

# Sur les fonctions propres positives des variétés de Cartan-Hadamard.

Autor(en): **Acona, Alano**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **64 (1989)**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-48935>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Sur les fonctions propres positives des variétés de Cartan–Hadamard

ALANO ANCONA

Soit  $M$  une variété de Cartan–Hadamard à courbure sectionnelle pincée entre deux constantes strictement négatives et soit  $\lambda_1(M) = \inf \{(\int_M |\nabla \varphi|^2 dv) / (\int_M |\varphi|^2 dv); \varphi \in C_0^\infty(M), \varphi \neq 0\}$  la première valeur propre de l'opérateur de Laplace–Beltrami  $\Delta$  sur  $M$  ( $v$  désignant la mesure de volume de  $M$ ). On sait que  $\lambda_1(M)$  est strictement positif et que pour chaque réel  $t < \lambda_1(M)$ , il existe “beaucoup” de fonctions  $\Delta + tI$ -harmoniques positives ([3] pour le cas  $t = 0$ , et [1]); on a même une représentation intégrale de ces fonctions à l'aide d'un noyau de “Poisson”  $P_t(x, \zeta)$ ,  $x \in M$ ,  $\zeta$  parcourant la sphère à l'infini de  $M$ , habituellement notée  $S_\infty(M)$ . Ce sont ces fonctions que nous appellerons fonctions propres sur  $M$  au niveau  $t$ , ou encore  $t$ -fonctions propres.

Dans le cas où  $M$  est à courbure sectionnelle constante  $-a^2$ , il est bien connu que ces assertions s'étendent aux fonctions propres au niveau  $\lambda_1$  (et que  $\lambda_1 = (n-1)^2 a^2 / 4$ ); de plus, on sait construire pour chaque  $t$ ,  $0 < t \leq \lambda_1$ , “beaucoup” de fonctions  $t$ -propres tendant vers zéro à l'infini, et de classe  $L^p(M)$ , pour tout  $p > 2/(1 - \sqrt{1 - t/\lambda_1})$  (voir [5]).

Nous nous proposons dans ce travail de revenir au cas de la courbure non constante, en complétant l'étude amorcée dans [1]; nous montrerons que pour tout niveau  $t$ ,  $0 < t < \lambda_1$ , il existe des fonctions  $t$ -harmoniques sur  $M$  tendant vers zéro à l'infini; cette propriété s'étend d'ailleurs à des opérateurs elliptiques d'ordre deux sur  $M$  assez généraux. Néanmoins il existe une différence importante avec le cas de la courbure constante: la vitesse de convergence vers zéro à l'infini ne peut être uniformément contrôlée lorsqu'on s'approche du niveau critique  $\lambda_1$ . On verra sur des exemples qu'il peut ne pas exister de fonctions propres  $> 0$  au niveau  $\lambda_1$  tendant vers zéro à l'infini, aussi bien lorsque l'opérateur  $\Delta + \lambda_1 I$  admet une fonction de Green, que dans le cas contraire, où toutes les fonctions propres au niveau  $\lambda_1$  sont proportionnelles. On verra aussi que chacun de ces deux cas peut effectivement se présenter. Pour les preuves et les constructions d'exemples, nous nous appuierons essentiellement sur les résultats de [1] (qui étaient en partie motivés par ces questions). Dans le paragraphe 2, on s'est efforcé de préciser les estimées de [1] concernant les quotients des fonctions de Green pour différents niveaux, ce qui nous a amené à des énoncés intermédiaires peut-être intéressants par eux-mêmes.

Dans la dernière partie de cet article, nous indiquons une extension (très partielle) au cadre des variétés à courbure négative de la théorie de S. J. Patterson sur les ensembles limites des groupes Fuchsien [11]; on montrera que quelques unes des propriétés remarquables mises en évidence par Patterson sont des conséquences assez simples du principe de Harnack à l’infini établi dans [1].

L’auteur tient enfin à remercier N. Lohoué à qui il doit le problème de l’existence de fonctions  $t$ -propres positives sur  $M$ , nulles à l’infini pour chaque  $t \in ]0, \lambda_1(M)[$ ; ce travail a bénéficié de son intérêt et de ses questions renouvelées.

### 1. Construction de fonctions propres, nulles à l’infini

Dans toute la suite, on se placera dans le cadre suivant: on désigne par  $M$  une variété de Cartan–Hadamard de dimension  $n \geq 2$ , à courbure sectionnelle pincée entre les constantes  $-a^2$  et  $-b^2$ , ( $0 < a \leq b < +\infty$ ) et on note  $\nu$  la mesure de volume sur  $M$ . Dans cette partie, on se donne sur  $M$  un opérateur elliptique  $\mathcal{L}$  du type suivant:

$$\mathcal{L}u = \operatorname{div} \{ \mathcal{A}(\nabla u) \} + B \nabla u + \operatorname{div} \{ uC \} + \gamma u \tag{1}$$

où  $\mathcal{L} = \{ \mathcal{A}(x) \}_{x \in M}$  est une section borélienne du fibré  $\operatorname{End}(T(M))$ , ( $T(M)$  désigne le fibré tangent sur  $M$ ), et les  $\mathcal{A}(x)$  sont bornés, uniformément accréatifs;  $B$  et  $C$  sont deux champs de vecteurs boréliens et bornés sur  $M$ , et  $\gamma$  est une fonction borélienne bornée sur  $M$ ; on a donc pour une certaine constante  $\nu > 0$

$$\langle \mathcal{A}(x)\xi, \xi \rangle \geq \nu \|\xi\|^2 \quad \text{pour } x \in M, \quad \xi \in M_x \tag{2}$$

$$\|\mathcal{A}(x)\xi\| \leq \nu^{-1} \|\xi\| \quad \text{pour } x \in M, \quad \xi \in M_x \tag{3}$$

$$\|B\|_\infty + \|C\|_\infty + \|\gamma\|_\infty \leq \nu^{-1} \tag{4}$$

Un tel opérateur  $\mathcal{L}$  est un opérateur adapté sur  $M$  au sens de [1].

Une classe d’opérateurs de ce type peut être obtenue de la façon suivante: supposons que sur chaque boule  $B(x, 1)$  de rayon 1 dans  $M$ , les coefficients  $[g_{ij}]$  relatifs à un système de coordonnées normales en  $x$ , soient  $K$ -lipschitziens pour un  $K$  indépendant de  $x$ ; soit  $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$  un repère mobile (orthonormé) sur  $M$ , tel que les  $\nabla_{X_i}(X_j)$  soient bornés sur  $M$ ; si  $\{a_{ij}\}$  est une matrice carrée d’ordre  $n$  de fonctions boréliennes bornées sur  $M$ , telle que l’on ait:  $\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \varepsilon \sum \xi_i^2$  pour  $x \in M$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , et une constante  $\varepsilon > 0$ , alors l’opérateur  $\mathcal{L} = \sum X_i(a_{ij}X_j)$  est du type décrit ci-dessus.

Outre (1) à (4), on suppose que  $\mathcal{L}(1) = 0$ , et que  $\mathcal{L}$  coercif, ce qui signifie

que:

$$a_{\mathcal{L}}(\varphi, \varphi) = \int_M \{ \langle \mathcal{A}_x(\nabla\varphi), \nabla\varphi \rangle + \varphi \langle \nabla\varphi, C - B \rangle - \gamma\varphi^2 \} dv(x) \geq \varepsilon \int_M |\nabla\varphi|^2 dv \quad (5)$$

pour toute  $\varphi \in C_0^\infty(M)$ , et une constante  $\varepsilon$  strictement positive. Bien entendu, l'opérateur  $\mathcal{L}$  que nous avons le plus en vue est l'opérateur de Laplace–Beltrami sur  $M$ .

Notons  $\lambda_1$  la première valeur propre de  $\mathcal{L}$  (appelée aussi “fond du spectre”):

$$\lambda_1 = \sup \{ \lambda > 0; \mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L} + \lambda I \text{ est coercif} \}$$

(Notre terminologie n'est bien justifiée que si  $\mathcal{L}$  est auto-adjoint) On sait (voir [1]) que pour chaque  $\lambda < \lambda_1$  il existe un noyau de Green  $G_\lambda$  sur  $M$  relativement à  $\mathcal{L}_\lambda$ ,  $G_\lambda : M \times M \rightarrow ]0, +\infty]$ . (Notre convention sera que  $G_\lambda(x, y)$  est  $\mathcal{L}_\lambda$ -harmonique en  $x$  sur  $M \setminus \{y\}$ ). Posant  $G = G_0$ , on a les estimées suivantes [1]:

$$G(x, y) \leq c \exp(-\beta d(x, y)) G_\lambda(x, y) \quad \text{pour } x, y \in M, \quad 0 < \lambda < \lambda_1 \quad (6)$$

$$G_\lambda(x, y) \leq c \exp(-\beta' d(x, y)) \quad \text{pour } x, y \in M, d(x, y) \geq 1 \quad (7)$$

$$G_\lambda(x, y) \geq G(x, y) > C^{-1} \quad x, y \in M, d(x, y) \leq 1, \quad \lambda > 0 \quad (8)$$

où  $c$ ,  $\beta$  et  $\beta'$  sont des constantes strictement positives qui dépendent de  $n$ ,  $b$ ,  $v$  et  $\lambda_1 - \lambda$ . Notons que (6) est contenue dans l'estimée plus générale ([1]):

$$G_{\lambda'}(x, y) \leq c \exp(-\beta d(x, y)) G_\lambda(x, y) \quad \text{pour } x, y \in M \quad (6')$$

pour  $\lambda' < \lambda < \lambda_1$ ,  $c$  et  $\beta$  dépendant de  $n$ ,  $b$ ,  $v$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda$ . (7) et (8) sont des conséquences de (6) (tant qu'on ne s'intéresse pas aux valeurs optimales de  $\beta'$  ou  $c$ ).

