Formes différentielles abéliennes, bornes de Castelnuovo géométrie des tissus

Autor(en): **Hénaut, Alain**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **79 (2004)**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-59498

Comment. Math. Helv. 79 (2004) 25–57
0010-2571/04/010025-33
DOI 10.1007/s00014-003-0787-4

Commentarii Mathematici Helvetici

Formes différentielles abéliennes, bornes de Castelnuovo et géométrie des tissus

Alain Hénaut

Abstract. A d-web $\mathcal{W}(d)$ is given by d complex analytic foliations of codimension n in $(\mathbb{C}^N, 0)$ such that the leaves are in general position. We are interested in the geometry of such configurations. A complex $(\mathcal{A}^\bullet, \delta)$ of $\mathbb{C}$-vector spaces is defined in which $\mathcal{A}^0$ corresponds to functions and $\mathcal{A}^p$ to p-forms of the web $\mathcal{W}(d)$ for $1 \le p \le n$. If $N = kn$ with $k \ge 2$, it is proved that $r_p := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}^p$ is a finite analytic invariant of $\mathcal{W}(d)$ with an optimal upper bound $\pi_p(d, k, n)$ for $0 \le p \le n$. These bounds generalize the Castelnuovo's ones for genus of curves in $\mathbb{P}^k$ with degree d. Some characterization of the the space $H^0(V_n, \omega^p_{V_n})$ of abelian differentials to an algebraic variety V_n in $\mathbb{P}^{n+k-1}$ of pure dimension n with degree d is given. Moreover, using duality and Abel's theorem, we investigate how for suitable V_n the natural complex $\big(H^0(V_n, \omega^\bullet_{V_n}), d\big)$ and the abelian relation complex $(\mathcal{A}^\bullet, \delta)$ of the linear web associated to V_n in $(\mathbb{C}^{kn}, 0)$ are related.

Mathematics Subject Classification (2000). Primary 53A60; Secondary 14C21, 32L30.

Keywords. Web geometry, Analytic algebraic geometry, Abelian differentials.

1. Introduction et résultats principaux

Un d-tissu $\mathcal{W}(d)$ de codimension n de $(\mathbb{C}^N, 0)$ est défini par d feuilletages analytiques complexes de codimension n de $(\mathbb{C}^N, 0)$ en *position générale*. On s'intéresse à la *géométrie* de telles configurations. Les travaux fondateurs sur ce sujet sont dus à W. Blaschke, G. Thomsen et G. Bol et datent des années 30 (*cf.* par exemple [B-B], [B], [C2], [Hé4]). Outre ces derniers, il faut citer les travaux de S. S. Chern et P. A. Griffiths (*cf.* [C1], [G1], [G2], [C-G1] et [C-G2]) dans le sillage desquels se situe le présent article, et ceux de M. A. Akivis et V. V. Goldberg (*cf.* par exemple [Ak], [Go]). On peut également consulter [Bea] pour diverses propriétés de base des tissus et [W] pour des développements plus récents.

A partir de la donnée des différentes familles de feuilles d'un d-tissu $\mathcal{W}(d)$ de codimension n de $(\mathbb{C}^N, 0)$, on construira dans le prochain paragraphe des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathcal{A}^p$ pour $0 \le p \le n$ et la différentielle extérieure usuelle donnera un *complexe* $(\mathcal{A}^\bullet, \delta)$. On verra que les éléments de $\mathcal{A}^0$ peuvent être considérés comme les "fonctions" du tissu $\mathcal{W}(d)$ et que pour $1 \le p \le n$ les éléments de $\mathcal{A}^p$, à savoir les *relations abéliennes de degré* p de $\mathcal{W}(d)$, en sont les "p-formes".

En codimension 1, par exemple, les feuilles de $\mathcal{W}(d)$ sont les germes d'ensembles de niveau définis par d germes de fonctions analytiques $F_i \in \mathcal{O} := \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_N\}$ tels que $F_i(0) = 0$ et les seules relations abéliennes sont celles de degré 1. Les éléments de $\mathcal{A}^1$ sont les d-uplets $\big(g_i(F_i)\big)$ vérifiant la relation $\sum_{i=1}^{d} g_i(F_i)\, dF_i = 0$ où les $g_i \in \mathbb{C}\{z\}$ et les éléments de $\mathcal{A}^0$ sont les d-uplets $\big(\alpha_i(F_i)\big)$ tels que l'on ait $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i(F_i) = cste$ avec des $\alpha_i \in \mathbb{C}\{z\}$. De même, en codimension 2 les feuilles de $\mathcal{W}(d)$ sont les germes d'ensembles de niveau définis par d couples (F_{i_1}, F_{i_2}) avec des $F_{i_m} \in \mathcal{O}$ tels que $F_{i_m}(0) = 0$. Les relations abéliennes de degré 1 correspondent aux éléments de $\mathcal{A}^1$ qui sont les $2d$-uplets $\big(h_i(F_{i_1}, F_{i_2}), k_i(F_{i_1}, F_{i_2})\big)$ vérifiant $\sum_{i=1}^{d} h_i(F_{i_1}, F_{i_2})\, dF_{i_1} + k_i(F_{i_1}, F_{i_2})\, dF_{i_2} = 0$ avec des h_i et k_i dans $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}$; celles de degré 2 s'identifient aux éléments de $\mathcal{A}^2$ qui sont les d-uplets $\big(g_i(F_{i_1}, F_{i_2})\big)$ tels que $\sum_{i=1}^{d} g_i(F_{i_1}, F_{i_2})\, dF_{i_1} \wedge dF_{i_2} = 0$ où les $g_i \in \mathbb{C}\{z_1, z_2\}$; enfin les éléments de $\mathcal{A}^0$ sont les d-uplets $\big(\alpha_i(F_{i_1}, F_{i_2})\big)$ qui vérifient $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i(F_{i_1}, F_{i_2}) = cste$ avec des $\alpha_i \in \mathbb{C}\{z_1, z_2\}$.

En général les $\mathcal{A}^p$ ne sont pas de dimension finie. Cependant si $N = kn$ avec $k \geq 2$ on démontrera, en utilisant notamment l'hypothèse de position générale des différents feuilletages, le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $\mathcal{W}(d, k, n)$ un d-tissu de codimension n de $(\mathbb{C}^{kn}, 0)$; on a un complexe $(\mathcal{A}^\bullet, \delta)$ formé de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie avec les majorations optimales suivantes pour $0 \leq p \leq n$:*

$$r_p := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}^p \leq \pi_p(d, k, n)\,.$$

Chaque entier r_p défini ci-dessus est un invariant analytique du tissu $\mathcal{W}(d, k, n)$ appelé le p-rang de ce tissu. On verra dans le paragraphe qui suit que les bornes optimales explicites $\pi_p(d, k, n)$ sont des nombres de Castelnuovo généralisés. Par exemple en codimension 1, on a

$$\pi_1(d, k, 1) = \{d - k\} + \{d - 2k + 1\} + \{d - 3k + 2\} + \cdots$$

avec la convention que la somme ci-dessus ne fait intervenir que des termes positifs. Cet entier, sur lequel on reviendra dans le paragraphe 4, est le nombre de Castelnuovo associé au genre des courbes algébriques gauches (*cf.* par exemple [G-H]).

En degré 0 la majoration précédente est obtenue à l'aide de résultats de base de l'analyse algébrique (*i.e.* la théorie algébrique des systèmes différentiels linéaires ou théorie des $\mathcal{D}$-modules). Ce qui généralise l'approche de [Hé2] (cas des tissus de codimension 1 de $(\mathbb{C}^k, 0)$, c'est-à-dire des $\mathcal{W}(d,k,1)$). En degré p où $1 \leq p \leq n$ on introduit, pour démontrer ces majorations, des variantes de la *méthode de Poincaré–Blaschke* et l'on retrouve en particulier la majoration de Chern et Griffiths (c'est-à-dire le cas $p = n$ ci-dessus, *cf.* [C-G2]).

Les majorations précédentes seront utilisées dans le paragraphe 4. On montrera, également dans ce paragraphe, que les bornes précédentes sont atteintes pour des tissus de $(k-1)n$-plans associés à certains *arrangements* de n-plans de $\mathbb{P}^{n+k-1}$.

On sait que les tissus $\mathcal{W}(d,k,n)$ dont le n-rang est maximal (*i.e.* $r_n = \pi_n(d,k,n)$) possèdent des propriétés géométriques particulières permettant parfois des classifications partielles (*cf.* par exemple [B-B], [C-G1], [C-G2], [Go], [Li], [Hé1], [Hé3]) et sur lesquelles on reviendra. On donnera également dans les paragraphes 2 et 4 quelques propriétés des tissus $\mathcal{W}(d,k,n)$ relativement aux autres rangs. On se doit de noter, cependant, que la caractérisation pour $0 \leq p \leq n$ des tissus $\mathcal{W}(d,k,n)$ de p-rang maximal est un problème largement ouvert.

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique complexe réduit de dimension *pure* n ; pour $0 \leq p \leq n$ on désigne par Ω_X^p le faisceau $\mathcal{O}_X$-cohérent des p-formes différentielles sur X. Dans un plongement local de X dans $(Z, \mathcal{O}_Z)$ lisse, on a $\Omega_X^p = \Omega_Z^p/(d\mathcal{I}_X \wedge \Omega_Z^{p-1}, \mathcal{I}_X\Omega_Z^p)$ où $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z/\mathcal{I}_X$.

Soit S le lieu singulier de X, on note $j : X - S \longrightarrow X$ l'injection naturelle. Dans [Ba1], D. Barlet a montré qu'il existe pour tout $0 \leq p \leq n$ un sous-faisceau ω_X^p de $j_*j^*\Omega_X^p$ qui s'identifie à Ω_X^p aux points lisses de X, est $\mathcal{O}_X$-cohérent et sans-torsion ; de plus, les $\omega_X^\bullet$ sont stables par la différentielle extérieure d et par produit extérieur par les $\Omega_X^\bullet$. Plusieurs caractérisations des sections locales de ω_X^p (*cf.* également [Ba1]) en termes d'extension holomorphe de *traces* relatives à des germes de morphismes finis ou bien en terme de courant $\bar\partial$-fermé en seront rappelées au paragraphe 3 (*cf.* également [Bj] et [H-P]). L'une d'entre elles, par exemple, est qu'une section locale de ω_X^p est une p-forme différentielle méromorphe sur X, à pôles contenus dans S et qui se prolonge à X tout entier comme courant $\bar\partial$-fermé. Il faut signaler, en particulier que l'on a les identifications suivantes :

$$\omega_X^n = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Z}^{k-1}(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^{n+k-1}) \quad \text{et} \quad \omega_X^p = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^{n-p}, \omega_X^n)$$

pour $0 \leq p \leq n$ si Z est de dimension $n+k-1$.

Pour $0 \leq p \leq n$, le faisceau ω_X^p contient, en général strictement, le faisceau $\mathcal{L}_X^p$ lui aussi $\mathcal{O}_X$-cohérent des p-formes méromorphes sur X, à pôles contenus dans S et dont l'image inverse par une désingularisation de X est holomorphe. On rappelle que ces faisceaux $\mathcal{L}_X^p$ de p-formes, dites également de type L^2 en vertu de leurs propriétés (*cf.* par exemple [G1], [Ba1]), ne dépendent pas du choix de la désingularisation.

De plus, la propriété suivante des $\omega_X^\bullet$ sera déterminante dans l'étude entreprise ; on verra en effet, dans le paragraphe 4, comment l'annulation de certaines traces donnent des relations abéliennes de tissus naturels. Soit $\pi : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre et surjectif où Y est lisse, connexe et également de dimension n ; le morphisme π est génériquement fini et sur toute trivialisation simplement connexe il existe d branches locales p_i sur Y relevant π. Alors pour tout $0 \leq p \leq n$ et toute $\omega \in H^0(X, \omega_X^p)$, la p-forme $\mathrm{Trace}_\pi(\omega) := \sum_{i=1}^{d} p_i^*(\omega)$ après recollement naturel, se prolonge d'une manière unique en un élément de $H^0(Y, \Omega_Y^p)$.

Soit V_n une variété algébrique réduite de $\mathbb{P}^{n+k-1}$ de dimension *pure* n, *non dégénérée* (*i.e.* non contenue dans un hyperplan de $\mathbb{P}^{n+k-1}$), non nécessairement irréductible, éventuellement singulière et de degré d. Au voisinage d'un point générique $\mathbb{P}^{k-1}(0)$ de la grassmannienne $G(k-1, \mathbb{P}^{n+k-1})$ des $(k-1)$-plans de $\mathbb{P}^{n+k-1}$, on peut construire un d-tissu $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$ de codimension n de $(G(k-1, \mathbb{P}^{n+k-1}), \mathbb{P}^{k-1}(0)) = (\mathbb{C}^{kn}, 0)$ dont les feuilles correspondent aux variétés de Schubert $\sigma_{p_i(x)}$ des $(k-1)$-plans de $\mathbb{P}^{n+k-1}$ passant par $p_i(x)$ où

$$\mathbb{P}^{k-1}(x) \cap V_n = \sum_{i=1}^{d} p_i(x) \quad \text{en tant que 0-cycles de } V_n$$

à la *seule* condition que les d points d'intersection $p_i(0)$ de V_n et $\mathbb{P}^{k-1}(0)$ soient en *position générale* dans $\mathbb{P}^{k-1}(0)$. Un tel $(k-1)$-plan générique existe toujours si $k = 2$, de même pour $k \geq 3$ si par exemple V_n est irréductible, en particulier si V_n est lisse et connexe.

Si cette condition de position générale est vérifiée, on dira que $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$ est *"le" tissu algébrique associé à* $V_n \subset \mathbb{P}^{n+k-1}$. Dans ce cas et par construction, le d-tissu $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$ est *linéaire* (*i.e.* toutes ses feuilles sont des $(k-1)n$-plans de $\mathbb{C}^{kn}$, non nécessairement parallèles). Par exemple, pour une courbe algébrique réduite $V_1 \subset \mathbb{P}^2$ de degré d, les feuilles de $\mathcal{L}_{V_1}(d,2,1)$ sont, par dualité, essentiellement les tangentes à la courbe duale de V_1 dans $G(1, \mathbb{P}^2) = \check{\mathbb{P}}^2$.

