

# Enlacements d'intervalles et représentation de Gassner.

Autor(en): **le Dimet, J.Y.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **67 (1992)**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-51097>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Enlacements d'intervalles et représentation de Gassner

J. Y. LE DIMET

### Introduction

Le *calcul différentiel libre* introduit par Fox a permis de construire diverses représentations des groupes de tresses: représentation de Magnus, de Burau et représentation de Gassner pour le groupe des tresses pures [B].

L'existence du calcul différentiel libre tient essentiellement au fait suivant: l'idéal d'augmentation  $I(F)$  de l'algèbre  $\mathbb{Z}[F]$  du groupe libre  $F$  à  $n$  générateurs est un  $\mathbb{Z}[F]$ -module libre de rang  $n$ .

Considérons maintenant la clôture algébrique  $G$  du groupe libre  $F$  (voir [L]). Ce groupe  $G$  – qui est décrit ci-dessous et dans [LD] comme le groupe fondamental du localisé “fini” d'un bouquet de  $n$  cercles – est mal connu: on sait, par exemple, que  $H_i(G)$  est isomorphe à  $H_i(F)$  pour  $i = 1, 2$ , mais on ignore tout de  $H_i(G)$  pour  $i > 2$ . Il semble donc difficile dans ces conditions de décrire l'idéal d'augmentation  $I(G)$  et d'étendre à  $G$  le calcul différentiel libre.

On démontre cependant dans ce qui suit, que l'idéal  $I(G)$  a la propriété suivante. Soit  $A$  l'anneau des fractions rationnelles à coefficients entiers en  $n$  variables  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , dont les dénominateurs valent  $\pm 1$  pour  $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 1$ . Alors  $A \otimes_G I(G)$  est isomorphe à  $A^n$ . Ceci nous permet de construire une sorte de calcul différentiel sur  $G$  à valeurs dans  $A$ .

Rappelons maintenant qu'un enlacement de  $n$  intervalles est constitué de  $n$  arcs orientés disjoints de la boule de dimension 3 dont les extrémités sont contenues dans le bord [LD]. Les classes de cobordisme de ces objets forment un groupe  $C_n$  qui contient le groupe  $P_n$  des tresses pures. Comme application de ce qui précède, nous montrons que la représentation de Gassner du groupe  $P_n$  se prolonge à une représentation  $\Gamma$  du groupe  $C_n$  dans le groupe  $GL_n(A)$ . Dans la pratique, le calcul, pour un enlacement donné  $e$ , de la matrice  $\Gamma(e)$  est aisé, du moins si cet enlacement ne présente pas trop de croisements.

## 1. Dérivation

Soit  $E_n$  le localisé fini d'un bouquet de  $n$  cercles et soit  $l : \bigvee_n S^1 \rightarrow E_n$  l'application canonique [LD]. Cet espace est caractérisé par les propriétés suivantes:

- (i)  $E_n$  est limite inductive de complexes finis  $X_p$ ,  $p \geq 0$ , tels que  $X_0 = \bigvee_n S^1$  et pour tout  $p \geq 0$ :

$H_*(X_p) \rightarrow H_*(X_{p+1})$  est un isomorphisme et

$\pi_1(X_p) \rightarrow \pi_1(X_{p+1})$  est normalement surjectif.

- (ii)  $E_n$  est universel pour la propriété (i) au sens suivant: pour toute application  $f$  de  $\bigvee_n S^1$  dans un complexe fini  $Y$  qui induit un isomorphisme entière et une application normalement surjective au niveau des groupes fondamentaux, il existe une application  $g$  de  $Y$  dans  $E_n$ , unique à homotopie près, telle que  $g \circ f = l$ .

On désignera par  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des générateurs du groupe libre  $F = \pi_1(\bigvee_n S^1)$  et l'on notera  $G = \pi_1(E_n)$ . Il est clair que  $H_1(F)$  est isomorphe à  $H_1(G)$  et que  $H_2(F) = H_2(G) = 0$ . On en déduit que  $l_* : F \rightarrow G$  est injective (voir [LD]) et dans la suite, le groupe  $F$  sera considéré comme un sous-groupe de  $G$ .