D'autre part, il existe pour chaque  $\lambda < \lambda_1$  un noyau continu  $K_\lambda : M \times S_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ , tel que les fonctions  $u$   $\mathcal{L}_\lambda$ -harmoniques  $\geq 0$  sur  $M$  soient en bijection avec les mesures  $\mu \geq 0$  sur  $S_\infty$  par l'intermédiaire de la formule:

$$u(x) = \int_M K_\lambda(x, \zeta) d\mu(\zeta), \quad x \in M \quad (9)$$

$K_\lambda$  peut être déterminé par le choix d'un point de référence  $0 \in M$ , et la condition



de normalisation  $K_\lambda(0, \zeta) = 1$  pour  $\zeta \in S_\infty$ . Nous fixerons désormais un tel point 0 et désignerons par  $\delta(x)$  la distance  $d(0, x)$  pour  $x \in M$ .

Si  $\sigma$  est la mesure de probabilité sur  $S_\infty$  correspondant au niveau  $\lambda = 0$  et la fonction constante 1, on sait ([1]) que pour  $f \in C(S_\infty, \mathbb{R})$ , la formule

$$u(x) = \int_M K_0(x, \zeta) f(\zeta) d\sigma(\zeta), \quad x \in M \tag{10}$$

donne la solution du problème de Dirichlet sur  $M$ , l'opérateur  $\mathcal{L}$  et la donnée frontière  $f$ ;  $\sigma$  est donc la  $\mathcal{L}$ -mesure harmonique du point 0. Il faut remarquer que même dans le cas  $\mathcal{L} = \Delta$ , il n'y a pas de relation d'absolue continuité entre  $\sigma$  et la mesure géométrique d'angle solide relative à 0 (voir [4], et d'autres propriétés de  $\sigma$  dans [3]).

On a alors le théorème suivant:

**THÉORÈME 1.** *Soient  $f \in L^\infty(\sigma)$ ,  $\lambda \in ]0, \lambda_1[$ ; la formule  $u_{f,\lambda}(x) = \int_M K_\lambda(x, \xi) f(\xi) d\sigma(\xi)$  définit une fonction  $\mathcal{L} + \lambda I$ -harmonique, vérifiant l'estimation:*

$$u_{f,\lambda}(x) \leq C \|f\|_\infty e^{-\alpha\delta(x)} \tag{11}$$

où  $C$  et  $\alpha$  sont des constantes  $>0$  qui dépendent de  $n, a, b, v, \lambda$  et  $\lambda_1$ .

Il suffit évidemment de traiter le cas  $f = 1$ ; on notera  $u = u_{1,\lambda}$ . Afin d'alléger, on ne mentionnera plus la dépendance en  $n$  des diverses constantes utilisées.

Soient  $\gamma$  une géodésique issue de 0 et aboutissant au point  $\zeta_0$  sur la sphère à l'infini  $S_\infty$ ,  $x_j$  le point  $\gamma(kj)$  sur la géodésique pour  $j \in \mathbb{N}$  ( $k$  désignant un réel  $\geq 1$  fixé qui sera choisi plus bas). D'après les inégalités de Harnack, il suffira d'établir (11) pour les points  $x_j$ , pourvu que  $C$  et  $\alpha$  soient indépendants de la géodésique  $\gamma$ .

Désignons par  $\Gamma_j$  le "cône" géodésique de sommet  $x'_j = \gamma(k(j-1) - 1)$  et d'ouverture  $\pi/2$ , lieu des points  $z \in M$ ,  $z \neq x'_j$ , tels que  $\sphericalangle(x'_j \zeta_0, x'_j z) < \pi/2$ ; soient  $\Sigma_j$  l'ensemble des points de la sphère à l'infini  $S_\infty$  adhérents à ce cône, et  $\Sigma'_j$  l'ensemble complémentaire dans  $S_\infty$ . Décomposons  $u(x_j)$  en deux parties  $I_1$  et  $I_2$ :

$$I_1 = \int_{\Sigma_j} K_\lambda(x_j, \zeta) d\sigma(\zeta), \quad I_2 = \int_{\Sigma'_j} K_\lambda(x_j, \zeta) d\sigma(\zeta) \tag{12}$$

et majorons chacune de ces parties.

*Cas de  $I_1$ .* On observe qu'il existe  $\theta$ ,  $0 < \theta < \pi/2$ , ne dépendant que de  $b$  et de  $k$  et tel que le cône géodésique  $C_{j+1}$  de sommet  $x_{j+1}$ , de direction  $-\gamma'(k(j+1))$ , et d'angle au sommet  $\theta$ , admette dans le compactifié  $M^* = M \cup S_\infty$  une fermeture disjointe de  $\Sigma_j$ . Il suffit, d'après le théorème de comparaison de Rauch [6] de choisir pour  $\theta$  l'angle qui convient pour la variété modèle  $H_n(-b^2)$  (et l'entier  $k$ ), soit par exemple:  $\theta < \text{Arctg} \{(sh(b(k+1)))^{-1}\}$ .

D'après les inégalités de Harnack à l'infini de [1] (chap. 3) (voir aussi le lemme 2 plus bas) appliqué à ce cône, et aux deux fonctions  $\mathcal{L}_\lambda$ -harmoniques  $\geq 0$  sur  $C_{j+1}$ ,  $K_\lambda(\cdot, \zeta)$  et  $G_\lambda(\cdot, x_{j+1})$ , on a:

$$1/(CG_\lambda(0, x_{j+1})) \leq K_\lambda(x, \zeta)/G_\lambda(x, x_{j+1}) \leq C/G_\lambda(0, x_{j+1}) \quad (13)$$

pour tout  $x$  sur le segment géodésique  $\overline{Ox_j}$  et tout  $\zeta \in \Sigma_j$ ; la constante  $C$  dépend de  $a, b, k, \nu, \lambda$  et  $\lambda_1$ .

En particulier, en faisant  $x = x_j$ :  $K_\lambda(x_j, \zeta) \sim G_\lambda(x_j, x_{j+1})/G_\lambda(0, x_{j+1})$ ,  $\forall \zeta \in \Sigma_j$ , le symbole  $\sim$  signifiant que les quantités qu'il sépare ont un rapport compris entre deux constantes strictement positives (dépendant de  $\nu, k, a, b, \lambda_1, \lambda$ ); d'où d'après (8):

$$K_\lambda(x_j, \zeta) \sim 1/G_\lambda(0, x_{j+1}) \quad \text{pour } \zeta \in \Sigma_j \quad (13')$$

Le même raisonnement appliqué au niveau  $\lambda = 0$  donne:  $K(x_j, \zeta) \sim 1/G(0, x_{j+1})$ , pour  $\zeta \in \Sigma_j$ . D'où, en intégrant:

$$I_1 \leq C \int_{\Sigma_j} (1/G_\lambda(0, x_{j+1})) d\sigma(\zeta) \leq C'(G(0, x_{j+1})/G_\lambda(0, x_{j+1})) \left\{ \int_{\Sigma_j} K(x_j, \zeta) d\sigma(\zeta) \right\}$$

Comme  $\zeta \rightarrow K(x_j, \zeta)$  est d'intégrale 1 par rapport à  $\sigma$ , on obtient:

$$I_1 \leq CG(0, x_{j+1})/G_\lambda(0, x_{j+1}) \quad C = C(k, a, b, \nu, \lambda, \lambda_1)$$

et d'après (6):

$$I_1 \leq C \exp(-\beta j k), \quad C = C(k, a, b, \nu, \lambda, \lambda_1) \quad (14)$$

*Majoration de  $I_2$ :* On utilise à nouveau le principe de Harnack à l'infini, mais maintenant pour le cône  $\Gamma_j$ ; pour tout  $\zeta \in \Sigma'_j$  on a:

$$K_\lambda(x_j, \zeta)/K_\lambda(x_{j-1}, \zeta) \leq CG_\lambda(x_j, x'_j)/G_\lambda(x_{j-1}, x'_j) \quad (15)$$

où  $C = C(a, b, \nu, \lambda, \lambda_1)$  est une constante indépendante de  $k$ . D'après (7), (8) le dénominateur dans cette dernière expression est de l'ordre d'une constante (indépendante de  $k$ ); d'où, avec les inégalités de Harnack:

$$K_\lambda(x_j, \zeta)/K_\lambda(x_{j-1}, \zeta) \leq C_0 G_\lambda(x_j, x_{j-1}), \quad \forall \zeta \in \Sigma'_j \quad (16)$$

En intégrant, on obtient:

$$I_2 \leq C_0 G_\lambda(x_j, x_{j-1}) u(x_{j-1}) \quad (17)$$

où  $C_0 = C_0(a, b, \nu, \lambda, \lambda_1)$  ne dépend pas de  $k$ . D'où, d'après (7):

$$I_2 \leq C_k u(x_{j-1}) = C_0 e^{-\beta' k} u(x_{j-1}) \quad (18)$$

*Fin de la preuve du théorème 1.* En regroupant les deux majorations (14) et (18), on a:

$$u(x_j) \leq C_k u(x_{j-1}) + c e^{-\beta j k} = C_k u(x_{j-1}) + c d_k^j$$

Par itération, compte tenu de  $u(x_0) = 1$ , et supposant  $c \geq 1$ , on obtient:

$$\begin{aligned} u(x_j) &\leq c(d_k)^j + cC_k(d_k)^{j-1} + cC_k^2(d_k)^{j-2} + \dots + cC_k^p(d_k)^{j-p} + \dots + cC_k^j \\ &= c \left( \sum_{0 \leq s \leq j} C_k^s d_k^{j-s} \right) \end{aligned}$$

et, posant  $A = \sup \{C_k, d_k\}$ :  $u(x_j) \leq c(1+j)A^j$ .