Soit $0 \leq p \leq n$, d'après ce qui précède les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $H^0(V_n, \omega_{V_n}^p)$ sont de dimension finie et forment un complexe $(H^0(V_n, \omega_{V_n}^\bullet), d)$ qu'on appelera *le complexe des formes différentielles abéliennes* de la variété algébrique $V_n \subset \mathbb{P}^{n+k-1}$.

Tout élément $\omega \in H^0(V_n, \omega_{V_n}^p)$ vérifie

$$\mathrm{Trace}(\omega) := \sum_{i=1}^{d} p_i^*(\omega) = \begin{cases} cste & \text{si} \quad p = 0 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq p \leq n \end{cases} \qquad (\star)$$

ce qui généralise le théorème d'annulation classique d'Abel (*cf.* [A] et [G1]) et justifie la terminologie adoptée. Toujours dans le paragraphe 3, on verra notamment que la relation $(\star)$ ci-dessus caractérise les formes rationnelles sur V_n, régulières si V_n est non singulière ou bien dont le lieu polaire est contenu dans le lieu singulier de V_n, et qui sont dans $H^0(V_n, \omega_{V_n}^p)$ et ce, que V_n définisse ou non le tissu $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$.

Si la variété algébrique $V_n \subset \mathbb{P}^{n+k-1}$ définit le tissu $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$, on montrera dans le paragraphe 4 que la relation $(\star)$ ci-dessus permet de construire pour tout

$\omega \in H^0(V_n, \omega^p_{V_n})$ un élément de $\mathcal{A}^p := \mathcal{A}^p(\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n))$ et détermine ainsi une application $\mathbb{C}$-linéaire $A^p : H^0(V_n, \omega^p_{V_n}) \longrightarrow \mathcal{A}^p$. On établira alors essentiellement le résultat suivant :

Théorème 2. *Sous les conditions précédentes, on a un morphisme injectif de complexes*

$$A^\bullet : \big(H^0(V_n, \omega^\bullet_{V_n}), d\big) \longrightarrow (\mathcal{A}^\bullet, \delta)$$

qui est bijectif en degré maximal $p = n$. En particulier, on a les majorations optimales suivantes pour $0 \le p \le n$:

$$h^{p,0}(V_n) := \dim_{\mathbb{C}} H^0(V_n, \omega^p_{V_n}) \le \pi_p(d,k,n)\,.$$

Pour $p = n$, on retrouve ainsi les majorations de Castelnuovo–Harris (*cf.* pour $n = 1$, [Ca], [G-H] et pour $n \ge 1$, [H], [C-G2]). Ce qui suggère d'étudier, à $0 \le p \le n$ fixé, la nature géométrique des variétés algébriques $V_n \subset \mathbb{P}^{n+k-1}$ dont les $h^{p,0}(V_n)$ sont maximaux. De même, en regard des singularités de V_n, la description du complexe $\big(H^0(V_n, \omega^\bullet_{V_n}), d\big)$ semble digne d'intérêt.

Les résultats obtenus sur le complexe des relations abéliennes ainsi que les méthodes utilisées engendrent de nombreux problèmes naturels en géométrie des tissus, même si la codimension des feuilles ne divise pas la dimension de l'espace ambiant. Outre l'approche des tissus singuliers déjà mentionnée dans [Hé2], on peut citer au moins l'étude géométrique des configurations des normales du tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ en fonction des différents rangs et les questions générales d'algébrisation des tissus, notamment les problèmes de type Abel-inverse pour les d-tissus $\mathcal{W}(d,k,n)$ grassmanniens. Par ailleurs l'étude du complexe des relations abéliennes des tissus *exceptionnels* (*i.e.* des tissus $\mathcal{E}(d,k,n)$ qui ont des rangs r_p de tissus algébriques, mais ne sont pas pour autant algébrisables (*cf.* [Hé4])) devrait contribuer à leur description.

2. Généralités sur les tissus ; complexe des relations abéliennes et majoration des rangs

Après quelques précisions quant aux définitions d'un (germe de) tissu de $(\mathbb{C}^N, 0)$, on introduit les différents éléments de son complexe des relations abéliennes et l'on en donne quelques propriétés.

Un d-tissu $\mathcal{W}(d)$ de *codimension* n de $(\mathbb{C}^N, 0)$ est défini par d feuilletages analytiques complexes de codimension n de $(\mathbb{C}^N, 0)$ en *position générale.* Plus précisément, si $\mathcal{O} := \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_N\}$ désigne l'anneau des séries entières convergentes à N variables, le tissu $\mathcal{W}(d)$ est donné par d *familles* de feuilles de codimension n, indexées par i et en position générale ; ce sont les germes non singuliers d'ensembles de niveau définis par

$$\begin{cases} F_{i_1}(x) = cste \\ \vdots \\ F_{i_n}(x) = cste \end{cases}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_N)$ et $F_{i_m} \in \mathcal{O}$ avec $F_{i_m}(0) = 0$.

Pour $1 \leq i \leq d$ et x voisin de $0 \in \mathbb{C}^N$, les "*normales*" $\Omega_i(x) = \bigwedge_{m=1}^{n} dF_{i_m}(x)$ en x définissent d points de la grassmannienne $G(n-1, \mathbb{P}^{N-1})$ des $(n-1)$-plans de $\mathbb{P}^{N-1}$ que l'on peut regarder, *via* le plongement de Plücker, dans $\mathbb{P}^{\binom{N}{n}-1}$; ces normales ne dépendent que du tissu $\mathcal{W}(d)$ et non du choix des F_{i_m}. En effet, si l'on procède à un changement d'équations des feuilles, la i-ième feuille du tissu $\mathcal{W}(d)$ est également définie par

$$\begin{cases} \gamma_{i_1}(F_{i_1}(x), \ldots, F_{i_n}(x)) = cste \\ \vdots \\ \gamma_{i_n}(F_{i_1}(x), \ldots, F_{i_n}(x)) = cste \end{cases}$$

où les $\gamma_{i_m} \in \mathbb{C}\{z\} = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ vérifient $\dfrac{\partial(\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_n})}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}(0) \neq 0$.

L'hypothèse de position générale est la suivante : pour tout x voisin de $0 \in \mathbb{C}^N$ et tout l-uplet $\big(\Omega_{i(1)}(x), \ldots, \Omega_{i(l)}(x)\big)$ de normales du tissu $\mathcal{W}(d)$ où $1 \leq l \leq d$, la dimension du sous-espace vectoriel de $T_x^*(\mathbb{C}^N)$ engendré par l'intersection (resp. la somme) des éléments de cet l-uplet est minimale (resp. maximale).

En particulier, si $N = kn$ avec $k \geq 2$ (ce qui sera essentiellement le cas dans ce qui suit) la *position générale* se traduit par

$$\Omega_{i(1)}(0) \wedge \cdots \wedge \Omega_{i(j)}(0) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq i(1) < \cdots < i(j) \leq d \quad \text{où} \quad j \leq k\,.$$

La notion de relation abélienne, introduite ci-dessous, joue un rôle central dans ce travail ; elle fournit les principaux invariants d'un d-tissu $\mathcal{W}(d)$ de codimension n de $(\mathbb{C}^N, 0)$. Pour $1 \leq p \leq n$, $1 \leq i \leq d$ et tout multi-indice $I_i = \{i_{m_1}, \ldots, i_{m_p}\}$ de longueur $\mid I_i \mid = p$, toujours strictement croissant et choisi dans $\{i_1, \ldots, i_n\}$, on pose $dF_{I_i} = \bigwedge_{j=1}^{p} dF_{i_{m_j}}$. Suivant de près une idée de P. A. Griffiths (*cf.* [G2]), on définit le $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$\mathcal{A}^p = \Big\{ \big(\alpha_{I_i}(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})\big)_{1 \leq i \leq d,\, |I_i| = p} \in \mathcal{O}^{\binom{n}{p}\cdot d} \text{ telles que}$$

$$\alpha_{I_i} \in \mathbb{C}\{z\} = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i \leq d,\, |I_i| = p} \alpha_{I_i}(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})\, dF_{I_i} = 0 \Big\}$$

où la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel est naturellement donnée par addition et multiplication sur chaque composante ; il est constitué de ce que l'on appelle les *relations abéliennes de degré* p du tissu $\mathcal{W}(d)$.

Pour $p = n$, ce sont les relations abéliennes de degré maximal n du tissu $\mathcal{W}(d)$, à savoir les d-uplets $\big(g_1(F_{1_1}, \ldots, F_{1_n}), \ldots, g_d(F_{d_1}, \ldots, F_{d_n})\big) \in \mathcal{O}^d$ qui vérifient $\sum\limits_{i=1}^{d} g_i(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})\Omega_i = 0$ où $g_i \in \mathbb{C}\{z\}$; ces dernières ont été les plus étudiées (*cf.* par exemple [B-B], [C1], [C-G1], [C-G2], [Hé2]).

Par définition, la différentielle extérieure induit un *complexe* de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, noté $(\mathcal{A}^\bullet, \delta)$ où $\mathcal{A}^p = 0$ pour $p > n$. On va prolonger ce dernier en $p = 0$.

Pour $1 \leq i \leq d$, soit (X_{i_m}) une famille de $(N - n)$ champs de vecteurs dans $(\mathbb{C}^N, 0)$ qui donne la i-ième famille de feuilles du tissu $\mathcal{W}(d)$. On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$\mathcal{R}(d) \quad \begin{cases} X_{i_m}(f_i) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq d \quad \text{et} \quad 1 \leq m \leq N - n \\[2ex] \qquad \partial_k(f_1 + \cdots + f_d) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq N \end{cases}$$

où $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ pour $1 \leq k \leq N$ et l'on désigne par $\mathcal{A}^0 := Sol\,\mathcal{R}(d)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des solutions $(f_1, \ldots, f_d) \in \mathcal{O}^d$ de ce système.

En codimension 1 l'analogue du système $\mathcal{R}(d)$ dans le cadre C^∞ correspond aux équations de la *résonance* qui interviennent en optique géométrique (*cf.* par exemple [J-M-R]).

La différentielle usuelle induit une application $\mathbb{C}$-linéaire $\delta : \mathcal{A}^0 \longrightarrow \mathcal{A}^1$. En effet, tout élément $f_i \in \mathcal{O}$ et vérifiant $X_{i_m}(f_i) = 0$ pour $1 \leq m \leq N - n$ s'écrit d'une manière unique $f_i = \alpha_i(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})$ avec $\alpha_i \in \mathbb{C}\{z\}$; de plus, pour $(f_1, \ldots, f_d) \in \mathcal{A}^0$ et par définition de $\mathcal{A}^1$, on a

$$\delta(f_1, \ldots, f_d) := \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial z_1}(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}), \ldots, \frac{\partial \alpha_i}{\partial z_n}(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})\right) \in \mathcal{A}^1.$$

On dira que le complexe $(\mathcal{A}^\bullet, \delta)$ ainsi prolongé en $p = 0$ est *le complexe des relations abéliennes* du tissu $\mathcal{W}(d)$. D'après ce qui précède, on a

$$\mathcal{A}^0 = \left\{ \big(\alpha_i(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})\big) \in \mathcal{O}^d ;\ \alpha_i \in \mathbb{C}\{z\} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}) = cste \right\}$$

où, comme pour les coefficients des relations abéliennes de degré p du tissu $\mathcal{W}(d)$, chaque $\alpha_i(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})$ est constante sur la feuille indexée par i. Ainsi, les éléments du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}^0$ peuvent être considérés comme les *"fonctions"* du d-tissu $\mathcal{W}(d)$ de codimension n de $(\mathbb{C}^N, 0)$ et pour $1 \leq p \leq n$ les éléments de $\mathcal{A}^p$ en sont alors les *"p-formes"*.

On a une suite exacte de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $0 \longrightarrow \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}^2$. Il suffit en effet d'utiliser l'hypothèse de position générale et le lemme usuel de Poincaré pour les formes différentielles construites à partir des dz_i sur $\mathbb{C}\{z\}$. Par conséquent les *groupes de cohomologie* du complexe $(\mathcal{A}^\bullet, \delta)$ s'identifient à $\mathbb{C}^d$ en degré 0 et sont nuls en degré 1.

Soit $\mathcal{D}$ l'anneau nœthérien à gauche (et à droite) des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans $\mathcal{O}$. On note encore $\mathcal{R}(d)$ le $\mathcal{D}$-module à gauche associé au système différentiel linéaire du même nom (*cf.* par exemple [G-M] pour l'étude de ces objets et la terminologie classique utilisée ci-dessous : symbole, variété caractéristique, multiplicité, *etc.*).

Pour $1 \leq q \leq d$ et sur le modèle du système $\mathcal{R}(d)$ on a un système différentiel linéaire $\mathcal{R}(q)$, construit à partir des champs de vecteurs donnant les q premières familles de feuilles du tissu $\mathcal{W}(d)$, dont on note également $\mathcal{R}(q)$ le $\mathcal{D}$-module à gauche associé.

En utilisant le lemme dit du serpent, on peut vérifier que l'on a pour $1 \leq q \leq d-1$ une suite exacte de $\mathcal{D}$-modules à gauche de type fini

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}/\Big(\mathfrak{X}_{q+1}, \bigcap_{i=1}^{q} \mathfrak{X}_i\Big) \longrightarrow \mathcal{R}(q+1) \longrightarrow \mathcal{R}(q) \longrightarrow 0 \tag{1}$$

où l'on désigne par

$$\mathfrak{X}_i = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_{N-n}})$$

l'idéal à gauche de $\mathcal{D}$ engendré par les champs de vecteurs X_{i_m} pour $1 \leq m \leq N-n$.

Cette suite exacte permet de passer de $\mathcal{R}(q)$ à $\mathcal{R}(q+1)$, *via* un idéal à gauche de $\mathcal{D}$ et par conséquent relie le d-tissu $\mathcal{W}(d)$ à ses tissus extraits. On va d'ailleurs montrer, essentiellement par récurrence sur q, comment en tirer parti bien que d'une manière générale la description explicite du $\mathcal{D}$-module

$$\mathcal{D}/\Big(\mathfrak{X}_{q+1}, \bigcap_{i=1}^{q} \mathfrak{X}_i\Big)$$

à partir des champs de vecteurs X_{i_m} reste à faire.