Signalons que dans [L], J. Levine introduit la notion de *groupe algébriquement clos* et prouve que  $G$  est la clôture algébrique du groupe libre  $F$ .

Rappelons maintenant une notion due à P. Cohn [C]. Soit  $A$  un anneau muni d'une augmentation  $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{Z}$ . Le *localisé universel*  $\Lambda$  de  $\varepsilon$  est bien défini par les propriétés suivantes:

- (i) il existe un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \downarrow & \searrow \varepsilon & \\ A & \rightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

tel que pour toute matrice  $m$  à coefficients dans  $A$ ,  $m \otimes A$  est inversible si et seulement si  $m \otimes \mathbb{Z}$  est inversible;

- (ii) l'anneau  $\Lambda$  est universel pour la propriété (i).

*Remarque.* En fait, la propriété (i) est équivalente à:

- (i)' tout élément  $a$  de  $A$  tel que  $\varepsilon(a) = \pm 1$  est inversible dans  $\Lambda$ .

Pour voir cela, donnons-nous une matrice  $m = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq p$ , d'éléments de  $A$  telle que  $\det \varepsilon(m) = \pm 1$  et considérons le système d'équations linéaires:

$$m \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \quad (\text{S})$$

où les  $b_i$  sont des éléments de  $A$

Le développement du déterminant de  $\varepsilon(m)$  par rapport à la première colonne montre qu'il existe des entiers  $q_1, q_2, \dots, q_p$  tels que:

$$\varepsilon(a_{11})q_1 + \varepsilon(a_{21})q_2 + \dots + \varepsilon(a_{p1})q_p = \pm 1.$$

Posons alors  $c = \sum_1^p a_{i1}q_i$  et remplaçons le système (S) par un système équivalent dans lequel le coefficient de  $z_1$  dans la première ligne est  $c$ . Mais  $c$  étant inversible dans  $A$ , on multiplie cette ligne par  $c^{-1}$  et l'on voit, en poursuivant cette méthode, que (S) possède une unique solution. Ce qui prouve que  $m$  est inversible dans  $A$ .

On pose désormais  $A = \mathbb{Z}[F/F'] = \mathbb{Z}[G/G']$  où  $F'$  (resp.  $G'$ ) est le groupe des commutateurs de  $F$  (resp.  $G$ ). Les localisés universels des augmentations  $A \rightarrow \mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$  seront désignés respectivement  $\Lambda$  et  $\Lambda_G$ . Enfin, on notera  $t_1, t_2, \dots, t_n$  les images des générateurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dans  $F/F'$ . L'anneau  $A$  est donc formé des polynômes de Laurent à coefficients entiers en les  $t_i$ , et il est clair que  $\Lambda$  est l'anneau constitué des fractions  $a/b$  d'éléments de  $A$  tels que  $\varepsilon(b) = \pm 1$ .

(1.1) PROPOSITION. Soit  $I(G)$  l'idéal d'augmentation du groupe  $G$ . Alors le  $\Lambda_G$ -module  $\Lambda_G \otimes_G I(G)$  est libre de rang  $n$ .

Plus précisément, l'application  $v : \Lambda_G^n \cong \Lambda_G \otimes_G I(G)$  définie par  $v(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_1^n a_i \otimes (x_i - 1)$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* On rappelle la propriété suivante (voir [V], Theorem 1.13): soient  $X$  et  $Y$  des complexes finis,  $f : X \rightarrow Y$  une application qui induit un isomorphisme en homologie entière et soit  $\Lambda_Y$  le localisé universel de l'augmentation  $\varepsilon : \mathbb{Z}[\pi_1(Y)] \rightarrow \mathbb{Z}$ . Alors  $f_* : H_*(X, \Lambda_Y) \cong H_*(Y, \Lambda_Y)$  est un isomorphisme.