Or,  $d_k = \exp(-\beta k)$  et  $C_k = C_0 \exp(-\beta' k) = \exp\{\text{Ln}(C_0) - \beta' k\}$ ; d'où, si  $\beta'' = \inf\{\beta, \beta'\}$

$$u(x_j) \leq c \exp\{\text{Ln}(1+j) - j(\beta'' k - \text{Ln} C_0)\} \quad (19)$$

et

$$u(x) \leq c' \delta(x) \exp\{-(\beta'' - (\text{Ln}(C_0)/k))\delta(x)\}, \quad x \in M$$

Prenant  $k > (\text{Ln} C_0)/\beta''$ , on obtient l'estimation voulue (11) pour tout choix de  $\alpha$  tel que:  $\alpha < \beta'' - \{\text{Ln}(C_0)/k\}$ . Ce qui achève la preuve du théorème 1.

*Remarques.* On verra plus loin que le meilleur exposant  $\beta'$  dans (7) peut effectivement tendre vers 0 lorsque  $\lambda$  tend vers  $\lambda_1$ ; (voir plus bas, avant le lemme 4), il en ira a fortiori de même pour le meilleur exposant  $\alpha$  dans (11).

La propriété suivante complète le théorème 1.

**THÉORÈME 2.** *Si  $u$  est une fonction  $\mathcal{L}_\lambda$ -harmonique  $\geq 0$  sur  $M$ , alors  $u$  converge radialement vers zéro  $\sigma$ -presque partout sur  $S_\infty$ .*

*Preuve.* On peut supposer  $u > 0$ . Montrons d'abord que  $u$  est un  $\mathcal{L}$ -potentiel, c'est à dire, puisque  $u$  est clairement  $\mathcal{L}$ -surharmonique ( $\mathcal{L}(u) = -\lambda u < 0$ ), que dans la décomposition de Riesz de  $u$  en somme d'un  $\mathcal{L}$ -potentiel  $G(\mu)$  et d'une fonction  $\mathcal{L}$ -harmonique  $h \geq 0$ , on a  $h = 0$ . Comme  $\mu = \lambda u \, dv$ , et que  $G(\mu) \neq +\infty$ ,  $G(h)$  est non identique à  $+\infty$  (et est donc un  $\mathcal{L}$ -potentiel).

Or  $G(x, y)$  et  $h(y)/h(x)$  sont pour  $d(x, y) \leq 1$  minorés par une constante  $> 0$ , d'après (8) et les inégalités de Harnack. D'où, puisque  $M$  est à géométrie bornée:  $G(h)(x) = \int G(x, y)h(y) \, dv(y) \geq Ch(x)$ , pour  $x \in M$  et une constante  $C > 0$ . Comme un potentiel n'admet pas d'autre minorante harmonique  $\geq 0$  que  $0$   $h = 0$  et  $u$  est un  $\mathcal{L}$ -potentiel.

D'après la théorie générale de la frontière de Martin ([9], [12]), le  $\mathcal{L}$ -potentiel  $u$  tend finement vers 0,  $\sigma$ -presque partout sur la sphère  $S_\infty$  (dont on sait qu'elle s'identifie à la frontière de Martin, [1]). Comme  $u$  en tant que  $\mathcal{L} + \lambda I$  solution vérifie localement des inégalités de Harnack le raisonnement classique de [1], § 4, permet de passer des limites fines à des limites non tangentielles (et en particulier radiales). Ce qui achève de prouver le théorème.

*Remarques.* 1. Les inégalités (7) et (13') montrent que les fonctions  $\lambda$ -propres positives  $K_\lambda(\cdot, \zeta)$ , ( $\zeta \in S_\infty$ ,  $0 < \lambda < \lambda_1$ ) sont non bornées.

2. L'énoncé précédent est indépendant du théorème 1. Si on utilise le théorème 1, on obtient une propriété plus précise:

**THÉORÈME 2'.** *Si  $0 < \lambda < \lambda_1$ , si  $\varphi_\lambda(x) = \int K_\lambda(x, \zeta) \, d\sigma(\zeta)$ , et si  $u$  est  $> 0$   $\mathcal{L}_\lambda$ -harmonique, alors  $u/\varphi_\lambda$  est borné sur la demi-géodésique  $\overline{0\xi}$ , pour  $\sigma$ -presque tout  $\zeta \in S_\infty$ . En particulier, pour tout  $\alpha < \inf(\beta, \beta')$ , on a  $u(x) \leq C_\zeta \exp(-\alpha\delta(x))$ , sur  $\overline{0\xi}$  pour  $\sigma$ -presque tout  $\zeta \in S_\infty$ , (avec  $0 < C_\zeta < \infty$ ). Si  $v$  est  $\mathcal{L}_\mu$ -harmonique  $> 0$  sur  $M$ , pour  $\mu > \lambda$ , alors  $v/\varphi_\lambda$  tend radialement vers 0,  $\sigma$ -presque partout sur  $S_\infty$ .*

On sait en effet que  $u/\varphi_\lambda$  admet une limite fine finie en  $\sigma$ -presque tout  $\zeta \in S_\infty$  ([9], [12]). Les inégalités de Harnack montrent ensuite comme dans [1] que l'existence d'une limite fine (pour la  $\mathcal{L}_\lambda$ -théorie) entraîne celle d'une limite radiale et même d'une limite "non-tangentielle". Pour la deuxième assertion, il suffit de reprendre la démonstration du théorème 2 pour voir que  $v$  est nécessairement un  $\mathcal{L}_\lambda$ -potentiel, et conclure de la même manière.

En particulier  $u_\lambda = o(u_{\lambda'})$ , sur  $\sigma$ -presque toute géodésique  $\overline{0\xi}$ , si  $\lambda < \lambda'$ .

## 2. Précision de l'allure à l'infini pour $\mathcal{L} = \Delta$

On établit dans ce paragraphe une estimation des quotients des fonctions de Green sur  $M$ , relatives à un même pôle et à deux niveaux  $\lambda, \lambda'$ , pour le cas  $\mathcal{L} = \Delta$ ; ce qui précisera un peu l'allure à l'infini des fonctions propres construites au paragraphe précédent. On remarquera que les théorèmes de comparaison standard avec les fonctions de Green analogues de  $H_n(-a^2)$  et  $H_n(-b^2)$  ne disent rien d'intéressant sur ces quotients en général.

On notera  $\lambda_0 = \{(n-1)b/2\}^2$  la première valeur propre de  $H_n(-b^2)$ . Le théorème suivant est pour l'essentiel dû à Yau [13]; la borne  $\sqrt{\lambda_0} + \sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}$  pour le cas particulier considéré ici résulte d'un examen attentif de la méthode de Yau. (Le cas  $\lambda = 0$  est d'ailleurs explicitement mentionné dans [13]).

**THÉORÈME 3.** *Soit  $u$  une fonction propre positive au niveau  $\lambda \leq \lambda_1$  sur la variété  $M$ . On a, sur  $M$ :  $(|\nabla u|/u) \leq \sqrt{\lambda_0} + \sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}$ .*

Rappelons pour la commodité du lecteur la méthode de Yau: on introduit la fonction  $f(x) = (u/|\nabla u|)$  qui est continue à valeurs dans  $]0, +\infty]$ . D'après le principe du minimum de Yau [13] (dont on voit facilement qu'il est applicable à  $f$ ), il existe une suite  $x_k$  de points de  $M$ , tels que: (i)  $f(x_k)$  tend vers  $\alpha = \inf \{f(x); x \in M\}$ , (ii)  $\nabla f(x_k)$  tend vers 0 et (iii)  $\liminf \Delta f(x_k) \geq 0$ .

En utilisant (ii), on obtient les équivalents suivants (le long de  $\{x_k\}$ ):

$$|\nabla(|\text{grad}(u)|^2)| \sim 2|\nabla u|^3/u \quad \text{et} \quad u < \nabla u, \nabla(|\nabla u|^2) > \sim 2|\nabla u|^4$$

D'autre part, d'après la formule de Bochner–Lichnerowicz et la relation

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u = 0: \quad (\Delta f) |\nabla u|^5 &\leq \left(\frac{3}{4}\right)u |\nabla(|\nabla(u)|^2)|^2 \\ &- |\nabla u|^2 \{u \|D^2(u)\|^2 + \langle \nabla u, \nabla(|(u)|^2) \rangle\} + b^2(n-1) |\nabla u|^4. \end{aligned}$$

(en tenant compte de la minoration de la courbure de Ricci). Cette relation combinée aux équivalents précédents donne au point  $x_k$ :

$$\Delta f \leq (1 + \varepsilon_k)(|\nabla u|/u) + b^2(n-1)(u/|\nabla u|) - u \|D^2 u\|^2 |\nabla u|^{-3}$$

où  $\lim \varepsilon_k = 0$ . On détermine enfin une minoration de  $\|D^2 u\|$ : utilisant un repère  $X_1, X_2, \dots, X_n$  adapté en  $m = x_k$ , avec  $X_1$  parallèle à  $\nabla u$  en  $m$ , et notant indiciellement les dérivations correspondantes, on a, en modifiant légèrement

[13]:

$$\sum_{i \geq 2} u_{ii}^2 \geq (1/(n-1)) \left( \sum_{i \geq 2} u_{ii} \right)^2 = (1/(n-1)) (\Delta u - u_{11})^2 = (1/(n-1)) (\lambda u + u_{11})^2$$

On peut encore estimer  $u_{11}$  en  $m = x_k$ , à l'aide de (ii), en tenant compte de  $u_1 = |\nabla u|$  et  $u_i = 0$  si  $i \neq 1$ ; on obtient  $u_{11} \sim \{(|\nabla u|^2)/u\}$ . D'où,

$$\sum_{i \geq 1} u_{ii}^2 \geq \{(1 + 1/(n-1))u^{-2} |\nabla u|^4 + 2(\lambda/(n-1)) |\nabla u|^2 + (\lambda^2/(n-1))u^2\} (1 + \varepsilon_k)$$

avec une nouvelle suite  $\varepsilon_k$  tendant vers 0. Revenant alors à la majoration de  $\Delta f$ , on obtient, d'après (iii), en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ ,  $\alpha > 0$  et:

$$0 \leq -(1/\alpha(n-1)) + \{b^2(n-1) - 2\lambda/(n-1)\}\alpha - (\lambda^2/(n-1))\alpha^3$$

soit, si  $\beta = 1/\alpha$ :  $\beta^4 - (b^2(n-1)^2 - 2\lambda)\beta^2 + \lambda^2 \leq 0$ . Par conséquent:

$$\beta^2 \leq (\frac{1}{2})\{b^2(n-1)^2 - 2\lambda + \sqrt{(b^4(n-1)^4 - 4\lambda b^2(n-1)^2)}\}$$

ou

$$\beta^2 \leq [(b(n-1)/2) + \sqrt{\{b^2(n-1)^2/4 - \lambda\}}]^2$$

et le théorème est établi.

