Un problème de géométrie élèmentaire

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **1 (1946)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-1195

aber Eigenschaften, welche die Herstellung erleichtern, im besonderen die Berechnung der Koordinaten (u; v) ersparen.

a) Die Kurve ist *symmetrisch* in bezug auf die mittlere, zur X- und Y-Achse parallelen Linie m; denn berechnet man u_1 und u_2 für die Winkel α und $90^0-\alpha$, dann erhält man $u_2 = a - u_1$ und $v_1 = v_2$.

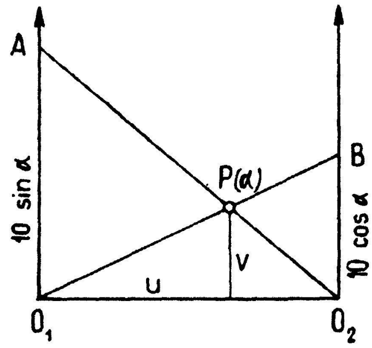

Fig. 4

b) Die Kurve kann durch *zwei Strahlenbüschel* mit den Scheiteln O_1 und O_2 hergestellt werden (Fig. 4). Auf der X-Achse tragen wir von O_1 aus die Strecke $O_1A = 10 \cdot \sin\alpha$ und auf der Y-Achse die Strecke $O_2B = 10 \cdot \cos\alpha$ ab; dann schneiden sich die Strahlen O_1B und O_2A gerade im Punkte $P(\alpha)$, wie man aus der Ähnlichkeit gewisser Dreiecke sofort ersehen kann. Wählt man in der Überlegungsfigur 1 $a = 3$ cm, $b = 1$ cm und $c = 10$ cm, dann heißt die Gleichung $\frac{3}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha} = 10$. Sie hat die Lösungen $\alpha_1 = 8^0 15'$, $\alpha_2 = 70^0 32'$, wie die eingezeichnete Indexlinie in Figur 3 zeigt.

A. HESS, Zürich

Un problème de géométrie élémentaire

Tracer une droite passant par un point donné et par l'intersection inaccessible de deux droites

Dans les constructions de perspective, les points de fuite sont souvent inaccessibles; il est cependant commode de les utiliser dans les constructions. Voici quelques solutions simples de ce problème.

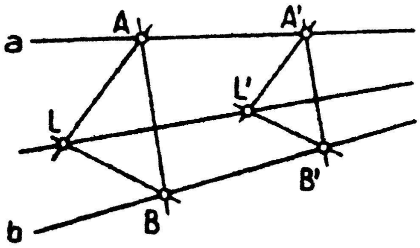

fig. 1

Soient a et b deux droites données d'intersection I inaccessible, et L le point donné par lequel doit passer un rayon du faisceau de sommet I.

a) Procédé des triangles semblables

Par L, mener deux droites quelconques; soient A et B deux des intersections de ces droites, avec a et b, non alignées sur L, et une parallèle à AB coupant a en A' et b en B'; par A' et B' mener les parallèles $A'L'$ et $B'L'$ à AL et BL; l'intersection L' de $A'L'$ et $B'L'$ appartient à la droite cherchée (fig. 1).

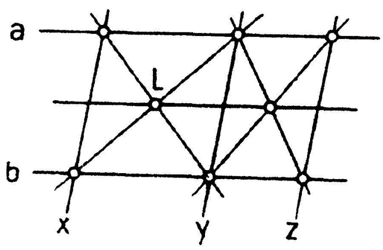

fig. 2b

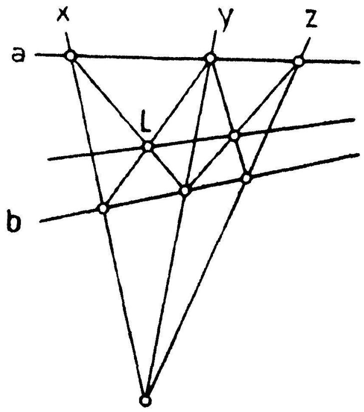

fig. 2a

Démonstration:

AA', BB' et LL' peuvent être considérées comme les perspectives des arêtes d'un prisme dont les bases ABC et $A'B'C'$ sont parallèles au tableau; ces perspectives convergent vers le point de fuite I de la direction des arêtes.

b) Procédé des trois sécantes concourantes (dit de LAMBERT[1]))

Considérons la figure formée par deux parallèles a, b, coupées par trois sécantes parallèles entre elles, x, y et z; cette figure comporte deux parallélogrammes de côtés portés par a, b, x et y pour l'un, et par a, b, y et z pour l'autre. Les centres de ces parallélogrammes déterminent une droite parallèle à a et b (fig. 2a).

