# Bemerkungen zum Beitrag des Herrn P. Rossier über Funktionalgleichungen

# Bemerkungen zum Beitrag des Herrn P. Rossier über Funktionalgleichungen[1]

In der genannten Arbeit werden einige Funktionalgleichungen mit Methoden der Differentialrechnung untersucht. Hierzu ist zu bemerken, daß die Forderung der Differenzierbarkeit nicht sachgemäß ist und auch keinerlei Vereinfachung der Methode mit sich bringt. Es genügt, die Funktionen als stetig vorauszusetzen. Für die Gleichungen der Nrn. 2–6 ist dies bekannt[2]. Ob aber die Gleichungen

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)\, f(a - x_2) + f(x_2)\, f(a - x_1) \tag{1}$$

bzw.

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1)\, f(x_2) + f(a - x_1)\, f(a - x_2) \tag{2}$$

in Nrn. 7 und 8, welche, abgesehen von Konstanten für die Sinus- und Kosinusfunktionen, charakteristisch sind, in der Literatur schon behandelt wurden, ist mir unbekannt. Ähnliche Gleichungen wurden schon gelegentlich untersucht; so z. B. von D'ALEMBERT[3] die Gleichung $f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2) = 2\, f(x_1)\, f(x_2)$, welche neben $\cos \mu x$ auch $\cosh \mu x$ als Lösung zuläßt. VAN VLECK[4] zeigte, daß $\sin \frac{4n+1}{2a} \pi x$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, die allgemeinste stetige Lösung der Gleichung $f(x_1 - x_2 + a) - f(x_1 + x_2 + a) = 2\, f(x_1)\, f(x_2)$ darstellt. Da aber die Methode des Herrn ROSSIER Differenzierbarkeit voraussetzt, so möchte ich hier einen Beweis mitteilen, der nur Stetigkeit benützt. Ich beschränke mich dabei auf die Gleichung (1) und beweise, daß die einzigen überall stetigen Lösungen von (1) sind die Sinusfunktionen $\sin \frac{4n+1}{2a} \pi x$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, und die Konstanten 0 und $\frac{1}{2}$.

Hiezu gehe ich aus von dem Gleichungssystem

$$S(x_1 + x_2) = S(x_1)\, C(x_2) + S(x_2)\, C(x_1) \tag{2}$$

$$C(x) = S(a - x), \tag{3}$$

wo $a$ eine reelle Konstante $\neq 0$ bedeutet. Dieses System ist mit (1) äquivalent. Für $x_1 = x_2 = 0$ bzw. $x_1 = 0$, $x_2 = x$ folgt aus (2)

$$S(0) = 2\, S(0)\, C(0) \tag{4}$$

bzw.

$$S(x) = S(x)\, C(0) + S(0)\, C(x). \tag{5}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem ob $S(0) = 0$ oder $S(0) \neq 0$ ist.

---

[1] Elemente der Mathematik, Bd. I, S. 81–87. Diese Bemerkungen sind im wesentlichen ein Auszug aus einem Brief an Herrn Rossier, den zu veröffentlichen er mich gebeten hatte.

[2] Vgl. etwa CAUCHY, Cours d'analyse, 1821, Kap. 5.

[3] Mémoire sur les principes de la mécanique, 1798.

[4] Annals of Mathematics (2), Bd. 11 und 13.

*1. Fall:* $S(0) = 0$.

$S(x) \equiv 0$ ist eine Lösung, die Konstante 0. Sei also $S(x) \not\equiv 0$. Dann ist wegen (5) $C(0) = S(a) = 1$. Mit $x_1 = a - x$ und $x_2 = x$ folgt daher aus (2) und (3) $C^2(x) + S^2(x) = 1$. Der Punkt $P$ mit den Koordinaten $\xi = C(x)$ und $\eta = S(x)$ liegt also auf dem Einheitskreis $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Seine Lage hängt stetig vom Parameter $x$ ab. Der Richtungswinkel $\varphi$ des Vektors $\overrightarrow{OP}$ (bestimmt bis auf Vielfache von $2\pi$) ist eine (mehrdeutige) Funktion von $x$. Mit der Bedingung $\varphi(0) = 0$ wird $\varphi$ bei stetiger Fortsetzung eine eindeutige und stetige Funktion, und wir erhalten

$$C(x) = \cos\varphi(x) \quad \text{und} \quad S(x) = \sin\varphi(x).$$

In Verbindung mit (2) folgt dann

$$\sin\bigl(\varphi(x_1 + x_2)\bigr) = S(x_1 + x_2)$$

$$= \sin\varphi(x_1)\cos\varphi(x_2) + \sin\varphi(x_2)\cos\varphi(x_1) = \sin\bigl(\varphi(x_1) + \varphi(x_2)\bigr).$$

Es ist also entweder für alle $x_1$ und $x_2$

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + 2k\pi \tag{6}$$

oder $$-\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + (2k+1)\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{7}$$

Wegen $\varphi(0) = 0$ fällt (7) außer Betracht und in (6) wird $k$ die Konstante 0. Es folgt $\varphi(x) = \mu \cdot x\ (\mu \neq 0)$ und $S(x) = \sin\mu x$. Die Bedingung $S(a) = 1$ ergibt $\mu = \frac{4n+1}{2a}\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Die möglichen Lösungen im Falle 1 sind also die Sinusfunktionen $\sin\frac{4n+1}{2a}\pi x$ und die Konstante 0.

*Fall 2:* $S(0) \neq 0$. Dann ist wegen (4) $C(0) = S(a) = \frac{1}{2}$ und aus (5) wird

$$\frac{1}{2}S(x) = S(0)\cdot C(x). \tag{8}$$

Mit $x = a$ folgt daraus $S(0) = \pm\frac{1}{2}$.

*Fall 2a:* $S(0) = -\frac{1}{2}$. Dann ist wegen (8) $S(x) = -C(x)$ und für $x_1 = x_2 = \frac{a}{2}$ wird aus (2) $\frac{1}{2} = S(a) = -2S^2\left(\frac{a}{2}\right)$, womit der Fall 2a ausgeschlossen ist.

*Fall 2b:* $S(0) = \frac{1}{2}$. Dann ist wegen (8) $S(x) = C(x)$. Aus (2) wird

$$S(x_1 + x_2) = 2S(x_1)S(x_2) \tag{9}$$

und daraus

$$S(nx) = 2^{n-1}\cdot S^n(x), \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

$n = 2$ ergibt $S(2x) = 2S^2(x)$, $S(x)$ ist also nie negativ. Mit $x = \frac{a}{n}$ folgt aus (10) $S\left(\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{2}$ und weiter $S(ra) = \frac{1}{2}$ für alle positiven rationalen $r$. Mit (9) kann dieser Sachverhalt auf die negativen rationalen $r$ übertragen werden und aus der Stetigkeit von $S(x)$ folgt schließlich $S(x) \equiv \frac{1}{2}$, womit alles bewiesen ist.

ALBERT PFLUGER, Zürich