Ainsi, tout entier  $p \geq 0$ , on dispose d'un isomorphisme

$$H_* \left( \bigvee_n S^1, \Lambda_{X_p} \right) \cong H_*(X_p, \Lambda_{X_p}).$$

D'autre part,  $\Lambda_G$  est un  $\Lambda_{X_p}$ -module pour tout entier  $p$  et l'espace  $E_n$  est limite inductive des  $X_p$ . Il s'ensuit que  $l_* : H_*(\bigvee_n S^1, \Lambda_G) \simeq H_*(E_n, \Lambda_G)$  est un isomorphisme. Un argument classique de suite spectrale montre alors que  $H_1(F, \Lambda_G)$  est isomorphe à  $H_1(G, \Lambda_G)$  et que  $H_2(F, \Lambda_G) = H_2(G, \Lambda_G) = 0$ .

Soit  $I(F)$  l'idéal d'augmentation de  $F$ . Les suites exactes

$$0 \rightarrow I(F) \rightarrow \mathbb{Z}[F] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad (1)$$

$$0 \rightarrow I(G) \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (1')$$

deviennent, après tensorisation par  $\Lambda_G$ :

$$0 \rightarrow H_1(F, \Lambda_G) \rightarrow \Lambda_G \otimes_F I(F) \rightarrow \Lambda_G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad (2)$$

$$0 \rightarrow H_1(G, \Lambda_G) \rightarrow \Lambda_G \otimes_G I(G) \rightarrow \Lambda_G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (2')$$

La comparaison de (2) et (2') prouve que l'inclusion  $F \rightarrow G$  induit un isomorphisme  $\Lambda_G \otimes_F I(F) \rightarrow \Lambda_G \otimes_G I(G)$ . On termine la démonstration en notant que  $I(F)$  est le  $\mathbb{Z}[F]$ -module libre engendré par les  $x_i - 1$ ,  $1 \leq i \leq n$  ([HS], p. 196).

L'abélianisation  $\alpha : G \rightarrow G/G' = F/F'$  induit un morphisme d'anneaux  $\Lambda_G \rightarrow \Lambda$  et  $\Lambda$  hérite ainsi d'une structure de  $\Lambda_G$ -module. On en déduit le.

(1.2) COROLLAIRE. *L'application  $u : \Lambda^n \rightarrow \Lambda \otimes_G I(G)$  définie par*

$$u(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \otimes (x_i - 1)$$

*est un isomorphisme de  $\Lambda$ -modules.*

DÉFINITION. Pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , l'application  $\partial/\partial x_i : G \rightarrow \Lambda$  est définie ainsi: pour tout élément  $g$  de  $G$ ,  $\partial g/\partial x_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du  $u^{-1}(1 \otimes (g - 1))$  dans  $\Lambda^n$ . On dira que  $\partial g/\partial x_i$  est la dérivée de  $g$  par rapport à  $x_i$ .

(1.3) PROPOSITION. *La dérivation a les propriétés suivantes:*

(1) *Pour tout élément  $g$  de  $G$ , on a*

$$1 \otimes (g - 1) = \sum_1^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \otimes (x_i - 1).$$

(2) Pour tous les entiers  $i$  et  $j$  compris entre 1 et  $n$ ,

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

(3) Pour tous les  $g$  et  $h$  de  $G$ ,

$$\frac{\partial gh}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} + \alpha(g) \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

où  $\alpha : G \rightarrow G/G'$  est l'application canonique.

(4) Pour tout élément  $g$  de  $G$ :

$$\frac{\partial g^{-1}}{\partial x_i} = -\alpha(g)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

(5) Soit  $\varphi$  un automorphisme de  $G$  et soit  $y_i = \varphi(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Alors pour tout  $g$  de  $G$  on a:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial g}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}.$$

*Démonstration.* Les propriétés 1 et 2 sont claires.

La propriété 3 provient de l'identité:  $1 \otimes (gh - 1) = 1 \otimes (g - 1) + 1 \otimes g(h - 1)$  qui s'écrit aussi:  $1 \otimes (gh - 1) = 1 \otimes (g - 1) + \alpha(g) (1 \otimes (h - 1))$ .

La propriété 4 s'obtient de 3 en remarquant que  $\partial 1 / \partial x_j = 0$ .