Mettons la figure en perspective (fig. 2b); les parallèles concourent vers leurs points de fuite; on déduit de là la construction suivante:

Par L, tracer deux droites (première paire de diagonales); par leurs intersections avec a et b, mener les deux sécantes (x et y), puis une troisième sécante (z) passant par l'intersection de x et y.

L'intersection des diagonales du quadrilatère formé par a, b, y et z appartient à la droite cherchée.

c) Procédé de D'OCAGNE[2])

Lemme: Soit un parallélogramme $ABCD$ (fig. 3a); traçons une droite extérieure coupant sur leurs prolongements AD en E, BC en F et CD en G. Menons BG et DF; soit H l'intersection de BG et AD et K celle de DF et AB. Nous allons montrer que HK est parallèle à EF.

---

[1]) LAMBERT, Jean-Henri — Mulhouse 1728, Berlin 1777, l'auteur d'un traité d'optique, d'une perspective, d'un ouvrage sur les comètes. LAMBERT a démontré que π est incommensurable et fut l'un des premiers à envisager les fonctions hyperboliques.

[2]) D'OCAGNE, Maurice — Paris 1862, professeur à l'Ecole polytechnique de Paris, inventeur de la nomographie.

En effet, les paires des triangles semblables BGC et HGD d'une part, CFD et BFK d'autre part donnent

$$\frac{HD}{DE} = \frac{BC}{CF} = \frac{KD}{DF}, \text{ d'où } \frac{HD}{KD} = \frac{DE}{DF}.$$

Les deux triangles HDK et EDF sont semblables, HK et EF sont parallèles.

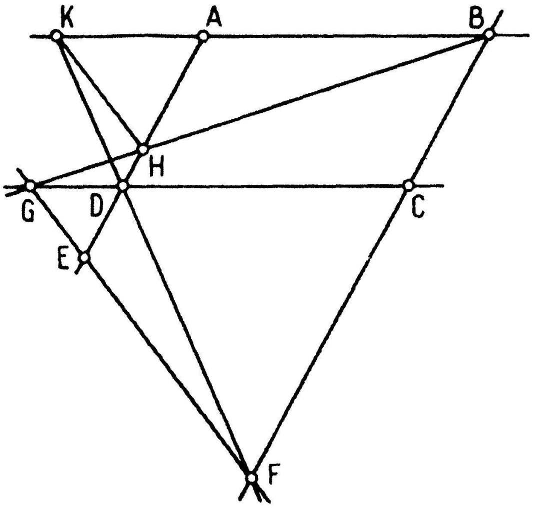

fig. 3a

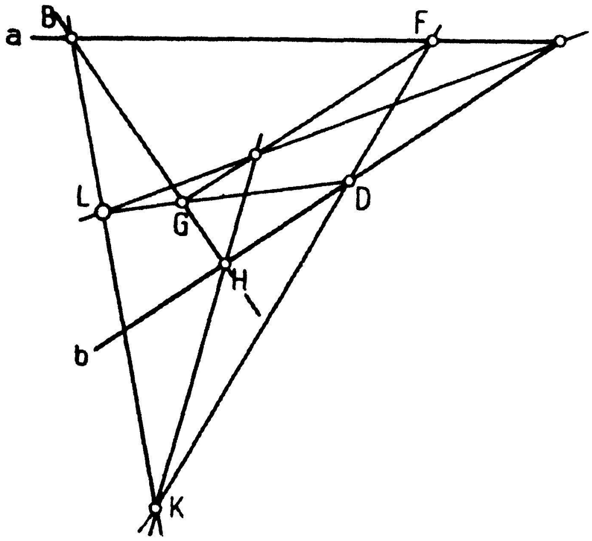

fig. 3b

Mettons la figure en perspective (fig. 3b).

Les perspectives de BK et DG, de BF et DH, enfin de FG et HK concourent respectivement sur la droite de fuite du plan de la figure.

