cayley:

$$\begin{cases} (1 + b^2 + c^2 + d^2)\,x_1 = (1 + b^2 - c^2 - d^2)\,x + 2\,(bc - d)\,y + 2\,(bd + c)\,z \\ (1 + b^2 + c^2 + d^2)\,y_1 = 2\,(cb + d)\,x + (1 - b^2 + c^2 - d^2)\,y + 2\,(cd - b)\,z \\ (1 + b^2 + c^2 + d^2)\,z_1 = 2\,(db - c)\,x + 2\,(dc + b)\,y + (1 - b^2 - c^2 + d^2)\,z. \end{cases} \tag{4}$$

En donnant à b, c, d des valeurs réelles quelconques, ces formules déterminent toutes les transformations orthogonales réelles; elles conservent la forme $x^2 + y^2 + z^2$ laissent donc invariante l'ombilicale, l'absolu de la géométrie euclidienne à trois dimensions.

*Formules d'*Euler. Si l'on a sur l'axe un vecteur *unitaire* $\vec{u}\,(\beta;\ \gamma;\ \delta)$, $\vec{a} = a\vec{u}$; $a = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$; $\frac{1-a^2}{1+a^2} = \cos\varphi$; $\frac{2a}{1+a^2} = \sin\varphi$; $\frac{2a^2}{1+a^2} = 1 - \cos\varphi$; l'équation (3) devient alors:

$$\vec{p_1} = \vec{p}\cos\varphi + (\vec{u} \cdot \vec{p})\,\vec{u}\,(1 - \cos\varphi) + (\vec{u} \times \vec{p})\sin\varphi. \tag{3'}$$

Elle est équivalente aux trois formules d'Euler:

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + \beta\,(\beta x + \gamma y + \delta z)\,(1 - \cos\varphi) + (\gamma z - \delta y)\sin\varphi \\ y_1 = y\cos\varphi + \gamma\,(\beta x + \gamma y + \delta z)\,(1 - \cos\varphi) + (\delta x - \beta z)\sin\varphi \\ z_1 = z\cos\varphi + \delta\,(\beta x + \gamma y + \delta z)\,(1 - \cos\varphi) + (\beta y - \gamma x)\sin\varphi. \end{cases} \tag{4'}$$

Emploi des quaternions

La solution du problème des rotations s'écrit élégamment à l'aide des quaternions. Un quaternion $A = a_0 + \vec{a}$ est la somme d'un nombre a_0 et d'un vecteur $\vec{a}$; $A' = a_0 - \vec{a}$ est le quaternion *conjugué* de A.

Nous désignerons le produit de deux quaternions A et B par le symbole $A \circ B$. La loi de multiplication de $A = a_0 + \vec{a}$ par $B = b_0 + \vec{b}$ s'exprime par la relation:

$$A \circ B = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} + a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{b})$$ [1]

dont la partie scalaire $\quad c_0 = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$

et la partie vectorielle $\quad \vec{c} = a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{b})$.

Si l'on désigne les composantes du vecteur $\vec{a}$ par (a_1, a_2, a_3) et de même pour $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$ et $\vec{c}\,(c_1, c_2, c_3)$, on a

$$\left|\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c_3 &= a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1 . \end{aligned}\right.$$

En particulier: $A \circ A' = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$: Le produit d'un quaternion par son conjugué est réel: c'est la *norme* de A; nous la désignerons par $N(A) = A \circ A' = A' \circ A$.

On vérifie aisément que $(A \circ B)' = B' \circ A'$ et $N(A \circ B) = N(A)\, N(B)$. Le produit des quaternions est associatif et distributif, mais pas commutatif.

On appelle *inverse* A^{-1} d'un quaternion A le quotient de son conjugué A' par sa norme:

$$A^{-1} = \frac{A'}{N(A)}$$

et l'on a: $A^{-1} \circ A = A \circ A^{-1} = 1$.

Si l'on multiplie le vecteur $\vec{p}$ par le quaternion $1 - \vec{a} = A$, on trouve:

$$\vec{p} \circ (1 - \vec{a}) = \vec{p} \cdot \vec{a} + \vec{p} - (\vec{p} \times \vec{a});$$

de même $\quad (1 - \vec{a}) \circ \vec{p_1} = \vec{a} \cdot \vec{p_1} + \vec{p_1} - (\vec{a} \times \vec{p_1})$.