Pour démontrer 5, commençons par noter que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  constituent un système de générateurs du groupe libre  $\varphi(F)$  dont la clôture algébrique est aussi  $G$ . Pour tout élément  $g$  de  $G$ , on a donc les relations suivantes:

$$1 \otimes (g - 1) = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \otimes (x_i - 1) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial g}{\partial y_k} \otimes (y_k - 1) \quad (R)$$

Mais, d'une part

$$\frac{\partial g}{\partial y_k} \otimes (y_k - 1) = \frac{\partial g}{\partial y_k} (1 \otimes (y_k - 1)),$$

et d'autre part on a aussi:

$$1 \otimes (y_k - 1) = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \otimes (x_i - 1)$$

pour tout  $k = 1, 2, \dots, n$ . Par conséquent, les relations (R) s'écrivent:

$$\begin{aligned} 1 \otimes (g - 1) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \otimes (x_i - 1) = \sum_{1 \leq k \leq n} \left[ \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial g}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \otimes (x_i - 1) \right] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial g}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right) \otimes (x_i - 1), \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule annoncée.

(1.4) PROPOSITION. Soit  $G''$  le second groupe dérivé de  $G$  et soit  $g$  un élément quelconque de  $G$ . Si  $g$  est dans  $G''$ , alors  $\partial g / \partial x_i = 0$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ . De plus, si  $\partial g / \partial x_i = 0$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ , alors  $g$  est dans  $G'$ .

Démonstration. La suite spectrale de Hochschild-Serre ([BR] ou [HS], p. 198) d'une suite exacte  $1 \rightarrow N \rightarrow H \rightarrow Q \rightarrow 1$  de groupes fournit la suite exacte de  $\mathbb{Z}[Q]$ -modules:

$$0 \rightarrow N/N' \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}[Q] \otimes_H I(H) \rightarrow I(Q) \rightarrow 0$$

où l'application  $\mu$  est définie par  $\mu(nN') = 1 \otimes (n - 1)$  pour tout élément  $n$  de  $N$ .

Ce résultat appliqué à:  $1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G/G' \rightarrow 1$  nous donne la suite exacte de  $A$ -modules:

$$0 \rightarrow G'/G'' \xrightarrow{\mu} A \otimes_G I(G) \rightarrow I(G/G') \rightarrow 0.$$

Mais l'anneau  $A$  est un  $A$ -module plat. Par conséquent, la suite exacte précédente nous fournit, après tensorisation par  $A$ , le diagramme commutatif ci-dessous où les lignes horizontales sont exactes et les flèches  $a, b, c$  sont induites par l'inclusion de  $A$  dans  $A$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G'/G'' & \longrightarrow & A \otimes_G I(G) & \longrightarrow & I(G/G') & \longrightarrow & 0 \\ & & a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A \otimes_A G'/G'' & \longrightarrow & A \otimes_G I(G) & \longrightarrow & A \otimes_A I(G/G') & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (D)$$

Le diagramme (D) montre que pour tout  $g$  de  $G'$ ,  $1 \otimes (g - 1) = b(\mu(gG'')) = 0$ . Donc, si  $g$  est dans  $G''$ ,  $\partial g / \partial x_i = 0$  pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$ .

Supposons maintenant que  $1 \otimes (g - 1) = 0$ . Alors,  $1 \otimes (\alpha(g) - 1) = 0$  dans  $A \otimes_A I(G/G')$ . Mais  $1 \otimes (\alpha(g) - 1) = c(\alpha(g) - 1)$ , et il est facile de voir que l'application  $c$  est injective, ce qui termine la démonstration.

NOTATIONS. On notera  $Aut_0(G)$  le groupe de automorphismes de  $G$  qui induisent l'identité sur l'abélianisé  $G/G'$ . Pour tout élément  $\varphi$  de  $Aut_0(G)$ , on désignera par  $\rho(\varphi)$  la matrice  $n \times n$  à coefficients dans  $\Lambda$  dont le terme d'indice  $(i, j)$  est  $\partial\varphi(x_i)/\partial x_j$ .

Le résultat qui suit généralise [B], Theorem 3.9.