On est conduit à la construction suivante:

Couper la figure par deux sécantes quelconques; elles forment avec les droites données a et b un quadrilatère $BFDH$ dont les sommets B et F sont sur a; joindre L à deux sommets opposés B et D; soient G et K les intersections de DL et BH d'une part, de BL et DF d'autre part.

L'intersection de HK et de FG appartient à la droite cherchée.

d) Procédé orthocentrique

De L, abaissons deux perpendiculaires a' et b' à a et b; marquons l'intersection A' de a' ($\perp a$) et de b et celle B' de b' ($\perp b$) et de a; menons $A'B'$; la perpendiculaire l abaissée de L sur $A'B'$ passe par le point de concours I de a et b (fig. 4).

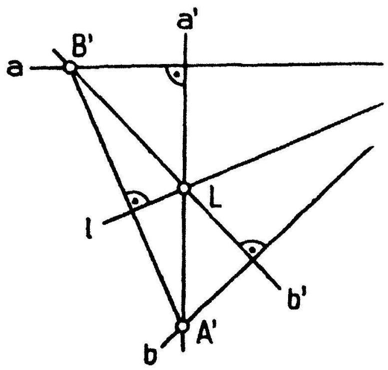

fig. 4

En effet, a, b et l sont les trois hauteurs du triangle $B'A'L'$.

Remarques

En principe, le tracé d'une droite par deux points donnés est un problème linéaire et projectif; il est soluble avec la règle seule. C'est bien ce que donnent les solutions de LAMBERT et de D'OCAGNE. Cependant, si l'intersection des droites données s'éloigne indéfiniment, l'une des droites données est inutile; le problème perd son caractère projectif; devenu métrique, il exige l'emploi du compas ou de l'équerre. C'est ce qui ressort des procédés orthocentriques et des triangles semblables, qui d'ailleurs deviennent l'équivalent des artifices classiques de tracé des parallèles, ou même perdent tout intérêt.

Du point de vue de la brièveté des constructions avec la règle seule, le procédé D'OCAGNE est supérieur à celui de LAMBERT, mais il conduit facilement à des constructions encombrantes, et on ne voit pas d'un coup d'œil, à l'avance, l'ensemble de la construction.

Si l'on emploie l'équerre, le procédé orthocentrique est excellent et généralement peu encombrant, d'autant moins que les droites données convergent en un point plus éloigné. Il conduit en outre à ne marquer que deux points sur les droites données; peu encombrant du point de vue de la place exigée, il l'est aussi par le petit nombre de tracés.

PAUL ROSSIER, Genève

Kleine Studie zum Tangentialpolyeder

Es bezeichne V das Volumen und F die Oberfläche eines Tangentialpolyeders. Unter einem Tangentialpolyeder verstehen wir hier ein konvexes Polyeder, dessen Seitenflächen alle die Inkugel berühren.

Eine in der Theorie der Polyeder wichtige Maßzahl, nämlich die sog. Kantenkrümmung, ist eng verwandt mit der folgenden Größe K:

$$K = \sum s_i \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi_i}{2}.$$

Hierbei bezeichnet s_i die Länge der i-ten Kante des Polyeders und φ_i den im Innern des Polyeders durchmessenen Neigungswinkel der beiden an der i-ten Kante zusammenstoßenden Seitenflächen; die Summation ist über sämtliche Kanten des Polyeders zu erstrecken.

Das Ziel der vorliegenden kleinen Mitteilung ist es, durch zweckmäßige Verwendung einiger beim Tangentialpolyeder bestehenden stereometrischen und trigonometrischen Beziehungen gewisse Relationen abzuleiten, die zwischen den oben eingeführten Polyedermaßzahlen K, F und V bestehen. Diese Relationen stehen in engem Zusammenhang mit den allgemeinen Hauptformeln der MINKOWSKIschen Theorie der konvexen Körper. Die vorliegende Studie zeigt, daß diese fraglichen Relationen, insbesondere die isoperimetrische Ungleichung, im Falle des Tangentialpolyeders einen durchaus elementaren Charakter haben.

Mit den beiden klassischen Ungleichungen von MINKOWSKI eng verwandt sind die Beziehungen

$$K^2 - 4\pi F > 0 \tag{1}$$

$$F^2 - 3KV \geqq 0 . \tag{2}$$