On a toujours $\mathcal{R}(1) = \mathcal{O}\,(= \mathcal{D}/(\partial_1, \ldots, \partial_N)$ en tant que $\mathcal{D}$-modules à gauche. Cependant et en général, le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{R}(d)$ n'est *pas holonome* ; il suffit de prendre par exemple $d = 2$, $N = 3$, $n = 2$ avec $\mathfrak{X}_1 = (\partial_1)$ et $\mathfrak{X}_2 = (\partial_2)$, c'est-à-dire le 2-tissu de $(\mathbb{C}^3, 0)$ défini par $\{x_2 = cste,\ x_3 = cste\}$ et $\{x_1 = cste,\ x_3 = cste\}$.

Par contre si $N = kn$, l'hypothèse de position générale va permettre de montrer que $\mathcal{R}(d)$ est holonome, et même une *connexion intégrable* ou *plate* ; autrement dit, on va démontrer que $\mathcal{R}(d) \simeq \mathcal{O}^{m(d)}$ en tant que $\mathcal{D}$-modules à gauche. De plus, dans ce cas et par récurrence sur d on majorera $m(d)$, c'est-à-dire ici la *multiplicité* du $\mathcal{D}$-module $\mathcal{R}(d)$ notée $\operatorname{mult}\mathcal{R}(d)$. Plus précisément, on obtiendra pour tout d-tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ de codimension n de $(\mathbb{C}^{kn}, 0)$ un invariant analytique de ce tissu, à savoir

$$r_0 := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}^0 = \operatorname{mult}\mathcal{R}(d)$$

puisque $\mathcal{A}^0$ s'identifie comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel à $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{R}(d),\mathcal{O})$. De plus, on va établir également une majoration, en fait optimale, de r_0.

La méthode présentée ci-dessous généralise le cas, traité en détail, des d-tissus $\mathcal{W}(d,k,1)$ de codimension 1 de $(\mathbb{C}^k,0)$(*cf.* [Hé2]).

On suppose *désormais* que $N = kn$ où $k \geq 2$.

Si $d = 1$ (resp. 2, ..., resp. k), le théorème d'inversion locale montre que le modèle local d'un tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ de codimension n de $(\mathbb{C}^{kn},0)$ est donné par les familles de $(k-1)n$-plans de $\mathbb{C}^{kn}$ suivantes :

$$\{x_1 = cste, \dots, x_n = cste\}$$

$$(\text{resp. } \{x_1 = cste, \dots, x_n = cste\} \quad \text{et} \quad \{x_{n+1} = cste, \dots, x_{2n} = cste\},$$

$$\dots$$

$$\text{resp. } \{x_1 = cste, \dots, x_n = cste\}, \dots, \{x_{(k-1)n+1} = cste, \dots, x_{kn} = cste\});$$

ce qui signifie que l'étude des configurations possibles pour les $\mathcal{W}(d,k,n)$ est intéressante dès que $d \geq k+1$.

On pose $\mathcal{O}[\xi] := \mathcal{O}[\xi_1,\dots,\xi_{kn}]$. Pour $1 \leq q \leq d$, soit $\mathcal{G}(q)$ le $\mathcal{O}[\xi]$-module gradué de présentation finie défini par la matrice des symboles associée au système différentiel linéaire $\mathcal{R}(q)$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} l_{1_1} & & & & l_{1_{(k-1)n}} & & & \xi_1 & \cdots & \xi_{kn} \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & l_{q_1} & & & & l_{q_{(k-1)n}} & \xi_1 & \cdots & \xi_{kn} \end{pmatrix}$$

où $l_{i_m} \in \mathcal{O}[\xi]$ est le symbole du champ de vecteurs X_{i_m}.

Pour $1 \leq i \leq d$, on désigne par

$$\mathfrak{a}_i = (l_{i_1}, \dots, l_{i_{(k-1)n}})$$

l'idéal de $\mathcal{O}[\xi]$ engendré par les formes linéaires l_{i_m} pour $1 \leq m \leq (k-1)n$. Par définition et pour $1 \leq i \leq d$, la variété des zéros de $\mathfrak{a}_i$ est la famille des n-plans de $\mathbb{C}^{kn}$ paramétrée par $(\mathbb{C}^{kn},0)$ qui sont, en fait, donnés par les normales $\Omega_i(x)$ du d-tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ pour x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{kn}$.

De nouveau grâce au lemme dit du serpent, la suite exacte (1) se laisse imiter et l'on obtient pour $1 \leq q \leq d-1$ une suite exacte de $\mathcal{O}[\xi]$-modules gradués de type fini

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}[\xi]/\Big(\mathfrak{a}_{q+1}, \bigcap_{i=1}^{q} \mathfrak{a}_i\Big) \longrightarrow \mathcal{G}(q+1) \longrightarrow \mathcal{G}(q) \longrightarrow 0. \tag{2}$$

De plus, on vérifie qu'il existe pour $1 \leq q \leq d$ un *morphisme surjectif*

$$\varphi(q) \,:\, \mathcal{G}(q) \longrightarrow gr\,\mathcal{R}(q)$$

de $\mathcal{O}\,[\xi]$-modules gradués de type fini où $gr\,\mathcal{R}(q)$ est le gradué associé au $\mathcal{D}$-module $\mathcal{R}(q)$, pour la graduation naturelle par le degré. On rappelle que pour cette dernière, on a l'identification habituelle $gr\,\mathcal{D} = \mathcal{O}\,[\xi]$. En particulier, $\varphi(q)$ est un *isomorphisme* si les champs de vecteurs X_{i_m} sont à coefficients constants pour $1 \leq i \leq q$ et $1 \leq m \leq (k-1)n$.

Avec la convention déjà utilisée dans l'introduction, soit

$$\pi_0(d,k,n) = d + \binom{n}{1}\cdot\{d-k\} + \binom{n+1}{2}\cdot\{d-2k+1\} + \binom{n+2}{3}\cdot\{d-3k+2\} + \cdots$$

où $\binom{n+l}{l+1} := \frac{(n+l)(n+l-1)\cdots n}{(l+1)!}\cdot$ L'expression ci-dessus se simplifie pour $k=2$ puisque l'on peut vérifier que

$$\pi_0(d,2,n) = \binom{d+n-1}{n+1} + 1\,.$$

En conservant l'ensemble des notations qui précèdent on a le résultat suivant :

Proposition 1. *Soit $\mathcal{W}(d,k,n)$ un d-tissu de codimension n de $(\mathbb{C}^{kn},0)$, alors $\mathcal{R}(d)$ et $\mathcal{O}^{\,\mathrm{mult}\,\mathcal{R}(d)}$ sont isomorphes en tant que $\mathcal{D}$-modules à gauche. En particulier, la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}^0 := Sol\,\mathcal{R}(d)$ est finie et l'on a pour $1 \leq q \leq d-1$*

$$\mathrm{mult}\,\mathcal{R}(q+1) = \mathrm{mult}\,\mathcal{R}(q) + \mathrm{mult}\,\mathcal{D}/\Big(\mathfrak{X}_{q+1}, \bigcap_{i=1}^{q}\mathfrak{X}_i\Big)\,.$$

De plus, on a la majoration optimale suivante :

$$r_0 := \dim_{\mathbb{C}}\mathcal{A}^0 = \mathrm{mult}\,\mathcal{R}(d) \leq \pi_0(d,k,n)\,.$$

Démonstration. Elle suit fidèlement les différentes étapes du cas $n=1$ (*cf.* [Hé2] pour des détails). Par récurrence sur d, grâce à l'hypothèse de position générale et la suite exacte (2) des $\mathcal{G}(q)$, on a

$$\sqrt{Ann\,\mathcal{G}(d)} = (\xi_1, \ldots, \xi_{kn})$$

puisque $\mathcal{G}(1) = \mathcal{O}\,(= \mathcal{O}\,[\xi]/(\xi_1, \ldots, \xi_{kn})$. Par récurrence sur d, les morphisme surjectifs $\varphi(q)$, la suite exacte (1) des $\mathcal{R}(q)$ et ce qui précède montrent que la variété caractéristique de $\mathcal{R}(d)$ est la section nulle. Ce qui prouve que $\mathcal{R}(d)$ et $\mathcal{O}^{\,\mathrm{mult}\,\mathcal{R}(d)}$ sont $\mathcal{D}$-isomorphes. La suite exacte (1) des $\mathcal{R}(q)$ et ce qui précède donnent alors la relation annoncée sur les multiplicités. On a les majorations suivantes :

$$\mathrm{mult}\,\mathcal{O}\,[\xi]/\Big(\mathfrak{a}_{q+1}, \bigcap_{i=1}^{q} \mathfrak{a}_i\Big) \leq \dim_{\mathbb{C}}\Big(\mathcal{O}\,[\xi]/(\mathfrak{a}_{q+1}, \bigcap_{i=1}^{q} \mathfrak{a}_i) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C}\Big) \leq \binom{n+\left[\frac{q-1}{k-1}\right]}{n}$$

où l'on désigne par $e = \left[\dfrac{q-1}{k-1}\right]$ le plus grand entier tel que $e \leq \dfrac{q-1}{k-1}$. La première majoration s'obtient par platitude générique et semi-continuité, la seconde est une conséquence de l'hypothèse de position générale. En effet, on peut supposer que l'on a $\mathfrak{a}_{q+1} = (\xi_{n+1}, \dots, \xi_{kn})$ et ainsi se restreindre à des idéaux de $\mathcal{O}\,[\xi_1, \dots, \xi_n]$. Puis, regrouper les normales Ω_i du tissu $\mathcal{W}(q+1,k,n)$ par paquets de $(k-1)$ en complétant par les restes éventuels de la manière suivante :

$$\Omega_{q+1}\,;\,\underbrace{\Omega_1, \dots, \Omega_{k-1}}_{1}\,;\,\underbrace{\Omega_k, \dots, \Omega_{2(k-1)}}_{2}\,;\,\dots\,;$$
$$\underbrace{\Omega_{(e-1)(k-1)+1}, \dots, \Omega_{e(k-1)}}_{e}\,;\,\underbrace{\Omega_{e(k-1)+1}, \dots, \Omega_q}_{e+1}$$

où $e = \left[\dfrac{q-1}{k-1}\right]\cdot$ La correspondance entre les idéaux $\mathfrak{a}_i$ et les normales Ω_i jointe à l'hypothèse de position générale imposent que chaque paquet numéroté $1, 2, \dots, e$ et celui $e+1$ contribuent *effectivement* à l'ensemble par l'idéal $(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Ce qui donne, par produit de ces idéaux, la seconde majoration ci-dessus puisque

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,[\xi_1, \dots, \xi_n]/(\xi_1, \dots, \xi_n)^{e+1} = \binom{n+e}{n}.$$

Par additivité des multiplicités et d'après la suite exacte (2) des $\mathcal{G}(q)$, on vérifie alors par récurrence sur d et ce qui précède que l'on a la majoration

$$\mathrm{mult}\,\mathcal{G}(d) \leq \pi_0(d,k,n)\,.$$

Enfin, l'existence du morphisme surjectif $\varphi(d)$ entraîne que

$$\mathrm{mult}\,\mathcal{R}(d) := \mathrm{mult}\,gr\,\mathcal{R}(d) \leq \mathrm{mult}\,\mathcal{G}(d)$$

ce qui donne la majoration de l'énoncé. De plus cette dernière est optimale. En effet, on verra dans le paragraphe 4 (*cf.* Proposition 4) qu'il existe des d-tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ formés de $(k-1)n$-plans parallèles de $\mathbb{C}^{kn}$ pour lesquels $r_0 = \pi_0(d,k,n)$; ces tissus correspondent à des cas particuliers où les champs de vecteurs X_{i_m} sont à coefficients constants pour $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq m \leq n$. Ce qui démontre la proposition. □

L'entier $r_0 := rg_0\mathcal{W}(d,k,n)$ défini ci-dessus est un invariant analytique du d-tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ de codimension n de $(\mathbb{C}^{kn},0)$ qui, par construction du système différentiel linéaire $\mathcal{R}(d)$, ne dépend pas du choix des F_{i_m} et que l'on appelle le 0-*rang* de ce tissu.

Remarque 1.

a) Pour les d-tissus $\mathcal{W}(d,k,1)$ la majoration optimale précédente est un résultat connu, *via* le théorème 1 qui suit (*cf.* [C1] ou par exemple [Hé2]) puisque dans cette situation on a une suite exacte de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^{\,d} \longrightarrow \mathcal{A}^0 \stackrel{\delta}{\longrightarrow} \mathcal{A}^1 \longrightarrow 0\,.$$

b) De même que dans [Hé2], on notera que, d'après la démonstration de la proposition 1, les normales $\Omega_i(x)$ pour x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{kn}$ d'un d-tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ de 0-rang maximal ont des propriétés géométriques particulières relativement à certains systèmes linéaires. En effet, dans ce cas on a pour $1 \leq q \leq d-1$

$$\dim_{\mathbb{C}}\Big(\mathcal{O}\,[\xi]/(\mathfrak{a}_{q+1}, \bigcap_{i=1}^{q} \mathfrak{a}_i) \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathbb{C}_x\Big) = \binom{n+\left[\frac{q-1}{k-1}\right]}{n}$$

et ce, pour chaque x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{kn}$ (*cf.* également [C-G2] et [Li]).

Toujours sous l'hypothèse $N = kn$, on va montrer que pour $1 \leq p \leq n$ les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathcal{A}^p$ formés par les relations abéliennes de degré p d'un tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ sont de dimension finie et donner des bornes pour ces dimensions.