(1.5) THÉORÈME. *L'application*

$$\rho : \varphi \mapsto \rho(\varphi)$$

est un morphisme du groupe  $Aut_0(G)$  dans le groupe  $GL_n(\Lambda)$ .

*Démonstration.* Tout élément  $\varphi$  de  $Aut_0(G)$  induit l'identité sur  $\Lambda$ , donc induit un automorphisme  $\tilde{\varphi}$  du  $\Lambda$ -module  $\Lambda \otimes_G I(G)$ . Pour tout entier  $i = 1, 2, \dots, n$ , on a, dans  $\Lambda \otimes_G I(G)$ :

$$\tilde{\varphi}(1 \otimes (x_i - 1)) = 1 \otimes (\varphi(x_i) - 1) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial\varphi(x_i)}{\partial x_j} \otimes (x_j - 1).$$

Par conséquent,  $\rho(\varphi)$  est clairement la matrice de l'automorphisme  $u^{-1} \circ \tilde{\varphi} \circ u$  de  $\Lambda^n$  où  $u : \Lambda^n \xrightarrow{\sim} \Lambda \otimes_G I(G)$  est l'isomorphisme défini au Corollaire 1.2.

*Remarque.* Soit  $Aut_0(G/G'')$  le groupe des automorphismes de  $G/G''$  qui sont induits par les éléments de  $Aut_0(G)$ , et soit  $p : Aut_0(G) \rightarrow Aut_0(G/G'')$  l'application canonique. Si un élément  $\varphi$  de  $Aut_0(G)$  est dans le noyau de  $p$ , alors, pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\varphi(x_i) = x_i \pmod{G''}$ . Mais d'après la Proposition (1.4), ceci implique que, pour tout  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $(\partial x_i^{-1} \varphi(x_i))/\partial x_j = 0$ . Les formules établies dans la Proposition 1.3 montrent alors que  $\partial\varphi(x_i)/\partial x_j = \delta_i^j$ , ce qui signifie que  $\rho(\varphi)$  est l'identité de  $GL_n(\Lambda)$ .

Il s'ensuit que  $\rho$  se factorise à travers  $\rho'' : Aut_0(G/G'') \rightarrow GL_n(\Lambda)$ , mais nous ignorons si, comme dans le cas du groupe libre,  $\rho''$  est une injection, (voir [B], p. 117).

## 2. Application aux enlacements d'intervalles

Soit  $n$  un entier strictement positif et soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,  $n$  points appartenant à l'intérieur du disque  $D^2$ . Un *enlacement* de  $n$  intervalles est un plongement  $e$  transverse au bord (différentiable ou semi-linéaire) de  $I \times \{1, 2, \dots, n\}$  dans  $D^2 \times I$  tel que  $f(j, i) = (a_i, j)$  pour  $j = 0, 1$  et  $i = 1, 2, \dots, n$  (voir [LD]).

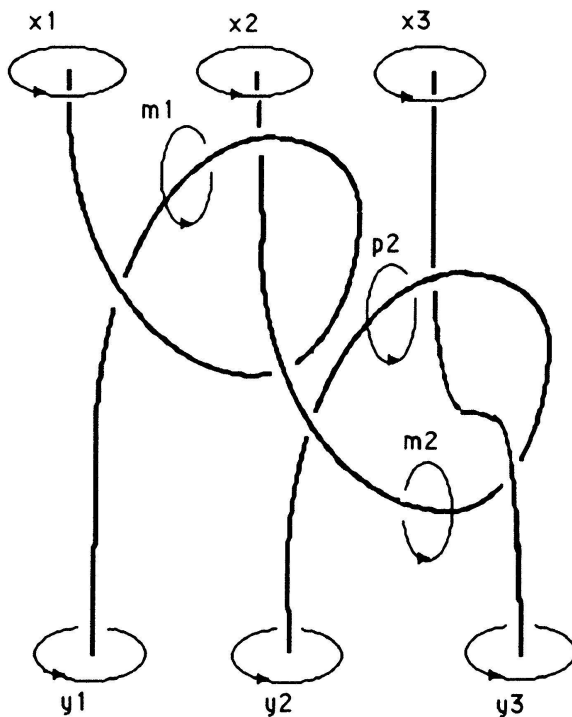
Deux enlacements  $e_0$  et  $e_1$  sont dits *cobordants* s'il existe un plongement standard sur le bord  $F : I \times I \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow I \times D^2 \times I$  qui induit  $e_k$  sur