L'énoncé suivant s'étend aux opérateurs elliptiques considérés dans [1]; remarquons aussi que cet énoncé tombe en défaut si on autorise la valeur  $a = 0$ .

**PROPOSITION 1.** *On peut associer à chaque  $\varepsilon > 0$  un nombre  $r = R(\varepsilon, a, b, \lambda, \lambda_1)$ ,  $r > 2$ , tel que pour toute solution positive  $u$  de  $\Delta u + \lambda u = 0$  ( $\lambda < \lambda_1$ ) sur la boule  $B(m, r)$  de  $M$ , il existe une fonction  $v$   $\lambda$ -propre et positive sur  $M$  tout entier vérifiant  $|u - v| \leq \varepsilon$  sur  $B(m, 1)$ .*

*Preuve.* Désignons par  $r'$  un réel  $> 2$  fixé, qui sera déterminé ultérieurement en fonction de  $\varepsilon > 0$ . Soit, en supposant  $r > 2r'$ ,  $u' = \inf \{s; s\Delta + \lambda I$ -surharmonique  $\geq 0$  sur  $B(m, r)$ ,  $s \geq u$  sur  $B(m, r')\}$ .  $u'$  est un  $\Delta + \lambda I$  potentiel sur  $B(m, r)$  porté par  $\partial B(m, r')$  et égal à  $u$  sur  $B(m, r')$ . En particulier,  $u' = G_0 \mu$  pour une mesure  $\mu$  portée par  $\partial B(m, r')$ ,  $G_0$  désignant la fonction de Green de la boule  $B(m, r)$  au niveau  $\lambda$ . Notons  $G$  la fonction de Green de même niveau pour  $M$  tout entier. D'après le lemme 1 plus bas, on a  $(1 - \varepsilon)G \leq G_0 \leq G$  sur  $\partial B(P, r') \times B(P, 2)$  si  $r$  est assez grand ( $r'$  étant fixé). Par conséquent,  $w = G\mu$

est un  $\Delta + \lambda I$  potentiel sur  $M$ , porté par  $\partial B(P, r')$  et tel que:  $(1 - \varepsilon)w \leq u \leq w$  sur  $B(0, 2)$ .

Reste à approcher  $w$  par une fonction  $\Delta + \lambda I$ -harmonique  $>0$  sur  $M$ : il suffit en fait d'approcher chaque potentiel ponctuel  $G_x$ ,  $x \in \partial B(P, r')$ : notons  $q = G_x/G(x, P)$  et  $K_\xi$  la  $\Delta + \lambda I$ -minimale normalisée en  $P$ , associée au point  $\xi$  extrémité de la demi-géodésique issue de  $P$  et traversant  $x$ . Prenant un cône de sommet  $x$ , d'ouverture  $\pi/4$  et d'axe  $\overline{xP}$ , on a, en utilisant le lemme 2, et pour  $r'$  assez grand ( $r' \geq R(\varepsilon, a, b, \lambda, \lambda_1)$ ):

$$(1 - \varepsilon)K_\xi \leq q \leq (1 + \varepsilon)K_\xi \text{ sur } B(P, 1)$$

En intégrant par rapport à  $\nu = G(P, \cdot)\mu$ , et en notant  $v = \int K_\xi d\nu(\xi)$ , on a

$$(1 - \varepsilon)v \leq w \leq (1 + \varepsilon)v \text{ sur } B(P, 1)$$

et la proposition est établie.

LEMME 1. Avec les notations précédentes, on a, pour  $r'$  fixé et  $r$  assez grand ( $r \geq R(a, b, \varepsilon, r', \lambda, \lambda_1)$ ):

$$\forall x, y \in B(m, r') \quad 0 < G(x, y) - G_0(x, y) \leq \varepsilon G(x, y)$$

Observons que  $w: y \rightarrow (G(x, y) - G_0(x, y))$  est  $\lambda$ -harmonique  $>0$  sur  $B(m, r)$ , majorée par  $G(x, y)$  pour  $y \in \partial B(m, r)$ . Introduisons  $\lambda'$ ,  $\lambda < \lambda' < \lambda_1$ , la fonction de Green  $g$  de niveau  $\lambda'$  et pôle  $x$  sur  $M$ , et utilisons l'estimée (6'); on obtient

$$w(y) \leq c \exp(-\beta r/2)g(y)$$

pour  $y \in \partial B(m, r)$  et a fortiori, d'après le principe du maximum pour tous les  $y$  de  $B(m, r)$ ; d'autre part ( $r'$  étant fixé) il existe une constante  $c > 0$  telle que  $g$  soit majorée sur  $B(m, 2r')$  par  $c'G(x, \cdot)$ ; de sorte que  $w(y) \leq cc' \exp(-\beta r/2)G(x, y)$  sur cette boule, et le lemme s'ensuit.

Pour le lemme suivant, on peut se placer dans les hypothèses du §1.

LEMME 2. Soient  $\gamma$  une demi-geodesique issue de  $0 = \gamma(0)$ ,  $\Gamma$  le cône geodesique de sommet  $0$ , direction  $\gamma'(0)$  et angle au sommet  $\theta$ ,  $0 < \theta < \pi$  et pour  $m$  entier  $\geq 1$ ,  $\Gamma_m$  le cône analogue de sommet  $A_m = \gamma(m)$  et direction  $\gamma'(m)$ . Alors, pour tout  $\lambda < \lambda_1$ , et tout couple  $u, v$  de fonctions  $\mathcal{L}_\lambda$ -harmoniques  $>0$  sur  $\Gamma$ , nulles

à l'infini au sens de  $\mathcal{L}_\lambda$  ([1]), on a sur  $\Gamma_m$ :

$$u(x) \leq (1 + C\beta^m)(u(A_m)/v(A_m))v(x)$$

(où  $C = C(a, b, v, \lambda, \lambda_1, \theta) > 0$ , et  $0 < \beta < 1$ ,  $\beta = \beta(a, b, v, \lambda, \lambda_1, \theta) > 0$ ).

Cet énoncé est une conséquence standard du principe de Harnack à la frontière (voir par exemple la preuve du théorème 6.2 de [3]). On sait ([1]) qu'il existe une constante  $c = c(a, b, v, \lambda, \lambda_1) > 0$  telle que:

$$(1 + c)^{-1}\{f(A_k)/g(A_k)\}g(x) \leq f(x) \leq (1 + c)\{f(A_k)/g(A_k)\}g(x) \quad (*)$$

sur  $\Gamma_k$ , pour  $f$  et  $g$   $\mathcal{L}_\lambda$ -harmoniques  $\geq 0$  sur  $\Gamma_{k-1}$ , nulles à l'infini au sens de  $\mathcal{L}_\lambda$ . Utilisant (\*), on voit aussi que pour  $x, y \in \Gamma_k$ :

$$f(x) \leq (1 + c)^2\{f(y)/g(y)\}g(x). \quad (*')$$

Soient alors  $u$  et  $v$  comme dans l'énoncé; pour  $s$  entier  $\geq 1$ , notons  $\gamma_s$  la meilleure constante  $\geq 0$  telle que pour tout  $x, y \in \Gamma_s$

$$(1 + \gamma_s)^{-1}\{u(x)/u(y)\} \leq v(x)/v(y) \leq (1 + \gamma_s)\{u(x)/u(y)\}$$

Or, puisque pour  $y \in \Gamma_{s+1}$ ,  $x \rightarrow (1 + \gamma_s)\{u(x)/u(y)\} - \{v(x)/v(y)\}$  est  $\mathcal{L}_\lambda$ -harmonique  $> 0$  sur  $\Gamma_s$ , on a d'après (\*') (avec le même  $y$  et  $k = s + 1$ ):

$$(1 + \gamma_s)\{u(x)/u(y)\} - \{v(x)/v(y)\} \geq \gamma_s c' \{u(x)/u(y)\} \quad c' = (1 + c)^{-2}$$

pour  $x, y \in \Gamma_{s+1}$ . D'où  $\{v(x)/v(y)\} \leq (1 + \gamma_s(1 - c'))\{u(x)/u(y)\}$ .

Ce qui montre que  $\gamma_{s+1} \leq \gamma_s(1 - c')$ , et finalement  $\gamma_s \leq \gamma_1(1 - c')^{s-1}$ .

Le théorème 3 et la proposition 1 conduisent tout naturellement à une estimation de la constante de l'inégalité de Harnack infinitésimale "locale" de Cheng-Yau ([13], [8]) pour les grandes boules de  $M$ .