Avec la convention déjà utilisée et pour $1 \leq p \leq n$, soit

$$\pi_p(d,k,n) = \binom{n}{p} \cdot \Bigg[\binom{n-1}{0} \cdot \{d-kp+p-1\}$$

$$+\binom{n}{1} \cdot \{d-k(p+1)+p\} + \binom{n+1}{2} \cdot \{d-k(p+2)+p+1\} + \cdots \Bigg]\,;$$

cette expression se simplifie pour $k=2$ puisque l'on peut vérifier que

$$\pi_p(d,2,n) = \binom{n}{p} \cdot \binom{d+n-p-1}{n+1},$$

en particulier $\pi_1(d,2,1) = \dfrac{1}{2}(d-1)(d-2)$. On notera que

$$\pi_1(d,k,1) = \{d-k\} + \{d-2k+1\} + \{d-3k+2\} + \cdots$$

est le nombre usuel de Castelnuovo déjà évoqué dans l'introduction et sur lequel on reviendra dans le paragraphe 4. De plus, on peut montrer que ces *nombres de Castelnuovo généralisés* $\pi_p(d,k,n)$ et $\pi_0(d,k,n)$ sont liés par la formule suivante :

$$d - \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \pi_p(d,k,n) = 0$$

ce qui n'est pas une surprise d'après le résultat qui suit sur le complexe $(\mathcal{A}^\bullet, \delta)$. Cette formule généralise la relation classique suivante (obtenue pour $k = 2$) :

$$d - 1 = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \binom{n}{p} \cdot \binom{d+n-p-1}{n+1}.$$

La proposition 1 se complète ainsi :

Théorème 1. *Soit $\mathcal{W}(d,k,n)$ un d-tissu de codimension n de $(\mathbb{C}^{kn},0)$. Le complexe $(\mathcal{A}^\bullet,\delta)$ des relations abéliennes du tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ est formé de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie avec les majorations optimales suivantes pour $0 \leq p \leq n$:*

$$r_p := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}^p \leq \pi_p(d,k,n)\,.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente on se restreint au cas où $1 \leq p \leq n$. On va introduire des variantes de la méthode de Poincaré–Blaschke (*cf.* au moins [B-B] et [C-G1]). Soit $\big(\alpha^j_{I_i}(F_{i_1},\dots,F_{i_n})\big)_{1\leq i\leq d,\,|I_i|=p,\,1\leq j\leq r_p}$ une famille libre d'éléments de $\mathcal{A}^p$; on va montrer que $r_p \leq \pi_p(d,k,n)$. On a $\binom{n}{p}\,.\,d$ germes d'applications

$$Z_{I_i} : (\mathbb{C}^{kn},0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{r_p}, Z_{I_i}(0))$$

dont le rang est au plus n en posant abusivement

$$Z_{I_i}(x) = \big(\alpha^1_{I_i}(F_{i_1},\dots,F_{i_n}),\dots,\alpha^{r_p}_{I_i}(F_{i_1},\dots,F_{i_n})\big).$$

Par définition ces germes sont liés, pour x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{kn}$, par la relation vectorielle

$$\sum_{1\leq i\leq d,\,|I_i|=p} Z_{I_i}(x)\, dF_{I_i}(x) = 0\,.$$

On considère la suite croissante de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{r_p}$ engendrés par les espaces osculateurs des germes définis par les Z_{I_i}, c'est-à-dire

$$\{Z_{I_i}(x)\} = \mathbb{C}^{N_0(x)}(x) \quad \text{où} \quad |\, I_i \,| = p \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{C}}\{Z_{I_i}(x)\} = N_0(x)$$

et plus brièvement

$$\{Z_{I_i}(x)\,;\partial_l(Z_{I_i})(x)\} = \mathbb{C}^{N_1(x)}(x) \quad \text{où, de plus l'on a} \quad 1 \le l \le kn\,,$$

$$\{Z_{I_i}(x)\,;\partial_l(Z_{I_i})(x)\,;\partial_t\partial_u(Z_{I_i})(x)\} = \mathbb{C}^{N_2(x)}(x),\ etc.$$

En utilisant l'hypothèse de position générale et par des dérivations successives

$$\text{modulo}\,\{Z_{I_i}(x)\}\ (\text{resp. modulo}\,\{Z_{I_i}(x)\,;\partial_l(Z_{I_i})(x)\},\ etc.)$$

de la relation vectorielle précédente, on va vérifier que la suite croissante des sous-espaces osculateurs est stationnaire. Plus précisément, on va montrer que l'ordre de ces sous-espaces s'épuise et que l'on a

$$N_0(x) \le N_1(x) \le \cdots \le N_s(x) = N_{s+1}(x) = \cdots$$

pour $s = s(p\,;d,k,n)$ convenable. D'après l'analycité et par semi-continuité, on a $\mathbb{C}^{N_s(x)}(x) = \mathbb{C}^{N_s(0)}(0)$ pour x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{kn}$. Ce qui montre que l'on a nécessairement $\mathbb{C}^{N_s(0)}(0) = \mathbb{C}^{r_p}$ puisque par hypothèse la famille $\left(\alpha^j_{I_i}(F_{i_1},\dots,F_{i_n})\right)_{1\le i\le d,\,|I_i|=p,\,1\le j\le r_p}$ est libre. Il suffit donc, pour conclure, de montrer par définition des nombres de Castelnuovo généralisés $\pi_p(d,k,n)$ que l'on a pour $v \ge 0$, les majorations suivantes :

$$N_v(x) \le \binom{n}{p}\cdot\sum_{j=0}^{v}\binom{n+j-1}{j}\cdot\{d-k(p+j)+p+j-1\}\,.$$

En fait, comme on va le voir ci-dessous, les $\binom{n+j-1}{j}$ correspondent aux choix minimaux nécessaires pour engendrer les dérivations à l'ordre j des sous-espaces osculateurs. Simultanément, le passage de $N_v(x)$ à $N_{v+1}(x)$ s'effectue par des "sauts" de longueur $(k-1)$, rendus possibles grâce à l'hypothèse de position générale *via* des mineurs $(k-1)n \times (k-1)n$ inversibles et ce, à concurrence de $s = \left\{\left[\dfrac{d-kp+p-2}{k-1}\right]\right\}$. D'après l'hypothèse de position générale, on peut supposer que les k premières familles de feuilles du tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ sont données par les fonctions suivantes :

$$F_{1_1} = x_1,\dots,F_{1_n} = x_n\,;\dots;F_{k_1} = x_{(k-1)n+1},\dots,F_{k_n} = x_{kn}\,.$$

Pour $p = 1$ et abusivement, quant aux notations précédentes, on a

$$\{Z_{I_i}\} = \{Z_{I_1}\,;\dots;Z_{I_d}\} = \{Z_{1_1},\dots,Z_{1_n}\,;\dots;Z_{d_1},\dots,Z_{d_n}\}$$

avec la relation vectorielle

$$\sum_{i=1}^{d} Z_{i_1} dF_{i_1} + \cdots + Z_{i_n} dF_{i_n} = 0\,.$$

Les kn relations entre les $Z_{i_m} = Z_{i_m}(F_{i_1}, \cdots, F_{i_m})$, obtenues par la relation vectorielle précédente, correspondent au système suivant :

$$(0_1)\quad \begin{cases} Z_{1_1} & + & Z_{(k+1)_1}\partial_1(F_{(k+1)_1}) & + & \cdots & + & Z_{d_n}\partial_1(F_{d_n}) & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ Z_{1_n} & + & Z_{(k+1)_1}\partial_n(F_{(k+1)_1}) & + & \cdots & + & Z_{d_n}\partial_n(F_{d_n}) & = & 0 \\ Z_{2_1} & + & Z_{(k+1)_1}\partial_{n+1}(F_{(k+1)_1}) & + & \cdots & + & Z_{d_n}\partial_{n+1}(F_{d_n}) & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ Z_{k_n} & + & Z_{(k+1)_1}\partial_{kn}(F_{(k+1)_1}) & + & \cdots & + & Z_{d_n}\partial_{kn}(F_{d_n}) & = & 0 \end{cases}$$

qui montre que l'on a $\{Z_{I_i}\} = \{Z_{(k+1)_1}, \ldots, Z_{(k+1)_n}\,; \ldots ; Z_{d_1}, \ldots, Z_{d_n}\}$ et donne la majoration $N_0(x) \leq n \cdot \{d-k\}$. Par dérivation modulo $\{Z_{I_i}\}$, on a d'après ce qui précède

$$\{Z_{I_i}\,; \partial_l(Z_{I_i})\} = \{Z_{I_i}\,; \partial_l(Z_{(k+1)_1}), \ldots, \partial_l(Z_{(k+1)_n})\,; \ldots ; \partial_l(Z_{d_1}), \ldots, \partial_l(Z_{d_n})\}\,.$$

On peut supposer de plus, d'après l'hypothèse de position générale et ce qui précède que pour $i \geq k+1$, les $(k-1)n$ champs de vecteurs X_{i_m} de $(\mathbb{C}^{kn}, 0)$ définissant la i-ième famille de feuilles du d-tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ sont de la forme suivante :

$$(X_{i_m})\quad \begin{cases} \partial_{n+1} + A_{i,n+1,1}\partial_1 + \cdots + A_{i,n+1,n}\partial_n \\ \qquad\qquad\vdots \\ \partial_{kn} + A_{i,kn,1}\partial_1 + \cdots + A_{i,kn,n}\partial_n\,. \end{cases}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \{Z_{I_i}\,; \partial_l(Z_{I_i})\} = \big\{Z_{I_i}\,; & \partial_1(Z_{(k+1)_1}), \ldots, \partial_1(Z_{(k+1)_n})\,; \ldots ; \partial_1(Z_{d_1}), \ldots, \partial_1(Z_{d_n})\,; \\ & \ldots ; \partial_n(Z_{(k+1)_1}), \ldots, \partial_n(Z_{(k+1)_n})\,; \ldots ; \partial_n(Z_{d_1}), \ldots, \partial_n(Z_{d_n})\big\} \end{aligned}$$

puisque $X_{i_m}(Z_{i_m}) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$. De plus, on a supposé que

$$Z_{1_m} = Z_{1_m}(x_1, \ldots, x_n)\,; \quad Z_{2_m} = Z_{2_m}(x_{n+1}, \ldots, x_{2n})\,; \ldots ;$$
$$Z_{k_m} = Z_{k_m}(x_{(k-1)n+1}, \ldots, x_{kn})$$

ce qui montre, en appliquant ∂_1 (resp. $\partial_2, \ldots, \partial_n$), modulo $\{Z_{I_i}\}$ aux $(k-1)n$ dernières relations du système (0_1) et grâce à l'hypothèse de position générale, *via* un déterminant $(k-1)n \times (k-1)n$ inversible, que l'on a

$$\{Z_{I_i}\,;\partial_l(Z_{I_i})\} = \{Z_{I_i}\,;\partial_1(Z_{(2k)_1}), \ldots, \partial_1(Z_{(2k)_n})\,; \ldots\,; \partial_1(Z_{d_1}), \ldots, \partial_1(Z_{d_n})\,; \ldots\,;$$

$$\partial_n(Z_{(2k)_1}), \ldots, \partial_n(Z_{(2k)_n})\,; \ldots\,; \partial_n(Z_{d_1}), \ldots, \partial_n(Z_{d_n})\}\,.$$

Ce qui donne la majoration

$$N_1(x) \leq n \cdot \big[\{d-k\} + n \cdot \{d-2k+1\}\big]\,.$$

Les dérivations précédentes effectuées dans le système (0_1) et les formules de Cramer conduisent à exactement n systèmes de $(k-1)n$ équations reliant les

$$\partial_1(Z_{(k+1)_1}), \ldots, \partial_1(Z_{(k+1)_n})\,; \ldots\,; \partial_1(Z_{(2k-1)_1}), \ldots, \partial_1(Z_{(2k-1)_n}) \text{ modulo}\,\{Z_{I_i}\}$$

aux $\partial_1(Z_{(2k+h)_m})$ pour $h \geq 0$ et $1 \leq m \leq n$, de même avec les dérivations $\partial_2, \ldots, \partial_n$. Or $X_{(k+j)_m}\big(\partial_\mu(Z_{(k+j)_m})\big) = 0$ modulo $\{Z_{I_i}\,;\partial_l(Z_{I_i})\}$ pour $1 \leq m\,,\ \mu \leq n$ et $1 \leq k+j \leq d$, ce qui montre en appliquant pour $1 \leq j \leq k-1$ les champs de vecteurs $X_{(k+j)_m}$ aux systèmes précédents modulo $\{Z_{I_i}\,;\partial_l(Z_{I_i})\}$ et en utilisant de nouveau l'hypothèse de position générale *via* des déterminants inversibles convenables ainsi que la forme particulière des X_{i_m} pour $i \geq k+1$ que l'on a

$$\{Z_{I_i}\,;\partial_l(Z_{I_i})\,;\partial_t\partial_u(Z_{I_i})\} = \{Z_{I_i}\,;\partial_l(Z_{I_i})\,;$$

$$\partial_1^2(Z_{(3k-1)_1}), \ldots, \partial_1^2(Z_{(3k-1)_n})\,; \ldots\,; \partial_1^2(Z_{d_1}), \ldots, \partial_1^2(Z_{d_n})\,;$$

$$\partial_1\partial_2(Z_{(3k-1)_1}), \ldots, \partial_1\partial_2(Z_{(3k-1)_n})\,; \ldots\,; \partial_1\partial_2(Z_{d_1}), \ldots, \partial_1\partial_2(Z_{d_n})\,; \ldots\,;$$

$$\partial_n^2(Z_{(3k-1)_1}), \ldots, \partial_n^2(Z_{(3k-1)_n})\,; \ldots\,; \partial_n^2(Z_{d_1}), \ldots, \partial_n^2(Z_{d_n})\}\,.$$

Ce qui donne la majoration

$$N_2(x) \leq n \cdot \left[\binom{n-1}{0} \cdot \{d-k\} + \binom{n}{1} \cdot \{d-2k+1\} + \binom{n+1}{2} \cdot \{d-3k+2\}\right].$$

Ce procédé se poursuit, puis s'épuise et donne ainsi la majoration annoncée pour $p = 1$. On remarquera que, de proche en proche, *tous* les champs de vecteurs X_{i_m} sont sollicités.

On peut vérifier que cette méthode s'adapte pour $2 \leq p \leq n$; la relation vectorielle entre les $\{Z_{I_i}\}$ pour $\mid I_i \mid = p$ donne un système (0_p) de $\binom{kn}{p}$ équations. Les coefficients de ces dernières ne sont pas tous simultanément nuls ; en effet ce sont des mineurs d'une matrice convenable et les relations quadratiques classiques de Plücker (*cf.* par exemple [K-L]) jointes à l'hypothèse de position générale permettent de poursuivre les calculs par dérivation dans le système (0_p), comme ci-dessus. Enfin, les majorations obtenues sont optimales. En effet, on verra grâce à la proposition 4 qu'il existe des d-tissus $\mathcal{W}(d,k,n)$ formés de $(k-1)n$-plans parallèles de $\mathbb{C}^{kn}$ tels que $r_p = \pi_p(d,k,n)$ pour $0 \leq p \leq n$. Ce qui démontre le théorème. $\square$

Pour $0 \leq p \leq n$ on vérifie, notamment à l'aide des précisions données au début de ce paragraphe, que chaque entier $r_p := rg_p\mathcal{W}(d,k,n)$ défini ci-dessus est un invariant analytique du d-tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ de codimension n de $(\mathbb{C}^{kn},0)$ qui ne dépend pas du choix des F_{i_m} et que l'on appelle le *p-rang* de ce tissu. Par définition des nombres de Castelnuovo généralisés $\pi_p(d,k,n)$, on notera que les majorations du théorème 1 montrent que pour $1 \leq p \leq n$ on a $r_p = 0$ dès que $1 \leq d \leq (k-1)p+1$.

