

# Les valeurs propres inférieures à $1/4$ des surfaces de Riemann de petit rayon d'injectivité.

Autor(en): **Colbois, Bruno / Courtois, Gilles**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **64 (1989)**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-48951>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Les valeurs propres inférieures à $1/4$ des surfaces de Riemann de petit rayon d'injectivité

BRUNO COLBOIS\* et GILLES COURTOIS

## 0. Introduction

Dans ce travail, on étudie le comportement des petites valeurs propres d'une famille de surfaces de Riemann  $S_\varepsilon$ , de genre fixé  $g$ , dont certaines géodésiques fermées dégènèrent, c'est-à-dire dont la longueur tend vers 0. "Petite" valeur propre signifie valeur propre  $\lambda$  telle que  $0 \leq \lambda < \frac{1}{4}$ . On sait, [Bu1], qu'elles sont en nombre fini, inférieur ou égal à  $4g - 3$ . Intuitivement, les surfaces  $S_\varepsilon$  "convergent" vers une surface limite  $S$  non compacte, de volume fini, non nécessairement connexe; exemple voir Fig. 1. On montre que le passage à la limite se fait de façon continue pour les valeurs propres  $\lambda$  de  $S_\varepsilon$ ,  $0 \leq \lambda < \frac{1}{4}$ .

Précisément, chaque surface  $S_\varepsilon$  se décompose en pantalons hyperboliques, i.e.  $S_\varepsilon = P_1^\varepsilon \cup \dots \cup P_n^\varepsilon$ ,  $n = 2g - 2$ , où chacune des géodésiques  $\gamma_{i,j}^\varepsilon$ ,  $j = 1, 2, 3$ , d'un pantalon  $P_i^\varepsilon$  est recollée à une géodésique  $\gamma_{i',j'}^\varepsilon$  de même longueur ( $l(\gamma_{i,j}^\varepsilon) = l(\gamma_{i',j'}^\varepsilon)$ ) d'un autre pantalon.

La famille de surfaces  $S_\varepsilon$  dégènère lorsqu'une partie fixée des couples  $\{\gamma_{i,j}^\varepsilon, \gamma_{i',j'}^\varepsilon\}$  de géodésiques identifiées vérifie  $l(\gamma_{i,j}^\varepsilon) = l(\gamma_{i',j'}^\varepsilon) \rightarrow 0$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , alors que tous les autres couples  $\{\gamma_{k,1}^\varepsilon, \gamma_{k',1'}^\varepsilon\}$  de géodésiques identifiées sont de longueur constante indépendante de  $\varepsilon$ ,  $l(\gamma_{k,1}^\varepsilon) = l(\gamma_{k',1'}^\varepsilon) = l_{k,1}$ .

La surface "limite"  $S$  admet une décomposition en pantalons (éventuellement non compacts)  $S = P_1 \cup \dots \cup P_n$ , où  $P_i$  est obtenu à partir de  $P_i^\varepsilon$  de la façon suivante: les trois géodésiques  $\gamma_{i,j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , du pantalon  $P_i$  sont de longueur  $l(\gamma_{i,j}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(\gamma_{i,j}^\varepsilon)$ , le cas  $l(\gamma_{i,j}) = 0$  correspondant à un cusp. Les identifications entre les géodésiques  $\gamma_{i,j}$  des  $P_i$  de longueur non nulle sont les mêmes que les identifications entre les  $\gamma_{i,j}^\varepsilon$  des  $P_i^\varepsilon$ .

La surface  $S$  n'est pas nécessairement connexe et est non compacte. Au delà de  $\frac{1}{4}$  son spectre est essentiel, cf. [Dy]. Notons  $0 = \mu_1 = \dots = \mu_m < \mu_{m+1} \leq \dots \leq \mu_M < \frac{1}{4}$  les valeurs propres de  $S$  inférieures à  $\frac{1}{4}$ . Remarquons que la multiplicité  $m$

---

\* Durant l'élaboration de ce travail, le premier auteur bénéficiait d'une bourse de la Fondation Pierre Mercier.