**PROPOSITION 2.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda < \lambda_1$ , il existe  $R = R_0(\varepsilon, a, b, \lambda, \lambda_1) > 0$  tel que pour toute fonction  $u$ ,  $\Delta + \lambda I$ -harmonique positive sur une boule  $B(P, R)$  de  $M$ , on ait*

$$|\nabla u(P)| \leq (\varepsilon + \sqrt{\lambda_0} + \sqrt{(\lambda_0 - \lambda)})u(P)$$

*Preuve.* On peut supposer  $u(P) = 1$ . Soit  $\delta \in ]0, 1[$ ; d'après la proposition 1, si  $R \geq R(\delta, a, b, \lambda, \lambda_1)$  il existe  $v$ ,  $\lambda$ -propre et  $> 0$  sur  $M$ , telle que  $|u - v| < \delta u$



sur  $B(P, 1)$ . Appliquant l'inégalité de Cheng-Yau ([8]) pour  $u$  et  $v - (1 - \delta)u$  (qui sont positives sur  $B(P, 1)$ ), on a:

$$\begin{aligned} |\nabla v(P) - \nabla u(P)| &\leq |\nabla v(P) - (1 - \delta)\nabla u(P)| + \delta |\nabla u(P)| \\ &\leq C\{(v(P) - (1 - \delta)u(P)) + \delta u(P)\} \end{aligned}$$

et  $|\nabla v(P) - \nabla u(P)| \leq 3C\delta u(P)$ , avec  $C = C(n, b, \lambda)$ . On conclut alors grâce au théorème 3.

En particulier, on a une estimation optimale pour la fonction de Green:

**COROLLAIRE 1.** Soient  $\lambda < \lambda_1$ ,  $V$  la fonction de Green de  $M$  au niveau  $\lambda$  et de pôle  $P$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Pour  $R \geq R_0(\varepsilon, a, b, \lambda, \lambda_1)$  on a:

$$|\nabla V|/V \leq \varepsilon + \sqrt{\lambda_0} + \sqrt{(\lambda_0 - \lambda)} \quad \text{sur } M \setminus B(P, R)$$

Il est possible qu'on puisse améliorer l'estimation suivante en y remplaçant  $\gamma$  par  $\gamma' = \sqrt{(\lambda_0 - \lambda)} - \sqrt{(\lambda_0 - \lambda')}$ ; mais nous ne sommes pas parvenu à établir (ou à mettre en défaut) cette propriété.

**THÉORÈME 4.** Soient  $\lambda, \lambda'$  tels que  $\lambda < \lambda' < \lambda_1$ . Posons  $4e = (n - 1)^2(b - a)^2 + 4(n - 1)(b - a)\sqrt{(\lambda_0 - \lambda')}$ ,  $\mu = \lambda - e$ ,  $\mu' = \lambda' - e$ , et  $\gamma = \sqrt{(\lambda_0 - \mu)} - \sqrt{(\lambda_0 - \mu')}$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C = C(\varepsilon, a, b, \lambda, \lambda', \lambda_1)$  tel que pour tout  $x, y \in M$ :

$$G_\lambda(x, y) \leq C \exp(-(\gamma - \varepsilon) d(x, y)) \quad G_{\lambda'}(x, y)$$

En particulier  $\gamma \geq (\lambda' - \lambda)/[2\sqrt{(\lambda_0 - \mu)}]$  et, si  $\lambda' > 0$ ,  $e \leq 3(n - 1)^2(b - a)b/4$ .

*Preuve.* Fixons le point  $x = P$ , et notons  $p, \pi$  les fonctions de Green de pôles  $P$  de niveaux respectifs  $\lambda$  et  $\lambda'$ . La fonction  $u = p/\pi$  vérifie l'équation

$$\Delta u + 2\pi^{-1}\nabla\pi\nabla u + (\lambda - \lambda')u = 0 \quad \text{sur } M \setminus \{P\} \quad (*)$$

Soient  $s$  et  $\sigma$  les fonctions de Green analogues pour les niveaux  $\mu - \varepsilon$  et  $\mu' - \varepsilon$  sur l'espace hyperbolique  $N = H_n(-b^2)$ , et le pôle 0. En utilisant les applications exponentielles en 0 et  $P$ , et une isométrie quelconque de  $N_0$  sur  $M_p$ , on peut considérer  $v = s/\sigma$  comme une fonction sur  $M$ ;  $v$  est alors fonction décroissante de  $r = d(P, x)$  et vérifie (puisque  $\lambda - \lambda' = \mu - \mu'$ ):

$$v''(r) + \{(n - 1)b \coth(br) + 2\sigma'(r)/\sigma(r)\}v'(r) + (\lambda - \lambda')v(r) = 0$$

Or, pour  $r$  assez grand, on a

$$\begin{aligned} & \Delta v + 2\pi^{-1}\nabla\pi\nabla v + (\lambda' - \lambda)v \\ & = v''(r) + (\Delta r + 2\pi^{-1}\langle\nabla\pi, \nabla r\rangle)v'(r) + (\lambda - \lambda')v(r) \leq 0 \end{aligned}$$

En effet, à l'infini  $|\sigma'(r)|/\sigma(r) \sim \sqrt{\lambda_0 + \sqrt{(\lambda_0 - \mu' + \varepsilon)}}$ ,  $\Delta r \geq (n-1)\operatorname{acoth}(ar) \sim (n-1)a$ , et d'après le corollaire 3:  $\pi^{-1}|\langle\nabla\pi, \nabla r\rangle| \leq \sqrt{\lambda_0 + \sqrt{(\lambda_0 - \lambda' + \varepsilon')}}$  pour  $r$  assez grand (dépendant de  $\varepsilon'$ ). Il reste à constater que le choix de  $e$  assure que:

$$(n-1)a - 2(\sqrt{\lambda_0 + \sqrt{(\lambda_0 - \lambda' + \varepsilon')}}) + \varepsilon' \geq (n-1)b - 2(\sqrt{\lambda_0 + \sqrt{(\lambda_0 - \mu' + \varepsilon)}})$$

pour  $r$  assez grand et  $\varepsilon' < \varepsilon$ .

$v$  est donc surharmonique  $>0$  sur  $M$  relativement à (\*) pour  $r > R$  et, ce qui revient au même,  $\pi v$  est  $\lambda$ -surharmonique sur  $\{x; d(x, P) > R\}$ . Comme  $p \leq C\pi v$  sur  $\partial B(P, 2R)$  (pour une constante  $C > 0$ ), cette inégalité se prolonge à  $M \setminus B(P, 2R)$ , d'après le principe du maximum de R. M. Hervé ([10], p. 429). D'où l'assertion.

*Remarque.* Comme chaque  $G_\lambda$  est borné à l'infini, l'estimation précédente donne une majoration de chaque  $G_\lambda$ . Mais si on connaît  $\lambda_1$  (et surtout pour  $\lambda$  voisin de  $\lambda_1$ ) la méthode de Cheeger–Gromov–Taylor [7] conduit à un bien meilleur résultat, à savoir:

$$G_\lambda(x, y) \leq C \exp(-\{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda - \varepsilon)}\} d(x, y))$$

Il semble malheureusement difficile d'adapter la méthode de ces auteurs au problème de l'estimation des quotients de fonctions de Green.

*Application à l'estimation de  $\alpha$  dans le théorème 1* (pour  $\mathcal{L} = \Delta$ ): d'après [7], on peut poser  $\beta' = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda - \varepsilon)}$  et (d'après le théorème 4):

$$\beta = b((n-1)/2)\{\sqrt{[1 + 3(1 - a/b)]} - \sqrt{[1 + 3(1 - a/b) - (4\lambda/b^2(n-1)^2)]}\}$$

en particulier

$$\beta \geq \beta_1 = \lambda b^{-1}(n-1)^{-1}(1 + 3(1 - a/b))^{1/2}$$

D'après la preuve du théorème 1, tout  $\alpha < \min\{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda)}, \beta\}$  convient.

### 3. Un exemple de variété sans fonction de Green au niveau $\lambda_1$

Il s'agit de la fonction de Green relative à  $\Delta + \lambda_1 I$ ,  $\lambda_1 =$  première valeur propre du Laplacien  $\Delta$  sur  $M$ . On prendra pour  $M$  le plan  $\mathbb{R}^2$  muni d'une métrique de la forme  $ds^2 = dr^2 + g^2(r) d\theta^2$  en coordonnées polaires  $r, \theta$  usuelles, avec une fonction  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  à préciser.

Fixons  $a, b, b'$  réels tels que  $0 < a < b' < b$ ; choisissons ensuite  $r_0 > 0$  assez grand pour que toute boule ouverte  $B = B(x, r_0)$  de l'espace hyperbolique  $H_2(-a^2)$  admette une première valeur propre  $\lambda_1(B)$  strictement inférieure à  $b'^2/4 = \lambda_1(H_2(-b'^2))$ ; c'est possible puisque  $\lambda_1(B)$  ne dépend que de  $r_0$  et tend vers  $a^2/4$  lorsque  $r_0$  tend vers  $+\infty$ .

Posons  $g_0(r) = sh(b'r)/b'$ , pour  $r \geq 0$  ( $g_0$  correspond à  $M = H_2(-b'^2)$ ). Introduisons aussi une fonction  $g_1$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+$ , de la forme suivante:

$$g_1(r) = sh(ar)/a \quad \text{si } r \leq r_1, \quad g_1(r) = g_0(r) \quad \text{pour } r > r_2,$$

et

$$\{sh(ar)/a\} \leq g_1(r) \leq g_0(r) \quad \text{pour } r_1 \leq r \leq r_2$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont des réels tels que  $r_0 < r_1 < r_2$ . On impose aussi la condition:

$$a^2 \leq (\partial^2 g_1)/g_1 \leq b^2$$

L'existence d'une telle fonction  $g_1$ , (pour  $r_2$  assez grand,  $r_1$  étant fixé) est élémentaire. On prendra  $g$  dans la famille:

$$g_t(r) = (1 - t)g_0(r) + tg_1(r) \quad \text{pour } r \geq 0,$$

$t$  étant un paramètre réel compris entre 0 et 1. Remarquons que quel que soit le choix de  $t$ ,  $M$  sera à courbure partout comprise entre  $-a^2$  et  $-b^2$ , et telle que le complémentaire de la boule  $B(0, r_2)$  soit isométrique au complémentaire dans  $H_2(-b'^2)$  de toute boule de même rayon;  $M$  contient donc des boules de  $H_2(-b'^2)$  de rayon arbitrairement grand (mais non centrées en 0). Par conséquent  $\lambda_1(M) \leq b'^2/4$ . Pour  $t = 1$ ,  $M$  est telle que la boule  $B(0, r_1)$  est isométrique à toute boule de même rayon dans  $H_2(-a^2)$ , et  $\lambda_1(M) < b'^2/4$ .