Remarque 2.

a) Les majorations obtenues ci-dessus pour $0 \leq p \leq n$ sont probablement vraies dans le cadre C^∞ où les méthodes précédentes, convenablement adaptées, doivent pouvoir s'appliquer ; c'est en particulier le cas pour les tissus $\mathcal{W}(d,k,1)$ d'après un travail non publié de R. L. Bryant.

b) Pour $p = n$, la majoration établie ci-dessus est due à S. S. Chern et P. A. Griffiths (*cf.* [C-G2]). Pour cette majoration, les auteurs utilisent (*cf.* également [C-G1], pour des détails dans le cas $n = 1$) la méthode de Poincaré–Blaschke avec des changements de variables successifs, alors qu'ici l'on a préféré *systématiquement* “dériver” les systèmes (0_p).

c) L'existence de tissus $\mathcal{W}(d,k,1)$ de 1-rang maximal est un résultat de S. S. Chern (*cf.* [C1]). Plus généralement, l'existence de tissus $\mathcal{W}(d,k,n)$ de n-rang maximal sera une conséquence des résultats du paragraphe 4 et du travail de J. Harris sur les variétés dites de Castelnuovo (*cf.* [H]). On verra dans la proposition 4 que les exemples proposés de tissus $\mathcal{W}(d,k,n)$ de p-rang maximal pour $0 \leq p \leq n$ sont liés à la géométrie d'arrangements particuliers de n-plans de $\mathbb{P}^{n+k-1}$. Cependant, la caractérisation pour $0 \leq p \leq n$ des tissus $\mathcal{W}(d,k,n)$ de p-rang maximal est un problème très largement ouvert, même dans le cas où $p = n$, et qui généralise des questions déjà proposées par S. S. Chern dans [C2].

Les résultats précédents seront appliqués dans le paragraphe 4 ; on verra notamment qu'ils jouent un rôle déterminant dans les questions générales d'*algébrisation* des tissus. Cependant pour terminer ce paragraphe, voici déjà une utilisation des rangs.

Le 1-rang caractérise les $(k+1)$-tissus de codimension n de $(\mathbb{C}^{kn},0)$ qui sont *parallélisables*. En effet, on vérifie comme pour les tissus $\mathcal{W}(3,2,n)$ (*cf.* [Hé4]) que l'on a la proposition suivante :

Proposition 2. *Soit* $\mathcal{W}(k+1,k,n)$ *un* $(k+1)$*-tissu de codimension* n *de* $(\mathbb{C}^{kn},0)$*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $rg_1\mathcal{W}(k+1,k,n)=n$ *(i.e. le* 1*-rang de* $\mathcal{W}(k+1,k,n)$ *est maximal) ;*

ii) $\mathcal{W}(k+1,k,n)$ *est parallélisable, c'est-à-dire à un isomorphisme analytique de* $(\mathbb{C}^{kn},0)$ *près, le* $(k+1)$*-tissu* $\mathcal{W}(k+1,k,n)$ *est défini par les familles de* $(k-1)n$*-plans de* $\mathbb{C}^{kn}$ *suivantes :*

$$\{x_1=cste,\dots,x_n=cste\},\dots,\{x_{(k-1)n+1}=cste,\dots,x_{kn}=cste\}$$

$$et\quad \{x_1+x_{n+1}+\cdots+x_{(k-1)n+1}=cste,\dots,x_n+x_{2n}+\cdots+x_{kn}=cste\}\,.$$

3. Rappels et compléments sur les p-formes différentielles abéliennes d'une variété algébrique projective

Soit V_n une variété algébrique réduite de $\mathbb{P}^{n+k-1}$ de dimension *pure* n, non nécessairement irréductible, éventuellement singulière et de degré d. On s'intéresse, dans ce paragraphe et le suivant, aux éléments du complexe

$$\big(H^0(V_n,\omega^\bullet_{V_n}),d\big)$$

où les $\omega^\bullet_{V_n}$ sont les faisceaux de Barlet de V_n et d la différentielle usuelle. Ce complexe est formé de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie ; on l'appelera *le complexe des formes différentielles abéliennes* de la variété algébrique $V_n\subset\mathbb{P}^{n+k-1}$. On va en donner quelques propriétés, des exemples et notamment justifier la terminologie adoptée.

Auparavant, et avec les notations déjà utilisées dans l'introduction, on fait quelques rappels sur les propriétés caractéristiques des sections locales des faisceaux de Barlet $\omega^\bullet_X$ où $(X,\mathcal{O}_X)$ est un espace analytique complexe réduit de dimension pure n (*cf.* essentiellement [Ba1]). On suppose *désormais* que X est localement un revêtement ramifié de U contenu dans $Z=U\times\mathbb{C}^{k-1}$ et de degré d, où U est un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n$; on note par $\pi_0:X\longrightarrow U$ le morphisme propre, fini et surjectif induit par la première projection. Une telle situation locale existe toujours pour le germe (X,x) en vertu du théorème de paramétrisation locale, mais l'on ne suppose pas nécessairement que $\pi_0^{-1}(0)=\{x\}$ si $0\in U$. Si S est le lieu singulier de X, on a $X-\pi_0^{-1}(R_{\pi_0})\subseteq X-S$ où $R_{\pi_0}\subseteq U$ est le lieu de ramification de π_0. D'après ce qui précède, pour $0\le p\le n$ et toute section locale $\omega\in j_*j^*\Omega^p_X$ où $j:X-S\longrightarrow X$ est l'injection naturelle, on obtient une p-forme holomorphe sur $U-R_{\pi_0}$, après recollement naturel, en posant

$$\mathrm{Trace}_{\pi_0}(\omega):=\sum_{i=1}^{d}{\xi_i}^*(\omega)$$

où les ξ_i sont d branches locales sur Y relevant π_0 et obtenues par trivialisation. De plus, si $u = (u_{\alpha,\beta})$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire voisine de $0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n+k-1}, \mathbb{C}^n)$, on peut également définir comme précédemment, une p-forme holomorphe $\mathrm{Trace}_{\pi_u}(\omega)$ en dehors du lieu de ramification de $\pi_u = \pi_0 + u$.

Soient $\omega = \dfrac{v}{g}$ une p-forme différentielle méromorphe sur X où $v \in \Omega^p_X$ et g est nulle sur S sans être un diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_X$, et φ une $(n-p,n)$-forme C^∞ à support compact dans Z. Un résultat dû à M. Herrera et D. Lieberman (*cf.* [H-L]) montre que l'application

$$\varphi \longmapsto \lim_{\epsilon \to 0} \int_{X \cap \{|g| > \epsilon\}} \omega \wedge \varphi$$

définit un courant, dit *valeur principale* associée à $\omega = \dfrac{v}{g}$, qui ne dépend que de ω et X, et que l'on notera $\omega \wedge [X]$ comme dans [H-P] ; ce courant n'est pas nécessairement $\bar\partial$-fermé. Par contre, on sait que la p-forme v définit, par intégration sur $X - S$, un courant

$$\varphi \longmapsto \int_{X-S} v \wedge \varphi$$

qui est toujours $\bar\partial$-fermé, d'après la formule de Stokes.

Les résultats suivants rappellent en partie ceux déjà cités dans l'introduction et sont complétés par différentes caractérisations des sections locales des $\omega^\bullet_X$ (*cf.* [Ba1] pour l'essentiel, [Ba3] en complément et également [Bj]):

Théorème (Barlet). *Avec les notations qui précèdent, soit $0 \le p \le n$. Il existe un sous-faisceau ω^p_X de $j_* j^* \Omega^p_X$ qui s'identifie à Ω^p_X aux points lisses de X, est $\mathcal{O}_X$-cohérent et sans-torsion ; de plus, les $\omega^\bullet_X$ sont stables par la différentielle extérieure d et par produit extérieur par les $\Omega^\bullet_X$. En outre, pour une section locale $\omega \in j_* j^* \Omega^p_X$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\omega \in \omega^p_X$;

ii) $\mathrm{Trace}_{\pi_0}(v \wedge \omega)$ *admet un prolongement holomorphe unique pour toute q-forme $v \in \Omega^q_X$ et tout $0 \le q \le n-p$;*

iii) $\mathrm{Trace}_{\pi_u}(\omega)$ *admet un prolongement holomorphe unique pour toute $u = (u_{\alpha,\beta})$ voisine de $0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n+k-1}, \mathbb{C}^n)$;*

iv) *ω est une p-forme différentielle méromorphe sur X, à pôles contenus dans S et qui se prolonge à X tout entier comme courant $\bar\partial$-fermé.*

v) $\omega = \dfrac{v}{g}$ *où $v \in \Omega^p_X$ et g est nulle sur S ($g = 1$ si $S = \emptyset$) sans être un diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_X$, et le courant valeur principale $\omega \wedge [X]$ est $\bar\partial$-fermé.*

De plus, le résultat suivant (*cf.* [Ba1]) sera également utile : *Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions analytiques sur Z, nulles sur X et qui donnent génériquement sur X des équations réduites de X dans Z. Alors les produits extérieurs induisent pour*

$0 \leq p \leq n$, *une suite exacte de faisceaux $\mathcal{O}_X$-cohérents :*

$$0 \longrightarrow \omega_X^p \xrightarrow{\wedge \mathbf{c}} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Z}^{k-1}(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^{p+k-1}) \xrightarrow{(\wedge df_i)} \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Z}^{k-1}(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^{p+k})$$

où $\mathbf{c} = c_X^Z \in \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Z}^{k-1}(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^{k-1})$ *est la classe fondamentale de* X *dans* Z (*cf.* [Ba2]). Cette suite exacte donne en particulier *l'identification* suivante :

$$\omega_X^n = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Z}^{k-1}(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^{n+k-1}).$$

La description des sections globales $H^0(V_n, \omega_{V_n}^p)$ des faisceaux de Barlet pour les variétés algébriques réduites $V_n \subset \mathbb{P}^{n+k-1}$ de dimension pure n, c'est-à-dire l'espace des p-formes différentielles abéliennes de V_n, est une question naturelle, notamment en regard des éventuelles singularités de V_n ; on examine ci-dessous quelques cas particuliers.

Exemples. 1) Soit $V_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface algébrique réduite de degré d et d'équation affine

$$f(s) := f(s_1, \ldots, s_n, s_{n+1}) = 0 \quad \text{avec} \quad \partial_{n+1}(f) \neq 0\,.$$

D'après ce qui précède et localement, $\omega \in \omega_{V_n}^n$ si et seulement si l'on a

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = \frac{\psi}{f} \quad \text{où} \quad \psi = r(s)\, ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_{n+1} \in \Omega_{\mathbb{P}^{n+1}}^{n+1}\,,$$

soit $\omega = r(s)\dfrac{ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_n}{\partial_{n+1}(f)}$ où $r \in \mathcal{O}_{V_n}$; de plus, pour obtenir des sections globales de $\omega_{V_n}^n$, l'élément r sera nécessairement un polynôme de $\mathbb{C}[s] := \mathbb{C}[s_1, \ldots, s_{n+1}]$ dont le degré devra vérifier la majoration suivante : $\deg r \leq \deg f - n - 2 = d - n - 2$. En effet, *via* les différents changements de cartes du type $(s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}) \longmapsto \left(\dfrac{1}{s_1}, \dfrac{s_2}{s_1}, \ldots, \dfrac{s_{n+1}}{s_1}\right)$ la $(n+1)$-forme $\dfrac{\psi}{f}$ doit rester à pôles *uniquement* sur V_n. Ce qui impose la majoration ci-dessus sur les degrés. Autrement dit, l'espace $H^0(V_n, \omega_{V_n}^n)$ des n-formes différentielles abéliennes de $V_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ est engendré sur $\mathbb{C}$ par

$$r(s)\frac{ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_n}{\partial_{n+1}(f)} \quad \text{où} \quad r \in \mathbb{C}[s] \quad \text{et} \quad \deg r \leq d - n - 2\,.$$

Ce qui montre que l'on a $\dim_{\mathbb{C}} H^0(V_n, \omega_{V_n}^n) = \dbinom{d-1}{n+1}$. On notera que l'espace des sections globales de $\omega_{V_n}^n$ *"ignore"* les éventuelles singularités de V_n ; de plus, cet espace est exactement constitué des n-formes rationnelles sur V_n appelées de *première espèce relativement aux droites de* $\mathbb{P}^{n+1}$ par P.A. Griffiths dans [G1] et sur lesquelles on reviendra.

2) Si dans la situation de l'exemple précédent, on suppose que $n = 1$ alors $V_1 \subset \mathbb{P}^2$ est une courbe algébrique réduite de degré d et l'on a

$$H^0(V_1, \omega^1_{V_1}) = \left\{ r(s) \frac{ds_1}{\partial_2(f)} \quad \text{où} \quad r \in \mathbb{C}\,[s] \quad \text{et} \quad \deg r \leq \deg f - 3 \right\} ;$$

c'est-à-dire que l'on retrouve l'espace des 1-formes du théorème d'annulation classique d'Abel (*cf.* [A] et [G1]) dont la dimension est $\dfrac{1}{2}(d-1)(d-2)$ où $d = \deg f$. De plus et localement, $\omega \in \omega^0_{V_1}$ si et seulement si l'on a

$$\omega \frac{df}{f} = \frac{\psi}{f} \quad \text{où} \quad \psi = \alpha\, ds_1 + \beta\, ds_2 \in \Omega^1_{\mathbb{P}^2} \quad \text{est telle que} \quad \psi \wedge df \in (f).\,\Omega^2_{\mathbb{P}^2} ,$$

soit $\omega = \dfrac{\beta(s)}{\partial_2(f)}$ avec l'existence d'un couple $(\alpha,\, \beta) \in \mathcal{O}^2_{V_1}$ vérifiant la relation

$$\alpha\, \partial_2(f) - \beta\, \partial_1(f) \equiv 0 \quad \text{modulo}\,(f)\,.$$

Naturellement les constantes appartiennent *toujours* à $H^0(V_1, \omega^0_{V_1})$; pour obtenir d'autres sections globales de $\omega^0_{V_1}$, la relation précédente doit être vérifiée pour $(\alpha,\, \beta) \in \mathbb{C}\,[s]^{\,2}$ et en outre les changements de cartes utilisés auparavant imposent que l'on ait

$$\deg \alpha\, (\text{resp. } \deg \beta) \leq \deg f - 1 \quad \text{si} \quad \alpha\, s_1 + \beta\, s_2 = 0$$

ou

$$\deg \alpha\, (\text{resp. } \deg \beta) \leq \deg f - 2 \quad \text{sinon.}$$

Ainsi dans tous les cas, on a la majoration suivante : $\dim_{\mathbb{C}} H^0(V_1, \omega^0_{V_1}) \leq \dbinom{d}{2} + 1$ où $d = \deg f$. De plus, les bornes précédentes sont optimales ; prendre par exemple $f(s_1, s_2) = s_2^d - 1$.