$k \times I \times \{1, 2, \dots, n\}$  pour  $k = 0, 1$ . Les enlacements de  $n$  intervalles se composent par empilement et les classes de cobordisme forment un groupe que l'on notera  $C_n$ . Ce groupe contient le groupe  $P_n$  des tresses pures ([LD], p. 29).

Notons  $Aut_1(G)$  le sous-groupe de  $Aut_0(G)$  constitué des automorphismes  $\varphi$  tels que  $\varphi(x_1 x_2 \cdots x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$ . Il est construit dans [LD] un morphisme de groupe  $\gamma : C_n \rightarrow Aut_1(G)$  de la façon suivante. Soit  $e$  un enlacement de  $n$  intervalles, soit  $Y$  le complémentaire dans  $D^2 \times I$  d'un voisinage tubulaire ouvert de l'image de  $e$  et soit  $Y_k = (D^2 \times k) \cap Y, k = 0, 1$ . Notons que l'inclusion de  $Y_0$  dans  $Y$  induit un isomorphisme en homologie entière et une application normalement surjective au niveau des  $\pi_1$ , et que  $Y_0$  (ainsi que  $Y_1$ ) a le type d'homotopie de  $\bigvee_n S^1$ . Par conséquent, l'application de localisation  $l : Y_0 \rightarrow E_n$  se prolonge à  $Y \rightarrow E_n$ .

Les images dans  $\pi_1(Y)$ , ainsi que dans le groupe  $G$ , des générateurs canoniques  $y_1, y_2, \dots, y_n$  de  $\pi_1(Y_1)$  sont conjuguées aux images des générateurs canoniques  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $F = \pi_1(Y_0)$ . On démontre qu'il existe un et un seul automorphisme  $\varphi$  de  $G$  tel que  $\varphi(x_i) = y_i, i = 1, 2, \dots, n$ . De plus,  $\varphi$  ne dépend que de la classe de cobordisme de  $e$  et, clairement,  $x_1 x_2 \cdots x_n = y_1 y_2 \cdots y_n = \varphi(x_1 x_2 \cdots x_n)$ . On pose donc  $\gamma(e) = \varphi$ .



- L'enlacement  $e$  -

DÉFINITION. La représentation de Gassner du groupe  $C_n$  est l'application:

$$\Gamma : C_n \rightarrow GL_n(\Lambda)$$

définie par  $\Gamma(e) = \rho(\gamma(e)) = (\partial y_i / \partial x_j)$ .

Il faut noter que  $\Gamma$  prolonge la représentation de Gassner du groupe  $P_n$  des tresses pures (voir [B], p. 119).

EXEMPLE. Soit  $e$  l'enlacement de trois intervalles figuré à la page précédente. Le groupe  $\pi_1(Y)$  admet pour générateurs:  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, m_1, m_2, p_2$  et les relations sont:  $y_1 x_1 = x_1 m_1, m_2 m_1 = x_1 m_2, p_2 x_3 = y_3 p_2, m_1 m_2 = x_2 m_1, y_2 m_2 = m_2 p_2$  et  $y_3 p_2 = m_2 y_3$ .

On calcule alors les dérivées de ces relations par rapport à  $x_1, x_2$  et  $x_3$ . Pour cela, on remarque que  $\alpha(m_1) = \alpha(p_1) = \alpha(y_1) = t_1, \alpha(m_2) = \alpha(p_2) = \alpha(y_2) = t_2, \alpha(y_3) = t_3$  et on utilise la Proposition (1.3).

On obtient ainsi, dans  $\Lambda$ , un système linéaire dont les inconnues sont les dérivées des générateurs autres que les  $x_i$ .