Notre égalité fondamentale (1) peut donc s'écrire:

$$A \circ \vec{p_1} = \vec{p} \circ A \tag{1'}$$

d'où, en multipliant à gauche par A^{-1}:

$$\vec{p_1} = A^{-1} \circ \vec{p} \circ A$$

ou

$$\underline{N(A)\, \vec{p_1} = A' \circ \vec{p} \circ A.} \tag{5}$$

Cette formule est équivalente aux formules (3) et (4).

Si on remplace $\vec{a}$ par $\vec{u} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ et si on multiplie $A = 1 - \vec{u} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ par $\cos \frac{\varphi}{2}$, le quaternion

$$A \cos \frac{\varphi}{2} = U = \cos \frac{\varphi}{2} - \vec{u} \sin \frac{\varphi}{2}$$

[1] HURWITZ, Zahlentheorie der Quaternionen, p. 3 et 4.

est unitaire; sa norme $N(U) = 1$; son conjugué

$$U' = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{u}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

L'équation (5') $\vec{p}_1 = U' \circ \vec{p} \circ U$ est équivalente aux formules (3') et (4'). Elle est commode pour la composition de deux ou plusieurs rotations parce que le produit de deux quaternions unitaires est encore unitaire.

Dans son cours dactylographié *Vektorielle Geometrie* Stiefel démontre la formule (5') en ramenant la rotation d'angle φ à deux symétries successives relativement à deux plans passant par l'axe et faisant entre eux l'angle $\frac{\varphi}{2}$.

Louis Kollros, Zurich

Sulle involuzioni cubiche di 2ª specie

Scopo di questo articolo è di indicare alcune proprietà dell'involuzione I_3^2, in un campo binario, strettamente collegate alla sua coppia neutra e ad una notevole terna covariante di elementi.

1. Sopra un ente razionale Ω, semplicemente infinito e irriducibile, si abbia una involuzione I_3^2 d'ordine 3 e di specie 2 (o serie lineare g_3^2), cioè una totalità ∞^2 di terne di elementi individuate ciascuna, in generale, da due di essi.

La I_3^2 possiede, come è noto, tre elementi tripli T_i ($i = 1, 2, 3$) costituenti un gruppo della I_3^2 stessa; e due elementi N_1, N_2 formanti una *coppia neutra*, ossia tali da imporre una sola condizione ai gruppi di I_3^2 costretti a contenerli: in tutto il seguito si supporranno distinti (dal punto di vista della geometria sull'ente) tanto N_1 ed N_2 che T_1, T_2, T_3.

Indichi x il parametro di un elemento variabile X di Ω (e così x_i quello di un elemento X_i): cioè, più precisamente, la coordinata proiettiva, in qualunque sistema di riferimento, del punto omologo di X sopra una punteggiata in corrispondenza birazionale con Ω. Allora la I_3^2 si può rappresentare con l'equazione:

$$\lambda_1 (x - t_1)^3 + \lambda_2 (x - t_2)^3 + \lambda_3 (x - t_3)^3 = 0, \tag{1}$$

variando ad arbitrio i coefficienti non tutti nulli λ_1, λ_2, λ_3.

2. La coppia neutra (N_1, N_2) è caratterizzata dalla equivalenza, rispetto alle variabili λ_i, delle due equazioni che si ottengono ponendo nella (1) $x = n_1$ ed $x = n_2$; onde n_1 ed n_2 si determinano mediante le formule:

$$(n_1 - t_i)^3 = k\,(n_2 - t_i)^3 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

insieme col fattore k di proporzionalità. Ne discende che T_1, T_2, T_3 formano un gruppo della g_3' che ha per elementi tripli N_1, N_2; e quindi (opportunamente ordinati) un ciclo di ciascuna delle due proiettività cicliche del 3º ordine di elementi uniti N_1, N_2. In conclusione:

Teorema I. *La coppia neutra* (N_1, N_2) *dell'involuzione* I_3^2 *è il covariante Hessiano del gruppo degli elementi tripli* T_i ($i = 1, 2, 3$).