3) Si dans la situation de l'exemple initial, on suppose que $n = 2$ alors $V_2 \subset \mathbb{P}^3$ est une surface algébrique réduite de degré d et l'on a

$$H^0(V_2, \omega^2_{V_2}) = \left\{ r(s) \frac{ds_1 \wedge ds_2}{\partial_3(f)} \quad \text{où} \quad r \in \mathbb{C}\,[s] \quad \text{et} \quad \deg r \leq \deg f - 4 \right\}$$

dont la dimension est $\dfrac{1}{6}(d-1)(d-2)(d-3)$ où $d = \deg f$. De plus et localement, $\omega \in \omega^0_{V_2}$ si et seulement si l'on a

$$\omega \frac{df}{f} = \frac{\psi}{f} \quad \text{où} \quad \psi = \alpha\, ds_1 + \beta\, ds_2 + \gamma\, ds_3 \in \Omega^1_{\mathbb{P}^3} \quad \text{est telle que} \quad \psi \wedge df \in (f).\,\Omega^2_{\mathbb{P}^3} ,$$

soit $\omega = \dfrac{\gamma(s)}{\partial_3(f)}$ avec l'existence d'un triplet $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in \mathcal{O}^3_{V_2}$ vérifiant les trois relations

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\, \partial_2(f) - \beta\, \partial_1(f) \equiv 0 \\ \gamma\, \partial_1(f) - \alpha\, \partial_3(f) \equiv 0 \\ \beta\, \partial_3(f) - \gamma\, \partial_2(f) \equiv 0 \end{array}\right\} \text{modulo}\,(f)\,.$$

Comme auparavant, outre les constantes les sections globales de $\omega^0_{V_2}$ correspondent à l'existence de triplets $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in \mathbb{C}\,[s]^{\,3}$ vérifiant les relations précédentes et assujettis, *via* les changements de cartes déjà utilisés, à des conditions supplémentaires portant sur les degrés. Ce qui permet, en particulier, de montrer que l'on a la majoration suivante : $\dim_{\mathbb{C}} H^0(V_2, \omega^0_{V_2}) \leq \dbinom{d+1}{3} + 1$ où $d = \deg f$. Enfin localement, $\omega \in \omega^1_{V_2}$ si et seulement si l'on a

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = \frac{\psi}{f} \quad \text{où} \quad \psi = r_3\, ds_1 \wedge ds_2 - r_2\, ds_1 \wedge ds_3 + r_1\, ds_2 \wedge ds_3 \in \Omega^2_{\mathbb{P}^3}$$

est telle que $\psi \wedge df \in (f).\Omega^3_{\mathbb{P}^3}$, soit $\omega = \dfrac{r_1\, ds_2 - r_2\, ds_1}{\partial_3(f)}$ avec l'existence d'un triplet $(r_1,\, r_2,\, r_3) \in \mathcal{O}^3_{V_2}$ vérifiant la relation

$$r_1\, \partial_1(f) + r_2\, \partial_2(f) + r_3\, \partial_3(f) \equiv 0 \quad \text{modulo}\,(f)\,.$$

Ce qui permet, tout comme auparavant, de montrer que l'on a la majoration suivante : $\dim_{\mathbb{C}} H^0(V_2, \omega^1_{V_2}) \leq 2 \cdot \dbinom{d}{3}$ où $d = \deg f$. De plus, toutes les bornes précédentes sont optimales ; prendre par exemple $f(s_1, s_2, s_3) = s_3^d - 1$. On retrouve également que l'on a $H^0(V_2, \omega^1_{V_2}) = 0$ si $V_2 \subset \mathbb{P}^3$ est une surface algébrique *lisse*. En effet dans ce cas, tout élément de $H^0(V_2, \omega^1_{V_2})$ est d-fermé d'après un résultat de W. V. D. Hodge ; il suffit alors d'utiliser la relation entre les r_i imposée ci-dessus et les contraintes de degrés jointes à la propriété que les dérivées partielles de l'homogénéisée de f forment une suite régulière de $\mathbb{C}\,[X_0, X_1, X_2, X_3]$.

Soit $V_n \subset \mathbb{P}^{n+k-1}$ une variété algébrique réduite de dimension *pure* n, non nécessairement irréductible, éventuellement singulière et de degré d. Un $(k-1)$-plan générique $\mathbb{P}^{k-1}(0) \in G(k-1, \mathbb{P}^{n+k-1})$ coupe transversalement V_n en d points lisses distincts $p_i(0)$. Dans un système convenable de coordonnées, on a d branches locales

$$p_i = (F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}, \xi_{i_1}(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}), \ldots, \xi_{i_{k-1}}(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}))$$

sur $G(k-1, \mathbb{P}^{n+k-1})$ où

$$\mathbb{P}^{k-1}(x) \cap V_n = \sum_{i=1}^{d} p_i(x) \quad \text{en tant que 0-cycles de } V_n\ ;$$

avec précisément des sous-espaces linéaires $\mathbb{P}^{k-1}(x)$ de $\mathbb{P}^{n+k-1}$ définis par

$$\mathbb{P}^{k-1}(x) \quad \begin{cases} s_1 &= x_1 + t_1 . x_{n+1} + \cdots + t_{k-1} . x_{(k-1)n+1} \\ \vdots & \\ s_n &= x_n + t_1 . x_{2n} + \cdots + t_{k-1} . x_{kn} \end{cases}$$

où pour $1 \leq m \leq n$ et *implicitement* à partir des éléments $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_{k-1}}$ de $\mathbb{C}\{z\}$ on a

$$\begin{aligned} F_{i_m}(x) = x_m &+ \xi_{i_1}\big(F_{i_1}(x), \ldots, F_{i_n}(x)\big) . x_{n+m} + \cdots \\ &+ \xi_{i_{k-1}}\big(F_{i_1}(x), \ldots, F_{i_n}(x)\big) . x_{(k-1)n+m} . \end{aligned}$$

Soit $\omega \in H^0(V_n, \omega^p_{V_n})$ où $0 \leq p \leq n$, d'après l'une des propriétés des p-faisceaux de Barlet énoncée dans l'introduction, on a

$$\mathrm{Trace}(\omega) := \sum_{i=1}^{d} p_i^*(\omega) = \begin{cases} cste & \text{si} \quad p = 0 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq p \leq n \end{cases} .$$

En effet, d'une part la p-forme Trace(ω) définie ci-dessus admet un prolongement holomorphe à $G(k-1, \mathbb{P}^{n+k-1})$ tout entier puisque le morphisme d'incidence induit par la première projection $I_{V_n} \longrightarrow G(k-1, \mathbb{P}^{n+k-1})$ est propre, surjectif et génériquement fini de degré d avec par définition pour branches locales, les applications $x \longmapsto (x, p_i(x))$. D'autre part, on sait que l'on a

$$H^0(G(k-1, \mathbb{P}^{n+k-1}), \Omega^p_{G(k-1,\mathbb{P}^{n+k-1})}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si} \quad p = 0 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq p \leq kn \end{cases} .$$

Par ailleurs, on sait également qu'à toute p-forme rationnelle ω sur V_n où $0 \leq p \leq n$, on peut associer une p-forme rationnelle sur $G(k-1, \mathbb{P}^{n+k-1})$, toujours notée Trace$(\omega)$, et qui y vérifie la relation $\mathrm{Trace}(\omega) = \sum_{i=1}^{d} p_i^*(\omega)$ (*cf.* par exemple [G1]).

La proposition suivante établit une caractérisation des éléments de $H^0(V_n, \omega^p_{V_n})$ pour $0 \leq p \leq n$; elle généralise le théorème d'annulation classique d'Abel et son extension due à P.A. Griffiths pour les n-formes des hypersurfaces réduites de $\mathbb{P}^{n+1}$ (*cf.* [A] et [G1]) tout en justifiant le choix de la terminologie adoptée :

Proposition 3. *Soient $0 \leq p \leq n$ et $V_n \subset \mathbb{P}^{n+k-1}$ une variété algébrique réduite de dimension pure n. Les éléments de $H^0(V_n, \omega^p_{V_n})$, c'est-à-dire les p-formes différentielles abéliennes de $V_n \subset \mathbb{P}^{n+k-1}$ sont les p-formes rationnelles ω sur V_n, régulières si V_n est non singulière ou bien dont le lieu polaire est contenu dans le lieu singulier de V_n, et qui vérifient*

$$\mathrm{Trace}(\omega) = \begin{cases} cste & \textit{si} \quad p = 0 \\ 0 & \textit{si} \quad 1 \leq p \leq n \end{cases} .$$

Démonstration. $\Rightarrow$: C'est une conséquence de ce qui précède, notamment du théorème rappelé ci-dessus qui caractérise les sections locales des $\omega^{\bullet}_{V_n}$, et du théorème de Chow. $\Leftarrow$: Soit ω une p-forme rationnelle sur V_n vérifiant les conditions de la proposition. Si S désigne l'éventuel lieu singulier de V_n, alors cette p-forme ω définit une section locale de $j_* j^* \Omega^p_{V_n}$ où $j : V_n - S \longrightarrow V_n$ est l'injection naturelle. Pour montrer que $\omega \in H^0(V_n, \omega^p_{V_n})$ il suffit d'établir, en utilisant de nouveau le théorème de caractérisation des sections locales des $\omega^{\bullet}_{V_n}$, que $\mathrm{Trace}_{\pi_u}(\omega)$ admet un prolongement holomorphe unique pour toute $u = (u_{\alpha,\beta})$ voisine de $0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n+k-1}, \mathbb{C}^n)$ où $\pi_u = \pi_0 + u$ avec $\pi_0(s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_{k-1}) = (s_1, \ldots, s_n)$ dans le système de coordonnées utilisé auparavant. Dans ce but, on va montrer que l'on peut évaluer $\mathrm{Trace}_{\pi_u}(\omega)$ à partir de $\mathrm{Trace}(\omega)$ pour $u = (u_{\alpha,\beta})$ voisine de $0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n+k-1}, \mathbb{C}^n)$. Par définition, on a

$$\pi_u^{-1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \big\{(s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_{k-1})\,;$$

$$(1 + u_{1,1})s_1 + u_{1,2}s_2 + \cdots + u_{1,n}s_n = \sigma_1 - u_{1,n+1}t_1 - \cdots - u_{1,n+k-1}t_{k-1}$$

$$\vdots$$

$$u_{n,1}s_1 + u_{n,2}s_2 + \cdots + (1 + u_{n,n})s_n = \sigma_n - u_{n,n+1}t_1 - \cdots - u_{n,n+k-1}t_{k-1}\big\}\,.$$

Grâce aux formules de Cramer il existe , à u fixée et voisine de $0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n+k-1}, \mathbb{C}^n)$, un germe de morphisme

$$\rho_u : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow \big(G(k-1, \mathbb{P}^{n+k-1}, \mathbb{P}^{k-1}(\rho_u(0)\big) = (\mathbb{C}^{kn}, \rho_u(0))$$

tel qu'aux notations abusives près et par définition des $\mathbb{P}^{k-1}(x)$ on ait

$$\pi_u^{-1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \mathbb{P}^{k-1}(\rho_u(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))\,;$$

en particulier, $\pi_0^{-1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \mathbb{P}^{k-1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, 0, \ldots, 0)$. Grâce aux choix des coordonnées, on avait déjà

$$\mathrm{Trace}_{\pi_0}(\omega)(s_1, \ldots, s_n) = \mathrm{Trace}(\omega)(s_1, \ldots, s_n, 0, \ldots, 0)$$

puisque $p_i(s_1, \ldots, s_n, 0, \ldots, 0) = p_i(s\,; 0) = (s\,; \xi_{i_1}(s), \ldots, \xi_{i_{k-1}}(s))$ et la construction précédente montre que l'on a plus généralement

$$\mathrm{Trace}_{\pi_u}(\omega) = \rho_u^*\big[\mathrm{Trace}(\omega)\big]$$

pour $u = (u_{\alpha,\beta})$ voisine de $0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n+k-1}, \mathbb{C}^n)$. Ce qui d'après les hypothèses permet d'assurer les prolongements nécessaires et démontre la proposition. $\square$

4. Des tissus algébriques aux majorations des dimensions des $H^0(V_n, \omega^p_{V_n})$

On suppose *désormais* que V_n est une variété algébrique réduite de $\mathbb{P}^{n+k-1}$ de dimension *pure* n, *non dégénérée* (*i.e.* non contenue dans un hyperplan de $\mathbb{P}^{n+k-1}$), non nécessairement irréductible, éventuellement singulière et de degré d.