La résolution de ce système nous donne:

$$\Gamma(e) = \begin{pmatrix} \frac{1 - 2t_1 - t_2 + t_1 t_2}{1 - t_1 - t_2} & \frac{t_1(1 - t_1)}{1 - t_1 - t_2} & 0 \\ \frac{(1 - t_2)(1 - t_2 + t_2^2 + t_2 t_3 - t_2^2 t_3)}{(1 - t_1 - t_2)(1 - t_2 + t_2 t_3)} & \frac{-t_2(1 - t_2 + t_2^2 + t_2 t_3 - t_2^2 t_3)}{(1 - t_1 - t_2)(1 - t_2 + t_2 t_3)} & \frac{-t_2^2(1 - t_2)}{1 - t_2 + t_2 t_3} \\ \frac{(1 - t_2)(1 - t_3)}{(1 - t_1 - t_2)(1 - t_2 + t_2 t_3)} & \frac{-t_2(1 - t_3)}{(1 - t_1 - t_2)(1 - t_2 + t_2 t_3)} & \frac{t_2 t_3}{1 - t_2 + t_2 t_3} \end{pmatrix}$$

Remarque. Soit  $\rho_1$  la restriction de la représentation  $\rho$  à  $Aut_1(G)$ . Posons  $g_1 = x_1, g_2 = x_1 x_2, \dots, g_n = x_1 x_2 \cdots x_n$  et définissons la représentation  $\beta : Aut_1(G) \rightarrow GL_n(\Lambda)$  par  $\beta(\varphi) = (\partial \varphi(g_i) / \partial g_j)$ , pour tout  $\varphi$  de  $Aut_1(G)$ .

La formule 5 de la Proposition (1.3) permet de vérifier aisément que, pour tout  $\varphi$  dans  $Aut_1(G)$ , on a  $\beta(\varphi) = T\rho_1(\varphi)T^{-1}$  où  $T$  désigne la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & t_1 & t_1 t_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_1 & t_1 t_2 & t_1 t_2 t_3 & \cdots & t_1 t_2 \cdots t_{n-1} \end{pmatrix}$$

D'autre part, la représentation  $\beta$  a les propriétés suivantes:

- (a) la dernière ligne de  $(\partial\varphi(g_i)/\partial g_j)$  est  $(0, 0, \dots, 0, 1)$ , car  $g_n = \varphi(g_n)$ .
- (b)  $(t_1 - 1, t_1 t_2 - 1, \dots, t_1 t_2 \cdots t_n - 1)$  est vecteur propre de la matrice précédente avec la valeur propre 1: cela provient de la formule 1 de la Proposition (1.3), lue dans  $\mathcal{A}$ .

Par conséquent le représentation  $\beta$ , donc la représentation  $\rho_1$ , sont équivalentes à la représentation  $\beta' : \text{Aut}_1(G) \rightarrow GL_{n-1}(\mathcal{A})$  définie par

$$\beta'(\varphi) = \left( \frac{\partial\varphi(g_i)}{\partial g_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n-1}$$

Comme dans le cas des tresses, la représentation de Gassner est donc équivalente à une représentation de dimension  $n - 1$ .

#### RÉFÉRENCES

- [B] BIRMAN, J. S., "Braids, links, and mapping class groups", Ann. Math. Studies 76, Princeton University Press 1974.
- [Br] BROWN, K. S., "Cohomology of groups", Graduate Texts in Math. 87, Springer 1982.
- [L] LEVINE, J., *Link concordance and algebraic closure II*, Invent. Math. 96 (1989), 236–255
- [HS] HILTON, P. J., STAMMBACH, U., "A course in homological algebra", Graduate Texts in Math. 4, Springer 1971.
- [LD] LE DIMET, J. Y., *Cobordisme d'enlacements de disques*, Mem. Soc. Math. France 32 (1982).
- [V] VOGEL, P., *On the obstruction group in homology surgery*, I.H.E.S., Publications Math. 55 (1982), 165–206.

*Département de Mathématiques  
Université Blaise Pascal  
F-63177 AUBIÈRE Cedex*

Received July 17, 1991