Soit  $\lambda_1(g_s)$  la première valeur propre de  $\mathbb{R}^2$  pour la métrique  $ds^2 = dr^2 + g_s^2(r) d\theta^2$ , et soit  $t = \sup \{s \in [0, 1]; \lambda_1(g_s) = b'^2/4\} = \sup \{s \in [0, 1]; \lambda_1(g_s) \geq b'^2/4\}$ .

On a  $\lambda_1(g_t) = b'^2/4$ , la première valeur propre étant une fonction s.c.s de la

métrique en général; en particulier  $t < 1$ . Supposons qu'il existe une fonction de Green pour  $\Delta_t + (b'^2/4)I$ , ( $\Delta_t =$  Laplace Beltrami correspondant à  $g_t$ ); fixons une fonction test  $\varphi$  positive sur  $M$ , égale à 1 sur  $B(0, r_2)$ ; on peut alors trouver  $u > 0$  sur  $M$ , telle que  $\Delta_t u + (b'^2/4)u = -\varphi$  ( $u$  est d'ailleurs de classe  $C^\infty$ ); or, si  $\varepsilon$  est  $> 0$  assez petit on aura encore:

$$\Delta_{t+\varepsilon} u + (b'^2/4)u \leq 0$$

puisque  $\Delta_s$  ne dépend pas de  $s$  hors de  $B(0, r_2)$ . Comme l'égalité (partout sur  $M$ ) est exclue, on voit qu'il existe sur  $M$  une fonction  $> 0$  et  $\{\Delta_{t+\varepsilon} + (b'^2/4)I\}$ -surharmonique, non harmonique. D'où  $\lambda_1(g_{t+\varepsilon}) \geq b'^2/4$ , en contradiction avec la définition de  $t$ . Il n'y a donc pas de fonction de Green sur  $M$  au niveau  $\lambda_1(M)$ .

#### 4. Exemples où les $\lambda_1$ -fonctions propres ne s'annulent pas à l'infini

On va d'abord construire un exemple sans fonction de Green au niveau  $\lambda_1$ . Fixons  $a, b, b', r_0, r_1, r_2$  comme dans la section précédente. Considérons l'espace hyperbolique  $M_0 = H_2(-b'^2)$ , muni de sa métrique  $h_0$ , prenons dans  $M_0$  une géodésique  $\gamma$ , de vitesse unitaire, issue d'un point de référence  $0 = \gamma(0)$ , et sur  $\gamma$  des points  $x_k = \gamma(4kr_2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Modifions la métrique  $h_0$  exactement comme dans la section précédente, à l'aide des fonctions  $g_s$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , mais en opérant maintenant dans chacune des boules  $B_k = B(x_k, r_2)$ , à partir de son centre pris comme point de référence, de manière à obtenir des métriques  $h_s$  égales à  $h_0$  sur les rayons issus de  $x_k$  dans chaque boule  $B_k$ , et sur  $M \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k$ , et de courbure constante  $-a^2$  sur les boules  $B(x_k, r_1)$ . On peut de plus supposer les  $h_s$  invariantes par l'isométrie directe  $T$  de  $M_0$  qui laisse  $\gamma$  invariante et amène  $x_0$  sur  $x_1$  (et donc  $x_k$  sur  $x_{k+1}$  et  $B_k$  sur  $B_{k+1}$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ ). Comme  $h_s$  est sur chaque  $B_k$  invariante par les symétries de  $M_0$  laissant fixe  $x_k$ ,  $h_s$  est globalement invariante par la symétrie  $\sigma$  de  $M_0$  qui permute  $x_0$  et  $x_1$ . Toutes ces métriques sont à courbures pincées entre  $-a^2$  et  $-b^2$  et de premières valeurs propres  $\lambda_1(h_s)$  majorées par  $b'^2/4$  (avec égalité si  $s = 0$ ). De plus, on vérifie facilement que  $s \rightarrow \lambda_1(h_s)$  est continue sur  $[0, 1]$  en observant que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $h_s \leq (1 + \varepsilon)h_{s'}$ , si  $|s' - s|$  est suffisamment petit; il suffit ensuite d'utiliser la définition de  $\lambda_1(h_s)$ .

Soit  $b''$  un réel,  $b'' < b'$ , tel que  $(b''^2/4)$  soit strictement supérieur à la première valeur propre d'une boule de  $H_2(-a^2)$  de rayon  $r_0$ . On a donc  $\lambda_1(h_1) < b''^2/4$ . Soient  $t = \sup \{s \in [0, 1]; \lambda_1(h_s) \geq b''^2/4\}$ ,  $h = h_t$  et  $M = \mathbb{R}^2$  muni de  $h$ .

Il est clair que  $\lambda_1(M) = \lambda_1(h_t) = b''^2/4$ . On va voir que  $M$  n'admet pas de

fonction de Green au niveau  $\lambda_1$  à l'aide du lemme suivant:

**LEMME 3.** *Soit  $G$  la fonction de Green de  $\Delta + \lambda I$  sur  $M$  (pour un  $\lambda \leq b''^2/4$ );  $G$  admet une décroissance exponentielle sur  $\gamma$  au sens qu'il existe deux réels strictement positifs  $C$  et  $\alpha$  tels que:*

$$\forall k, k' \in \mathbb{Z}, \quad k \neq k' \quad G(x_k, x_{k'}) \leq C e^{-\alpha|k-k'|}$$

Soient  $\Gamma$  la géodésique médiatrice du segment géodésique  $\overline{x_0x_1}$  et  $\Gamma_1$  une demi-géodésique issue de  $x_1$  et perpendiculaire à  $\overline{x_0x_2}$ . Soit  $C_0$  un cône (dans  $M$ ) de sommet  $x_1$ , de direction  $\Gamma_1$  et d'angle au sommet suffisamment petit pour que  $C_0$  ne rencontre pas  $\Gamma$ .  $C_0$  est aussi un cône dans  $M_0$ . On a, par raison de symétrie  $G_{x_0} = G_{x_1}$  sur  $\Gamma$ ; avec le principe du maximum ([10], p. 429), on en déduit que  $G_{x_0} < G_{x_1}$  sur  $\omega$  la composante de  $M \setminus \Gamma$  contenant  $x_1$ ; Appliquant le principe de Harnack à l'infini aux fonctions  $\lambda$ -harmoniques positives  $G_{x_0}$  et  $(G_{x_1} - G_{x_0})$ , sur le cône tronqué  $C' = C_0 \setminus B_1$  de  $M_0$  (noter que le niveau  $\lambda$  est strictement plus petit que  $\lambda_1(h_0)$ ), on obtient

$$G_{x_1} - G_{x_0} \geq c G_{x_1} \quad \text{sur } \Gamma_1 \setminus B(x_1, 2r_1)$$

pour une certaine constante  $c > 0$ . Quitte à diminuer  $c$ , cette estimation a lieu sur  $\Gamma_1$  tout entière, et, de même sur  $\Gamma'_1$  la demi-géodésique opposée. On a donc à l'aide du principe du maximum:

$$G_{x_0} \leq (1 - \delta) G_{x_1}, \quad \delta > 0$$

sur  $\omega_1$  la région délimitée par  $\Gamma''_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma'_1$  et contenant  $x_2$ ; en particulier

$$G(x_0, x_k) \leq (1 - \delta) G(x_1, x_k) \quad \text{pour tout } t \geq 1$$

Utilisant l'invariance de  $G$  par l'action de  $T$ , on en déduit par itération:

$$\forall p \geq 1, k \in \mathbb{Z}, G(x_k, x_{k+p}) \leq (1 - \delta)^p G(x_k, x_{k+1}) \Rightarrow G(x_k, x_{k+p}) \leq c(1 - \delta)^p$$

ce qui achève d'établir le lemme.

**COROLLAIRE 2.**  *$M$  n'admet pas de fonction de Green au niveau  $\lambda_1(M) = b''^2/4$ .*

Supposons l'existence de la fonction de Green  $G$  de  $M$  au niveau  $\lambda_1(M)$ ; soit  $\varphi$  une fonction test  $\geq 0$  sur  $M$  à support dans  $B(x_0, 2r_2)$ , égale à 1 sur  $B_0$  et soit

$\psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi \circ T^k$ ; le lemme précédent montre que le potentiel de Green  $\pi = G\psi$  n'est pas identique à l'infini (la série  $\sum_{k \neq 0} \max_{B_k} \{G_{x_0}\}$  étant convergente). C'est donc une fonction  $C^\infty$ , invariante par  $T$ , qui vérifie:

$$\Delta_t \pi + (b''^2/4)\pi = -\psi \quad (\Delta_t = \text{Laplace-Beltrami de } h_t)$$

Si  $\varepsilon > 0$  est assez petit on aura encore  $\Delta_{t+\varepsilon} \pi + (b''^2/4)\pi \leq 0$  (et  $\neq 0$ ), puisqu'il suffit de vérifier cette inégalité sur la boule  $B_0$ . L'existence d'une sursolution  $> 0$  (qui n'est pas solution) pour le niveau  $b''^2/4$  entraîne que  $\lambda_1(g_{t+\varepsilon}) \leq b''^2/4$  ce qui contredit la définition de  $t$ .