Au voisinage d'un point générique $\mathbb{P}^{k-1}(0)$ de la grassmannienne $G(k–1,\mathbb{P}^{n+k-1})$ des $(k-1)$-plans de $\mathbb{P}^{n+k-1}$, on peut consturire un d-tissu $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$ de codimension n de $(G(k-1,\mathbb{P}^{n+k-1}),\mathbb{P}^{k-1}(0)) = (\mathbb{C}^{kn},0)$ dont les feuilles correspondent aux variétés de Schubert $\sigma_{p_i(x)}$ des $(k-1)$-plans de $\mathbb{P}^{n+k-1}$ passant par $p_i(x)$ où

$$\mathbb{P}^{k-1}(x)\cap V_n = \sum_{i=1}^{d} p_i(x) \text{ en tant que 0-cycles de } V_n$$

si les d points d'intersection $p_i(0)$ de V_n et $\mathbb{P}^{k-1}(0)$ sont en *position générale* dans $\mathbb{P}^{k-1}(0)$. En effet, dans ce cas et dans le système de coordonnées déjà utilisé, on a

$$p_i = (F_{i_1},\ldots,F_{i_n},\xi_{i_1}(F_{i_1},\ldots,F_{i_n}),\ldots,\xi_{i_{k-1}}(F_{i_1},\ldots,F_{i_n}))$$

et les d feuilles du tissu $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$ seront données par

$$\{F_{i_1}(x) = cste,\ldots,F_{i_n}(x) = cste\}$$

où l'on rappelle que l'on a pour $1 \le m \le n$ et x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{kn}$

$$\begin{aligned} F_{i_m}(x) = x_m + \xi_{i_1}\big(F_{i_1}(x),\ldots,F_{i_n}(x)\big).\,x_{n+m} + \cdots \\ + \xi_{i_{k-1}}\big(F_{i_1}(x),\ldots,F_{i_n}(x)\big).\,x_{(k-1)n+m}\,. \end{aligned}$$

La position générale des normales $\Omega_i(x)$ de ce tissu $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$ est assurée pour x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{kn}$ puisque, par construction, elle provient de la position générale dans $\mathbb{P}^{k-1}(0)$ des points

$$p_i(0) = (0,\ldots,0,\xi_{i_1}(0),\ldots,\xi_{i_{k-1}}(0))\,.$$

Un tel $(k-1)$-plan générique $\mathbb{P}^{k-1}(0) \in G(k-1,\mathbb{P}^{n+k-1})$ existe toujours si $k = 2$, de même pour $k \ge 3$ si par exemple V_n est irréductible, en particulier si V_n est lisse et connexe ; il suffit, par exemple, d'adapter l'argument donné dans [G-H] pour le cas des courbes irréductibles et non dégénérées V_1 de $\mathbb{P}^k$.

Si cette condition de position générale est vérifiée, on dira comme dans l'introduction que $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$ est *le tissu algébrique associé à* $V_n \subset \mathbb{P}^{n+k-1}$. On rappelle dans ce cas et par construction que le d-tissu $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$ est *linéaire* (*i.e.* toutes ses feuilles sont des $(k-1)n$-plans de $\mathbb{C}^{kn}$, non nécessairement parallèles).

On suppose *désormais* que la variété algébrique $V_n \subset \mathbb{P}^{n+k-1}$ définit le tissu $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$. Pour $0 \leq p \leq n$, on note $\mathcal{A}^p := \mathcal{A}^p(\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n))$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des relations abéliennes de degré p du tissu $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$.

D'après les résultats de la fin du paragraphe précédent, on a une application $\mathbb{C}$-linéaire

$$A^p : H^0(V_n, \omega^p_{V_n}) \longrightarrow \mathcal{A}^p$$

donnée par $A^p(\omega) = \big(\alpha_{I_i}(F_{i_1}, \dots, F_{i_n})\big)_{1\leq i\leq d,\, |I_i|=p}$ où la p-forme $\omega \in H^0(V_n, \omega^p_{V_n})$ s'écrit $\omega = \sum\limits_{|I_i|=p} \alpha_{I_i}(s_1, \dots, s_n)\, ds_{I_i}$ au voisinage de $p_i(0)$. En effet, par définition et ce qui précède, on a

$$\mathrm{Trace}(\omega) = \sum_{1\leq i\leq d,\, |I_i|=p} \alpha_{I_i}(F_{i_1}, \dots, F_{i_n})\, dF_{I_i} = \begin{cases} cste & si \quad p=0 \\ 0 & si \quad 1 \leq p \leq n \end{cases}.$$

Théorème 2. *Sous les conditions précédentes, on a un morphisme injectif de complexes*

$$A^\bullet : \big(H^0(V_n, \omega^\bullet_{V_n}), d\big) \longrightarrow (\mathcal{A}^\bullet, \delta)$$

qui est bijectif en degré $p = n$. En particulier, le n-rang r_n du tissu algébrique $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$ associé à $V_n \subset \mathbb{P}^{n+k-1}$ est égal à $\dim_{\mathbb{C}} H^0(V_n, \omega^n_{V_n})$ et l'on a les majorations optimales suivantes pour $0 \leq p \leq n$:

$$h^{p,0}(V_n) := \dim_{\mathbb{C}} H^0(V_n, \omega^p_{V_n}) \leq r_p := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}^p \leq \pi_p(d,k,n)\,.$$

De plus, pour les hypersurfaces algébriques réduites $V_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ de degré d on a

$$h^{n,0}(V_n) = r_n = \pi_n(d,2,n) = \binom{d-1}{n+1}.$$

Démonstration. Par définition du complexe $(\mathcal{A}^\bullet, \delta) := (\mathcal{A}^\bullet(\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)), \delta)$ des relations abéliennes du tissu algébrique $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$ et ce qui précède, les A^p définies ci-dessus induisent un morphisme de complexe $A^\bullet : (H^0(V_n, \omega^\bullet_{V_n}), d) \longrightarrow (\mathcal{A}^\bullet, \delta)$. Pour étudier les premières propriétés de ce dernier, on va transiter *via* le cas des tissus algébriques $\mathcal{L}_{V_n}(d,2,n)$ associés aux hypersurfaces $V_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$. Soit $\pi : \mathbb{P}^{n+k-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ une projection générique adaptée, alors $\pi(V_n) = \widetilde{V_n}$ est une hypersurface réduite de $\mathbb{P}^{n+1}$ dont le degré est d et l'on peut vérifier que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^0(V_n, \omega^\bullet_{V_n}) & \xrightarrow{\pi_*} & H^0(\widetilde{V_n}, \omega^\bullet_{\widetilde{V_n}}) \\ {\scriptstyle A^\bullet}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{A}^\bullet} \\ \mathcal{A}^\bullet(\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)) & \xrightarrow{\varrho} & \mathcal{A}^\bullet(\mathcal{L}_{\widetilde{V_n}}(d,2,n)) \end{array}$$

où les notations précédentes sont conservées et le morphisme π_* est induit, *via* le lemme de Dolbeault–Grothendieck, par l'image directe des courants. En effet, on sait que celle-ci commute avec $\bar{\partial}$ et que pour tout $\omega \in H^0(V_n, \omega^\bullet_{V_n})$ on a $\pi_*(\omega \wedge [V_n]) = \pi_*(\omega) \wedge [\widetilde{V_n}]$. De plus, dans le système de coordonnées déjà utilisé on a

$$\varrho\left(\left(\alpha_{I_i}(F_{i_1},\dots,F_{i_n})\right)\right) = \left(\alpha_{I_i}(\widetilde{F}_{i_1},\dots,\widetilde{F}_{i_n})\right)$$

avec $\widetilde{F}_{i_m}(x_1,\dots,x_{2n}) = F_{i_m}(x_1,\dots,x_{2n},0,\dots,0)$ pour $1 \leq m \leq n$ puisque l'on peut supposer que localement $\pi(s_1,\dots,s_n,t_1,\dots,t_{k-1}) = (s_1,\dots,s_n,t_1)$; en fait, on a

$$\ell(x_1,\dots,x_{2n}) \cap \widetilde{V_n} = \sum_{i=1}^{d} \widetilde{p}_i(x_1,\dots,x_{2n}) \quad \text{en tant que 0-cycles de } \widetilde{V_n}$$

où d'une part $\ell(x_1,\dots,x_{2n})$ est la droite de $\mathbb{P}^{n+1}$ définie par

$$\ell(x_1,\dots,x_{2n}) \quad \begin{cases} s_1 &= x_1 + t_1 . x_{n+1} \\ \vdots & \\ s_n &= x_n + t_1 . x_{2n} \end{cases}$$

et d'autre part $\widetilde{p}_i = (\widetilde{F}_{i_1},\dots,\widetilde{F}_{i_n},\xi_{i_1}(\widetilde{F}_{i_1},\dots,\widetilde{F}_{i_n}))$. En particulier, on a

$$\mathrm{Trace}(\pi_*(\omega))(x_1,\dots,x_{2n}) = \mathrm{Trace}(\omega)(x_1,\dots,x_{2n},0,\dots,0)\,.$$

Par définition, π_* est un morphisme injectif puisque la projection π induit un morphisme birationnel de V_n sur $\widetilde{V_n}$. En outre, l'hypothèse de position générale montre que l'application ϱ est injective. D'après les contraintes de degrés (*cf.* les exemples du §3), le morphisme $\widetilde{A}^\bullet$ est toujours injectif ; de plus, il est bijectif en degré maximal n d'après les majorations générales du théorème 1 et puisque $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\widetilde{V_n}, \omega^n_{\widetilde{V_n}}) = \binom{d-1}{n+1}$ (on peut également adapter l'argument de [Hé1], cas $n=1$). Ce qui montre, d'après les propriétés du diagramme commutatif ci-dessus, que le morphisme de complexe $A^\bullet$ est toujours injectif ; de plus et par construction, ce dernier est bijectif en degré maximal n d'après la proposition 3. Ce qui donne les majorations énoncées en utilisant les résultats du théorème 1 ; de plus, ces dernières sont optimales, notamment grâce à des exemples d'arrangements particuliers de n-plans de $\mathbb{P}^{n+k-1}$ et la proposition qui suit. Ce qui démontre le théorème. □

Pour $p = n$, on retrouve ainsi les majorations de Castelnuovo–Harris (*cf.* pour $n = 1$, [Ca], [G-H] et pour $n \geq 1$, [H], [C-G2]).

Le théorème 2 montre, par exemple, que l'*irrégularité* $q(S) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \omega^1_S)$ d'une surface algébrique irréductible $S \subset \mathbb{P}^{k+1}$, non dégénérée et de degré d vérifie la majoration suivante : $q(S) \leq \pi_1(d,k,2)$.

Les majorations obtenues ci-dessus suggèrent naturellement d'étudier, à $0 \leq p \leq n$ fixé, la nature géométrique des variétés algébriques $V_n \subset \mathbb{P}^{n+k-1}$ dont les $h^{p,0}(V_n)$ sont maximaux.

Par définition des nombres de Castelnuovo généralisés $\pi_p(d,k,n)$, les majorations du théorème 2 montrent que sous les hypothèses précédentes et pour $1 \leq p \leq n$ on a $h^{p,0}(V_n) = 0$ dès que $1 \leq d \leq (k-1)p+1$; de plus, comme dans [C-G2], on peut "inverser" les formules donnant les $\pi_p(d,k,n)$ et ainsi obtenir, par exemple, des *minorations* du degré des $V_n \subset \mathbb{P}^{n+k-1}$ ayant un $h^{p,0}(V_n)$ donné.

L'exemple du tissu algébrique qui suit permet, notamment, de montrer que les bornes $\pi_p(d,k,n)$ obtenues précédemment sont optimales.

Soit C la courbe rationnelle normale de $\mathbb{P}^{k-1}$ paramétrée par $t \mapsto [1, t, ..., t^{k-1}]$. On choisit d points *distincts* de C correspondants à des $\tau_i \in \mathbb{C}$. On considère le *d-arrangement* $\mathfrak{a}(C,\tau_i)$ *de n-plans de* $\mathbb{P}^{n+k-1}$ définis, dans le système de coordonnées affines déjà utilisé, par

$$\begin{cases} t_1 & = & \tau_i \\ \vdots & & \\ t_{k-1} & = & \tau_i^{k-1} \end{cases} .$$

Cet arrangement définit un d-tissu linéaire $\mathcal{P}_{\tau_i}(d,k,n) := \mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$ de $(\mathbb{C}^{kn},0)$ où V_n est le support du d-arrangement $\mathfrak{a}(C,\tau_i)$. En effet, des déterminants de Vandermonde montrent que les $p_i(0) = (0,\ldots,0,\tau_i,\ldots,\tau_i^{k-1})$ sont d points de $\mathbb{P}^{k-1}(0)$ en position générale ; de plus, les familles de feuilles du tissu $\mathcal{P}_{\tau_i}(d,k,n)$ sont des $(k-1)n$-plans de $\mathbb{C}^{kn}$ *parallèles* d'équations

$$\begin{cases} F_{i_1}(x) & = & x_1 & + & \tau_i.x_{n+1} & + & \cdots & + & \tau_i^{k-1}.x_{(k-1)n+1} & = & cste \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ F_{i_n}(x) & = & x_n & + & \tau_i.x_{2n} & + & \cdots & + & \tau_i^{k-1}.x_{kn} & = & cste\,. \end{cases}$$

On identifie le d-arrangement $\mathfrak{a}(C,\tau_i)$ et son support, comme variété algébrique réduite de $\mathbb{P}^{n+k-1}$ de dimension pure n et de degré d. Pour $0 \leq p \leq n$, on note $\mathcal{A}^p := \mathcal{A}^p(\mathcal{P}_{\tau_i}(d,k,n))$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des relations abéliennes de degré p du tissu $\mathcal{P}_{\tau_i}(d,k,n)$ associé au d-arrangement $\mathfrak{a}(C,\tau_i)$.

Avec l'ensemble des notations précédentes, on a le résultat suivant :

Proposition 4. *On a un morphisme bijectif de complexes*

$$A^\bullet : (H^0(\mathfrak{a}(C,\tau_i), \omega^\bullet_{\mathfrak{a}(C,\tau_i)}), d) \longrightarrow (\mathcal{A}^\bullet, \delta)\,.$$

De plus, pour $0 \leq p \leq n$ le p-rang du tissu $\mathcal{P}_{\tau_i}(d,k,n)$ de $(\mathbb{C}^{kn},0)$ défini par le d-arrangement $\mathfrak{a}(C,\tau_i)$ de n-plans de $\mathbb{P}^{n+k-1}$ est maximal (i.e. $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}^p = \pi_p(d,k,n)$*) et l'on a une suite exacte de $\mathbb{C}$-espace vectoriels*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}^{n-1} \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}^n \longrightarrow 0\,.$$

Démonstration. Comme dans la première partie de la démonstration du théorème précédent, on peut transiter *via* le cas hypersurface à l'aide d'une projection générique. Par conséquent, pour montrer que l'on a l'isomorphisme annoncé, il suffit d'établir que $A^\bullet$ est bijectif dans le cas où le d-arrangement $\mathfrak{a}(C, \tau_i)$ a pour support l'hypersurface algébrique $V_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ dont l'équation affine est

$$f(s_1, \dots, s_n, t) = \prod_{i=1}^{d} (t - \tau_i) = 0.$$

D'après la première partie du théorème précédent, on a un morphisme injectif

$$A^\bullet : H^0(V_n, \omega^\bullet_{V_n}) \longrightarrow \mathcal{A}^\bullet(\mathcal{L}_{V_n}(d, 2, n))\,.$$

Or dans ce cas particulier on peut vérifier explicitement à l'aide de la description des $H^0(V_n, \omega^p_{V_n})$ largement esquissée dans les exemples du paragraphe 3 que l'on a

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(V_n, \omega^0_{V_n}) = \binom{d+n-1}{n+1} + 1 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{C}} H^0(V_n, \omega^p_{V_n}) = \binom{n}{p} \cdot \binom{d+n-p-1}{n+1}$$

pour $1 \leq p \leq n$. Ce qui prouve la première partie de la proposition d'après les majorations du théorème 1 puisque les nombres précédents sont précisément les bornes $\pi_0(d, 2, n)$ et $\pi_p(d, 2, n)$. On doit également vérifier que pour $0 \leq p \leq n$, le p-rang du tissu $\mathcal{P}_{\tau_i}(d, k, n)$ est $\pi_p(d, k, n)$. En degré $p = 0$, il suffit d'établir d'après les résultats du paragraphe 2 que l'on a l'égalité suivante pour $1 \leq q \leq d - 1$:

$$\dim_{\mathbb{C}} \Big(\mathcal{O}\,[\xi] / (\mathfrak{a}_{q+1}, \bigcap_{i=1}^{q} \mathfrak{a}_i) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C} \Big) = \binom{n+e}{n} \quad \text{où} \quad e = \left[\frac{q-1}{k-1} \right]$$

et avec ici

$$\mathfrak{a}_i = (\xi_{n+1} - \tau_i.\,\xi_1, \xi_{2n+1} - \tau_i^2.\,\xi_1, \dots, \xi_{(k-1)n+1} - \tau_i^{k-1}.\,\xi_1\,; \dots\,;$$

$$\xi_{2n} - \tau_i.\,\xi_n, \xi_{3n} - \tau_i^2.\,\xi_n, \dots, \xi_{kn} - \tau_i^{k-1}.\,\xi_n)\ ;$$

en effet, les champs de vecteurs associés au tissu $\mathcal{P}_{\tau_i}(d, k, n)$ sont à coefficients constants. Pour vérifier l'égalité ci-dessus, on utilise le début de la résolution canonique de Hilbert

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{O}\,[\xi]^{\binom{kn}{2}} \longrightarrow \mathcal{O}\,[\xi]^{kn} \longrightarrow (\xi_1, \dots, \xi_{kn}) \longrightarrow 0\,.$$

Elle permet de décrire, de proche en proche, les éléments de $\bigcap_{i=1}^{q} \mathfrak{a}_i$ modulo $\mathfrak{a}_{q+1}$ qu'on peut supposer être l'idéal $(\xi_{n+1}, \dots, \xi_{kn})$. On se restreint ainsi à des idéaux de $\mathcal{O}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ et l'on obtient alors le résultat, grâce à des déterminants de Vandermonde construits à partir des τ_i et puisque

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]/(\xi_1, \ldots, \xi_n)^{e+1} = \binom{n+e}{n}.$$

En degré p où $1 \leq p \leq n$, on va exhiber $\pi_p(d,k,n)$ relations abéliennes indépendantes de l'espace $\mathcal{A}^p$. Pour $p = 1$, on fait quelques remarques préliminaires proches des arguments de la démonstration du théorème 1. Soit

$$(\alpha_{1_1}, \ldots, \alpha_{1_n}; \ldots; \alpha_{d_1}, \ldots, \alpha_{d_n}) \in \mathcal{A}^1,$$

on a

$$\alpha_{i_m} = \alpha_{i_m}(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})$$

avec pour $1 \leq m \leq n$

$$F_{i_m}(x) = x_m + \tau_i . x_{n+m} + \cdots + \tau_i^{k-1} . x_{(k-1)n+m} .$$

Par définition on a $\sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_{i_1} dF_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_n} dF_{i_n} = 0$, ce qui donne kn relations

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_{i_m} = 0 \, , \sum_{i=1}^{d} \tau_i . \alpha_{i_m} = 0 \, , \ldots , \sum_{i=1}^{d} \tau_i^{k-1} . \alpha_{i_m} = 0$$

où $1 \leq m \leq n$. Si $d > k$, l'utilisation d'un déterminant de Vandermonde, d'ordre k, construit à partir des τ_i montre que pour $1 \leq m \leq n$ la donnée des différentes valeurs $\alpha_{(k+1)_m}(0), \ldots, \alpha_{d_m}(0)$ détermine de manière unique celles des $\alpha_{1_m}(0)$, $\ldots$, $\alpha_{k_m}(0)$. Par dérivation des relations ci-dessus, par rapport à des x_j convenables, on obtient

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \alpha_{i_m}}{\partial z_l} = 0 \, , \sum_{i=1}^{d} \tau_i \cdot \frac{\partial \alpha_{i_m}}{\partial z_l} = 0 \, , \cdots , \sum_{i=1}^{d} \tau_i^{2(k-1)} \cdot \frac{\partial \alpha_{i_m}}{\partial z_l} = 0$$

pour $1 \leq m \leq n$ et $1 \leq l \leq n$. Si $d > 2k-1$, l'utilisation d'un déterminant de Vandermonde, d'ordre $2k-1$, construit à partir des τ_i montre que pour $1 \leq m \leq n$ et $1 \leq l \leq n$ la donnée des différentes valeurs $\dfrac{\partial \alpha_{(2k)_m}}{\partial z_l}(0), \cdots, \dfrac{\partial \alpha_{d_m}}{\partial z_l}(0)$ détermine de manière unique celles des $\dfrac{\partial \alpha_{1_m}}{\partial z_l}(0), \cdots, \dfrac{\partial \alpha_{(2k-1)_m}}{\partial z_l}(0)$ et ainsi de suite, suivant la valeur de d relativement à k, pour les dérivées d'ordre supérieur. D'après les majorations du théorème 1 et ce qui précède il suffit, pour obtenir une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}^1$, de faire varier les coefficients du développement de Taylor des $\alpha_{i_m}(z_1, \dots, z_n)$ où $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq m \leq n$ selon la méthode suivante : on choisit, en fonction de la valeur de d relativement à k, les constantes

$$(\alpha_{(k+1)_1}(0), \dots, \alpha_{(k+1)_n}(0)\,; \dots ; \alpha_{d_1}(0), \dots, \alpha_{d_n}(0))\,,$$

puis les dérivées partielles du premier ordre

$$\left(\frac{\partial \alpha_{(2k)_1}}{\partial z_l}(0), \cdots, \frac{\partial \alpha_{(2k)_n}}{\partial z_l}(0)\,; \cdots ; \frac{\partial \alpha_{d_1}}{\partial z_l}(0), \cdots, \frac{\partial \alpha_{d_n}}{\partial z_l}(0)\right)$$

pour $1 \leq l \leq n$ et ainsi de suite pour les ordres supérieurs, juqu'au total de

$$n \cdot \left[\{d-k\} + \binom{n}{1} \cdot \{d-2k+1\} + \binom{n+1}{2} \cdot \{d-3k+2\} + \cdots\right] = \pi_1(d,k,n)\,.$$

La même méthode s'applique pour $2 \leq p \leq n$ avec des déterminants de Vandermonde d'ordre plus élevé. De plus, d'après la construction précédente et par définition de la différentielle δ on peut vérifier que les groupes de cohomologie du complexe $(\mathcal{A}^\bullet, \delta)$ sont nuls en degré $p \geq 2$ pour le tissu $\mathcal{P}_{\tau_i}(d,k,n)$. Ce qui prouve la proposition d'après les résultats du paragraphe 2. $\square$

On dit qu'un d-tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ de codimension n de $(\mathbb{C}^{kn}, 0)$ est *algébrisable* si, à un isomorphisme analytique local de $(\mathbb{C}^{kn}, 0)$ près, ce tissu est algébrique ; c'est-à-dire de la forme $\mathcal{L}_{V_n}(d,k,n)$ où V_n est une variété algébrique convenable de $\mathbb{P}^{n+k-1}$ (*cf.* le début du présent paragraphe). La caractérisation des d-tissus $\mathcal{W}(d,k,n)$ algébrisables est une question naturelle, largement ouverte, mais liée d'après le théorème 2 à la nature des rangs du tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$. Par exemple, un d-tissu $\mathcal{W}(d,2,n)$ algébrisable est *nécessairement* de n-rang maximal.

Il est probable que le complexe $(\mathcal{A}^\bullet, \delta)$ des relations abéliennes d'un tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ soit sollicité pour répondre au problème de son algébrisation ; c'est le cas, *via* le théorème de Lie-Darboux-Griffiths (*cf.* [G1]), de nombreux résultats connus d'algébrisation des tissus $\mathcal{W}(d,k,n)$ de n-rang maximal (*cf.* par exemple [B-B], [C-G1], [Hé1], [Hé3]). Ces derniers apparaissent comme des variations sur un résultat de H. Poincaré (*cf.* [P], cas $n = 1$, $k = 2$ ci-dessous) dont on rappelle la généralisation particulière suivante (*cf.* [Hé4]) :

Proposition 5. *Tout tissu $\mathcal{W}((k-1)n+k+1, k, n)$ de n-rang maximal, à savoir $n+k$, est algébrisable.*

Bibliographie

[A] N. H. Abel, *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes*, Œuvres complètes, Tome premier, Grøndahl & Søn, Christiania, 1881, 145–211.

[Ak] M. A. Akivis, Differential geometry of webs, *J. Soviet Math.* **29** (1985), 1631–1647.

[Ba1] D. Barlet, Le faisceau $\omega_X^\bullet$ sur un espace analytique X de dimension pure, in: *Fonctions de Plusieurs Variables Complexes III, Séminaire F. Norguet*, Lect. Notes Math. **670**, Springer, Berlin, 1978, 187–204.

[Ba2] D. Barlet, Familles analytiques de cycles et classes fondamentales relatives, in: *Fonctions de Plusieurs Variables Complexes IV, Séminaire F. Norguet*, Lect. Notes Math. **807**, Springer, Berlin, 1980, 1–24.

[Ba3] D. Barlet, Le théorème d'intégration sur un ensemble analytique complexe de P. Lelong, in: *Séminaire de géométrie analytique*, Publication de l'Institut Elie Cartan, **5** (deuxième partie), Nancy, 1982, 1–6.

[Bea] A. Beauville, Géométrie des tissus (d'après S. S. Chern et P. A. Griffiths), in: *Séminaire Bourbaki, exposé* 531 (février 1979), Lect. Notes Math. **770**, Springer, Berlin, 1980, 103–119.

[Bj] J.-E. Björk, *Residue currents and $\mathcal{D}$-modules on complex manifolds*, Manuscript, Stockholm University, 1996.

[B] W. Blaschke, *Einführung in die Geometrie der Waben*, Birkhäuser, Basel, 1955.

[B-B] W. Blaschke und G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlin, 1938.

[Ca] G. Castelnuovo, Ricerche di Geometria sulle curve algebriche, *Atti R. Accad. Sci. Torino* **24** (1889), 346–373.

[C1] S. S. Chern, Abzählungen für Gewebe, *Abh. Hamburg* **11** (1936), 163–170.

[C2] S. S. Chern, Web Geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1982), 1–8.

[C-G1] S. S. Chern and P. A. Griffiths, Abel's Theorem and Webs, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **80** (1978), 13–110 and Corrections and Addenda to Our Paper : Abel's Theorem and Webs, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **83** (1981), 78–83.

[C-G2] S. S. Chern and P. A. Griffiths, An Inequality for the Rank of a Web and Webs of Maximum Rank, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **5** (1978), 539–557.

[Go] V. V. Goldberg, *Theory of Multicodimensional* $(n+1)$*-Webs*, Kluwer, Dordrecht, 1988.

[G-M] M. Granger and P. Maisonobe, A basic course on differential modules, in: *$\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes*, Travaux en cours **45**, Hermann, Paris, 1993, 103–168.

[G1] P. A. Griffiths, Variations on a Theorem of Abel, *Invent. Math.* **35** (1976), 321–390.

[G2] P. A. Griffiths, On Abel's Differential Equations, in: *Algebraic Geometry, The Johns Hopkins Centennial Lectures*, Ed. J.-I. Igusa, 1977, 26–51.

[G-H] P. A. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[H] J. Harris, A Bound on the Geometric Genus of Projective Varieties, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **8** (1981), 35–68.

[Hé1] A. Hénaut, Caractérisation des tissus de $\mathbb{C}^2$ dont le rang est maximal et qui sont linéarisables, *Compositio Math.* **94** (1994), 247–268.

[Hé2] A. Hénaut, Systèmes différentiels, nombre de Castelnuovo et rang des tissus de $\mathbb{C}^n$, *Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ.* **31** (1995), 703–720.

[Hé3] A. Hénaut, Sur l'algébrisation des tissus de codimension n de $\mathbb{C}^{2n}$, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* **31** (1998), 131–143.

[Hé4] A. Hénaut, Analytic Web Geometry, in: *Web Theory and Related Topics* (Ed. : J. Grifone and E. Salem), World Scientific, Singapore, 2001, 6–47.

[H-P] G. Henkin and M. Passare, Abelian differentials on singular varieties and variations on a theorem of Lie–Griffiths, *Invent. Math.* **135** (1999), 297–328.

[H-L] M. Herrera and D. Lieberman, Residues and Principal Values on Complex Spaces, *Math. Ann.* **194** (1971), 259–294.

[J-M-R] J.-L. Joly, G. Métivier and J. Rauch, Resonant Geometric Optics and Webs, in: *Web Theory and Related Topics* (Ed.: J. Grifone and E. Salem), World Scientific, Singapore, 2001, 114–132.

[K-L] S. L. Kleiman and D. Laksov, Schubert Calculus, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 1061–1082.

[Li] J. B. Little, On Webs of Maximum Rank, *Geom. Dedicata* **31** (1989), 19–35.

[P] H. Poincaré, Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes, *Bull. Soc. Math. France* **29** (1901), 61–86.

[W] *Web theory and related topics* (Ed.: J. Grifone and E. Salem), World Scientific, Singapore, 2001.

A. Hénaut
Laboratoire de Mathématiques pures
Université Bordeaux I et C.N.R.S.
351, cours de la Libération
F–33405 Talence Cedex
France

(Received: October 16, 2000; revised version: July 20, 2001)