**CONSÉQUENCE 1.** Une fonction  $u$ , propre au niveau  $\lambda_1$  et positive sur  $M$  ne peut tendre vers zéro à l'infini que si elle est nulle.

Comme il n'y a pas de fonction de Green  $G_{\lambda_1}$ , les fonctions  $\lambda_1$ -propres  $> 0$  sont deux à deux proportionnelles; donc si  $u$  est  $> 0$ , on doit avoir  $u \circ T = cu$ , et  $u \circ \sigma = u$ . La suite  $\{u(x_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est donc constante  $> 0$ ; d'où l'assertion.

**CONSÉQUENCE 2.** Complétons la remarque après le théorème 1, en montrant que pour tout  $\delta > 0$ , on a si  $\lambda < \lambda_0$  est assez voisin de  $\lambda_0$ :  $G_\lambda(x_0, x_k) > Ce^{-\delta k}$ , pour tout  $k > 0$ , et une constante  $C = C_\lambda > 0$ .

Pour cela, observons d'abord que pour  $\lambda \rightarrow \lambda_1$ ,  $y \notin \{x_1, x_0\}$ ,  $G_\lambda(x, y)/G_\lambda(x_1, y)$  tend vers  $u(x)$  l'unique fonction  $\lambda_1$ -harmonique sur  $M$ , normalisée en  $x_1$ . Comme  $u(x_1) = u(x_0)$ , on voit que  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} (G_\lambda(x_0, y)/G_\lambda(x_1, y)) = 1$  uniformément sur tout compact de  $M$  ne contenant pas  $x_0$  ou  $x_1$ .

Soit alors  $\Gamma'$  la géodésique médiatrice du segment géodésique  $x_1x_2$ ; fixons un cône  $C$  d'axe  $\Gamma'$ , de sommet sur  $\gamma$ , et d'angle assez petit pour que  $C$  ne rencontre aucune boule  $B_k$  et fixons  $\varepsilon > 0$ . D'après le lemme 2 et les remarques précédentes, on aura pour  $\lambda$  suffisamment proche de  $\lambda_1$ :

$$(1 - \varepsilon)G_\lambda(x_1, x) \leq G_\lambda(x_0, x) \leq (1 + \varepsilon)G_\lambda(x_1, x) \quad (20)$$

pour  $x$  sur  $\Gamma' \cap C$  et assez loin (en fonction de  $\varepsilon$ ) du sommet de  $C$ . Utilisant encore les remarques précédentes et la symétrie autour de  $\gamma$ , on voit que (20) est vérifiée sur  $\Gamma'$  tout entier dès que  $\lambda_1 - \lambda$  est  $> 0$  assez petit. Mais alors, d'après le principe du maximum:

$$G_\lambda(x_0, x_k) \geq (1 - \varepsilon)G_\lambda(x_1, x_k) \quad \text{pour } k = 2, 3, \dots$$

et en itérant (compte tenu de l'invariance par  $T$ ):

$$G_\lambda(x_0, x_k) \geq (1 - \varepsilon)^{k-1} G_\lambda(x_{k-1}, x_k) = G_\lambda(x_0, x_1)(1 - \varepsilon)^{k-1} = c_\lambda(1 - \varepsilon)^{k-1}$$

C'est ce qu'on cherchait à établir.

**CONSÉQUENCE 3.** Voyons enfin comment en modifiant la métrique  $h$  de  $M$  sur une boule on peut obtenir une variété  $M'$ , admettant une fonction de Green  $G_\lambda$  au niveau  $\lambda = \lambda_1(h)$ , mais telle que  $G_\lambda(x, \cdot)$  ne tende pas vers 0 à l'infini ( $\forall x \in M'$ )—et *a fortiori* telle que toute fonction  $\lambda$ -propre  $>0$  ne tende pas vers zéro à l'infini.

Fixons une boule fermée  $B \subset M \setminus (\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k)$  et une fonction  $\varphi$  de classe  $C^\infty$  sur  $M$ , égale à 1 hors de  $B$  et telle que  $0 < \varphi \leq 1$ ,  $\varphi \neq 1$  sur  $M$ ; soit  $h'$  la métrique (conforme à  $h$ ),  $h' = \varphi^2 h$ . On peut choisir  $\varphi$  assez voisine (au sens  $C^2$ ) de 1 sur  $B$  pour que la courbure de  $h'$  soit encore pincée entre  $-a^2$  et  $-b^2$ .

Soit  $M'$  la variété Riemannienne obtenue en munissant  $\mathbb{R}^2$  de la métrique  $h'$ ; son opérateur de Laplace–Beltrami est  $\Delta' = \varphi^{-2} \Delta$ ,  $\Delta$  désignant celui de  $M$ . Si  $u$  est l'une des fonctions propres  $>0$  de  $M$  au niveau  $\lambda = \lambda_1(M) (= -b'^2/4)$  on a:  $\Delta u + \lambda u = 0$ , donc  $\Delta' u \leq \Delta u < 0$  et  $\Delta' u + \lambda u \leq 0$ ,  $\Delta' u + \lambda u$  non identiquement nul. Ce qui entraîne que  $\lambda_1(M') \geq \lambda$  et plus précisément que  $M'$  admet une fonction de Green  $G'$  au niveau  $\lambda$ . Le lemme suivant montre que  $G'_x$  ne tend pas vers 0 à l'infini (ce qui entraîne en particulier que  $\lambda = \lambda_1(M')$ ) et achèvera de prouver notre assertion).

**LEMME 4.** Soient  $G''$  la fonction de Green de  $M \setminus B = M' \setminus B$  au niveau  $\lambda = \lambda_1(M)$ ,  $u$  une fonction  $\lambda$ -propre  $>0$  sur  $M$ , et  $x \in M \setminus B$ . Il existe une constante  $c = c_x > 0$ , telle que  $G''_x \geq cu$  au voisinage de l'infini.

Comme il existe sur  $M$  une  $\Delta + \lambda I$  solution continue et strictement positive, on sait qu'on peut résoudre le problème de Dirichlet (correspondant à cet opérateur) dans tout ouvert borné de  $M$  à frontière régulière. Soit  $B'$  la boule ouverte de  $M$  concentrique à  $B$  et de rayon double, et soit  $w$  la solution du problème:

$$\Delta w + \lambda w = 0 \quad \text{sur } B' \setminus B$$

$$w = 0 \quad \text{sur } \partial B, \quad w = u \quad \text{sur } \partial B'$$

Notons enfin  $v$  la fonction continue sur  $M \setminus B$  égale à  $w$  sur  $B' \setminus B$  et à  $u$  sur  $M \setminus B'$ . Il est clair que  $v$  est une fonction  $\Delta + \lambda I$ -surharmonique sur  $M \setminus B$ ; en fait  $v$  est



même un  $\mathcal{L}'$ -potentiel ( $\mathcal{L}' = \Delta' + \lambda I$ ) sur  $M \setminus B$ , c'est à dire que 0 est la seule minorante  $\mathcal{L}'$ -harmonique  $\geq 0$  de  $v$  sur  $M \setminus B$ ; en effet, une telle minorante prolongée par 0 sur  $B$ , devient une fonction  $\mathcal{L}'$ -sous-harmonique  $u'$  sur  $M$ , et  $u - u'$  serait  $\mathcal{L}'$ -surharmonique (et non  $\mathcal{L}'$ -harmonique) sur  $M$  ce qui est impossible puisque par construction  $M$  n'admet pas de fonction de Green au niveau  $\lambda$ .

Soit alors  $c > 0$  suffisamment petit pour que  $G_x'' \geq c v$  sur  $\partial B'$ . D'après le principe du maximum de R. M. Hervé [10],  $v$  étant un  $\mathcal{L}'$ -potentiel, on a  $G_x'' \geq c v$  sur  $M \setminus B$  et par conséquent  $G_x'' \geq c u$  hors de  $B'$ . CQFD.

## 5. Remarques sur la théorie de S. J. Patterson

On se propose dans cette partie d'indiquer une généralisation très partielle des résultats de Patterson ([11]) concernant les liens entre fonctions propres et ensembles limites des groupes Fuchsien sur l'espace hyperbolique. Soit  $\Gamma$  un groupe d'isométries de  $M$  non réduit à  $\{I\}$ , opérant librement et proprement sur  $M$  et soit  $N$  la variété riemannienne  $M/\Gamma$ . Notons  $L \subset S_\infty$  l'ensemble limite de  $\Gamma$ ,  $\nu_1$  la première valeur propre de  $N$ , et  $\lambda_1$  celle de  $M$ . On a, a priori,  $\nu_1 \leq \lambda_1$  mais pour pouvoir utiliser les inégalités de Harnack à l'infini au niveau  $\nu_1$ , on supposera désormais que  $\nu_1 < \lambda_1$ . On notera  $g(x, y)$  le noyau de Green de  $M$  au niveau  $\nu_1$  et  $K_\zeta(x)$  le noyau de Poisson de  $M$  au niveau  $\nu_1$ , normalisé en  $0 \in M$ .

On a alors les propriétés suivantes:

**THÉORÈME 5.** a) *Il existe une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $L$  telle que la fonction*

$$u(x) = \int K_\zeta(x) d\mu(\zeta), \quad x \in M,$$

*soit  $\Gamma$ -automorphe sur  $M$  et  $\Delta + \nu_1 I$ -harmonique  $> 0$  sur  $M$ .*

b) *Si  $\Gamma$  admet un domaine fondamental  $U \subset M$  tel que  $\bar{U} \cap L = \emptyset$ ,  $u$  est l'unique fonction sur  $M$  ayant ces deux propriétés et telle que  $u(0) = 1$ . De plus, la série  $\sum_{\gamma \in \Gamma} g(\gamma(0), y)$  diverge pour tout  $y \in M$ , et, si  $L \neq S_\infty$ ,  $\nu_1$  est  $> 0$ .*

(Dans le cas Fuchsien,  $\nu_1 > 0$  est dû à Beardon, voir [11]). L'extension des méthodes de Patterson se fait grâce à la proposition suivante:

**PROPOSITION 3.** *Soient  $\mu \in ]0, \lambda_1[$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\alpha(\varepsilon, \mu, M) > 0$  tel que*



pour  $0 \leq \lambda \leq \lambda' \leq \mu$ , et  $|\lambda - \lambda'| \leq \alpha$  on ait:

$$G_\lambda(x, y) \geq \exp(-\varepsilon d(x, y)) G_{\lambda'}(x, y), \quad (x, y \in M \text{ et } d(x, y) \geq 1)$$

Remarquons d'abord le lemme suivant:

**LEMME 5.** *Si  $R > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  sont fixés, il existe  $\delta = \delta(\varepsilon, R, \mu, M) > 0$ , tel que pour  $0 \leq \lambda \leq \lambda' \leq \mu$ , et  $|\lambda - \lambda'| \leq \delta$ , on ait;  $\forall x, y \in M$ ,  $1 \leq d(x, y) \leq R$ ,  $G_\lambda(x, y) \geq (1 - \varepsilon) G_{\lambda'}(x, y)$ .*

Le lemme découle de l'équation résolvante  $G_{\lambda'} = G_\lambda + (\lambda' - \lambda) G_\lambda G_{\lambda'}$ , et des estimations suivantes, où  $\lambda''$  est un réel fixé avec  $\mu < \lambda'' < \lambda_1$ :

$$G_\lambda G_{\lambda'}(x, y) \leq G_\lambda G_{\lambda''}(x, y) \leq C G_{\lambda''}(x, y), \quad (C = (\lambda'' - \mu)^{-1})$$

et

$$c_1 \leq G_t(x, y) \leq c_2 \quad \text{pour } 1 \leq d(x, y) \leq R, \quad 0 \leq t \leq \lambda''.$$

*Preuve de la proposition 3.* Soient  $\{y_n\}$  une suite de points sur une demi-géodésique issue de  $x$  telle que  $d(x, y_n) = n$ .

D'après le lemme 2, on voit qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  (dépendant de  $\varepsilon$ ) tel que pour  $n > k$ ,  $0 \leq t \leq \mu$ :

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon) G_t(y_{n-k}, y_n) / G_t(y_{n-k}, y_{n+1}) &\leq G_t(x, y_n) / G_t(x, y_{n+1}) \\ &\leq (1 + \varepsilon) G_t(y_{n-k}, y_n) / G_t(y_{n-k}, y_{n+1}) \end{aligned}$$

Utilisant les niveaux  $t = \lambda$  et  $t = \lambda'$ , on obtient:

$$G_{\lambda'}(x, y_{n+1}) / G_{\lambda'}(x, y_n) \leq C(1 + \varepsilon)^2 G_\lambda(x, y_{n+1}) / G_\lambda(x, y_n)$$

avec

$$C = \{G_{\lambda'}(y_{n-k}, y_{n+1}) / G_{\lambda'}(y_{n-k}, y_n)\} / \{G_\lambda(y_{n-k}, y_{n+1}) / G_\lambda(y_{n-k}, y_n)\} \leq 1 + \varepsilon$$

si  $\lambda' - \lambda$  est suffisamment petit (d'après le lemme 5).

On en déduit, pour  $n > k$ :

$$G_{\lambda'}(x, y_n) \leq c(1 + \varepsilon)^{3(n-k)} G_\lambda(x, y_n)$$

et la proposition 3 s'ensuit sans difficulté. On peut alors établir le lemme (qui imite le lemme 3.1 de [11]):

**LEMME 6.** *Il existe une fonction croissante  $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , tendant vers  $+\infty$  à l'infini, telle que:*

- (1)  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \exp \{h(d(0, \gamma(0)))\} g(\gamma(0), y) = +\infty, y \in M$
- (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x+1) - h(x) = 0$

D'après la proposition 3, la série  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \{\exp[\varepsilon d(0, \gamma(0))] g(\gamma(0), y)\}$  est divergente pour tout  $\varepsilon > 0, y \in M$  (puisque par définition de  $\nu_1, \sum_{\gamma \in \Gamma} G_\lambda(\gamma(0), y)$  diverge ou converge selon que  $\lambda > \nu_1$  ou  $\lambda < \nu_1, y \notin \Gamma(0)$ ). Fixant alors une suite  $\varepsilon_i$  de nombres  $> 0$  décroissant vers 0, on choisira successivement des rayons  $R_i$  croissant vers  $+\infty, R_{i+1} > R_i$ , et on posera  $h(t) = \varepsilon_i(t - R_i) + h(R_i)$  pour  $R_i < t \leq R_{i+1}$ . Il suffit de choisir les  $R_i$  (successivement) assez grands pour que,  $x_1$  étant fixé dans  $M \setminus \Gamma(0)$ ,

$$\sum_{\{R_j < d(\gamma(0), 0) \leq R_{j+1}\}} \exp \{h(d(0, \gamma(0)))\} g(\gamma(0), x_1) \geq 1. \quad \text{CQFD}$$

*Preuve du théorème 5.* a) On pose  $a_\gamma = \exp(h(d(0, \gamma(0)))$  et pour  $\lambda < \nu_1, x_1 \in M \setminus \Gamma(0)$ :

$$u_\lambda = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma G_\lambda(\gamma(0), x), \quad \text{et} \quad v_\lambda = u_\lambda(x)/u_\lambda(x_1) \quad (x \in M)$$

Reprenant les méthodes de [11], on voit sans difficulté que lorsqu'on fait tendre  $\lambda$  vers  $\nu_1, \lambda < \nu_1$ , toute valeur d'adhérence des  $u_\lambda$  est  $\Delta + \nu_1 I$ -harmonique  $> 0$  sur  $M, \Gamma$ -automorphe, et de mesure associée  $\mu$  portée par  $\Gamma$ . Le caractère automorphe découle de l'équivalence  $a_\gamma \approx a_{\alpha\gamma}$  pour  $d(0, \gamma(0)) \rightarrow +\infty$  et  $\alpha \in \Gamma$  fixé.

b) Si  $U \cap L = \emptyset$ , comme  $\mu$  est portée par  $L$ , on a d'après les inégalités de Harnack à l'infini de [1],  $u(x) \leq c g(0, x)$  sur  $U$  et a fortiori

$$u(x) \leq c \sum_{\gamma \in \Gamma} g(\gamma(0), x) \quad \text{sur } M \text{ tout entier.}$$

La série de  $\Delta + \nu_1 I$  potentiels  $\sum_{\gamma \in \Gamma} g(\gamma(0), x)$  est minorée par une fonction  $\Delta + \nu_1 I$ -harmonique  $> 0$ : elle doit donc être identiquement infinie. (Sinon, elle définirait un potentiel qui, par définition, n'admet pas de minorante harmonique  $> 0$ ). Ce résultat signifie que la variété  $N = M/\Gamma$  n'admet pas de fonction de Green au niveau  $\nu_1$ . On sait que cette propriété entraîne que les fonctions harmoniques  $> 0$ , au niveau  $\nu_1$  sur  $M$  sont deux à deux proportionnelles, et on

obtient la propriété d'unicité de  $u$ . Enfin, si  $v_1$  était nul, on aurait, d'après l'unicité de  $u$ ,  $u = 1$ , ce qui contredit  $L \neq S_\infty$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] A. ANCONA, *Negatively curved manifolds, elliptic operators and the Martin boundary*, Ann. of Maths, 125, (1987), 495–536.
- [2] A. ANCONA, *Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique sur un domaine Lipschitzien*, Ann. Inst. Fourier, XVI, 2 (1978), p. 465–467.
- [3] M. ANDERSON and R. SCHOEN, *Positive Harmonic functions on complete manifolds of negative curvature*, Ann. of Math., 121 (1985), p. 429–461.
- [4] K. BURNS and A. KATOK, *Manifolds of non-positive curvature*, Ergodic Theory of Dynamic System, 5 (1985), 207–317.
- [5] I. CHAVEL, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Academic press Inc., (1984).
- [6] J. CHEEGER and D. EBIN, *Comparison theorems in differential geometry*, North Holland Publ. Co., Amsterdam, (1975).
- [7] J. CHEEGER, M. GROMOV and M. TAYLOR, *Finite propagation speed, Kernel estimates for functions of the Laplace operator and the geometry of complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry, 17 (1982), p. 15–53.
- [8] S. Y. CHENG, and S. T. YAU, *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. in Pure and applied math., 28 (1975), 333–354.
- [9] K. GOWRISANKARAN, *Fatou–Doob limit theorems in the axiomatic setting of Brelot*, Ann. Inst. Fourier, XVI, 2 (1966), p. 465–467.
- [10] R. M. HERVÉ, *Recherches sur la théorie axiomatique des fonctions surharmoniques et du Potentiel*, Ann. Inst. Fourier XII, (1962), p. 415–471.
- [11] S. J. PATTERSON, *The limit set of a Fuchsian group*. Acta Math., 136 (1976), p. 241–273.
- [12] D. SIBONY, *Théorème de limites fines et problème de Dirichlet*, Ann. Inst. Fourier XVIII, 2 (1968), p. 121–134.
- [13] S. T. YAU, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. on Pure and applied Math., 28 (1975) 201–228.

Université Paris Sud, Campus d'Orsay, Bat. 425  
91405, ORSAY, Cedex, France

Reçu le 31 mars 1987