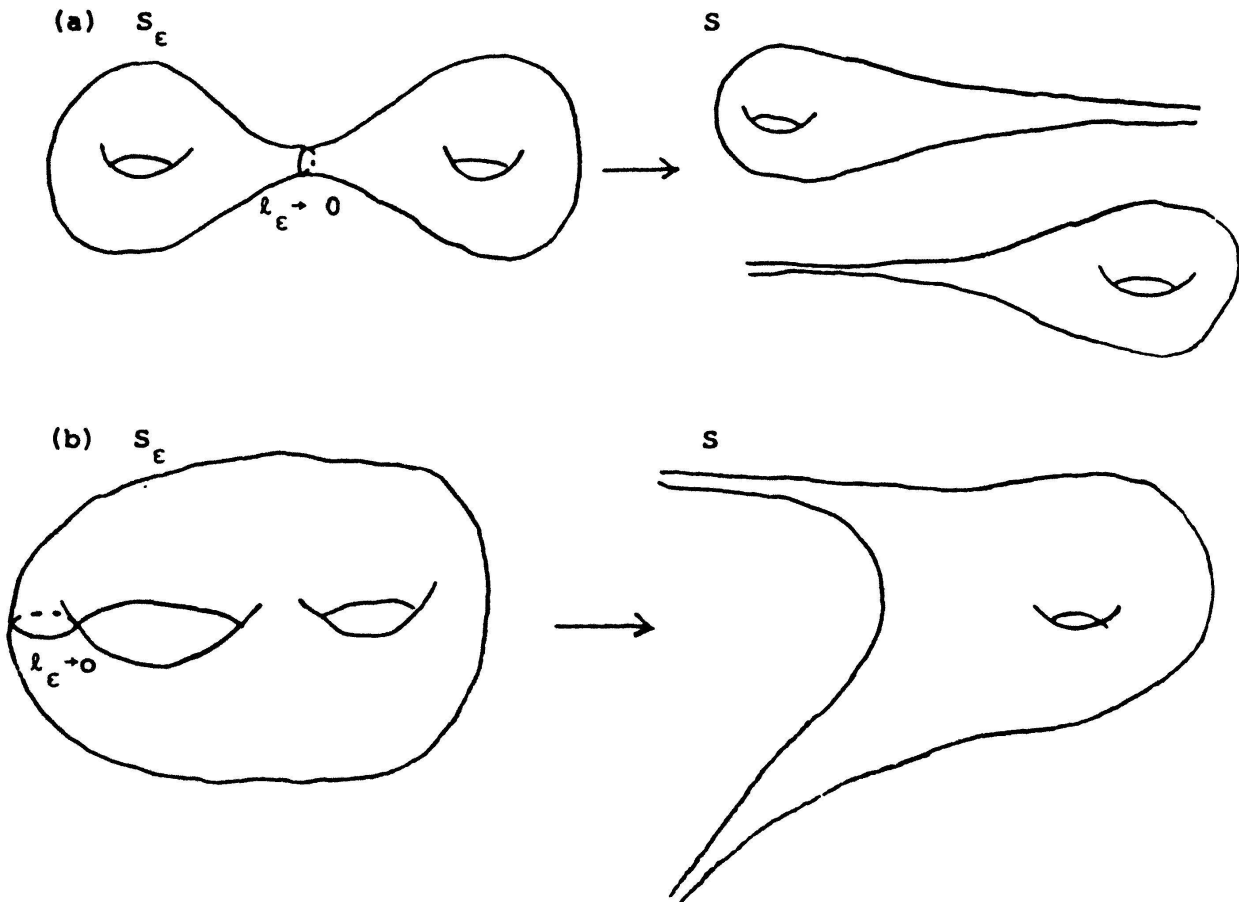


FIG. 1.

de la valeur propre 0 correspond au nombre de composantes connexes de  $S$ . On ne sait pas si génériquement 0 est la seule valeur propre de  $S$ .

Notons  $0 = \lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_N^\varepsilon < \frac{1}{4} \leq \lambda_{N+1}^\varepsilon$  les valeurs propres de  $S_\varepsilon$ . A priori,  $N$  dépend de  $\varepsilon$ .

Nous allons prouver le résultat suivant:

**THÉORÈME 01.** *Lorsque  $\varepsilon$  est assez petit,  $S_\varepsilon$  a au moins autant de valeurs propres que  $S$  appartenant à l'intervalle  $[0, \frac{1}{4}[$ , i.e.  $N \geq M$ , et de plus:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k^\varepsilon = \mu_k$  pour  $k \leq M$  et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k^\varepsilon = \frac{1}{4}$  pour  $k > M$ .*

*Remarque 02.* En particulier, pour  $k \leq m$  on obtient  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k^\varepsilon = 0$ . Ce résultat est conséquence du théorème de Schoen–Wolpert–Yau [S–W–Y]. Dans ce cas, on peut calculer le comportement asymptotique de  $\lambda_k^\varepsilon$  en fonction des longueurs des géodésiques tendant vers 0, [Br], [C–C], [Cs1], [Cs2].

*Remarque 03.* Dans [B–B–D] les auteurs obtiennent entre autre que, pour  $m = 1$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \lambda_2^\varepsilon \geq \mu_2$ .

La preuve du théorème 01 comporte les trois étapes suivantes.

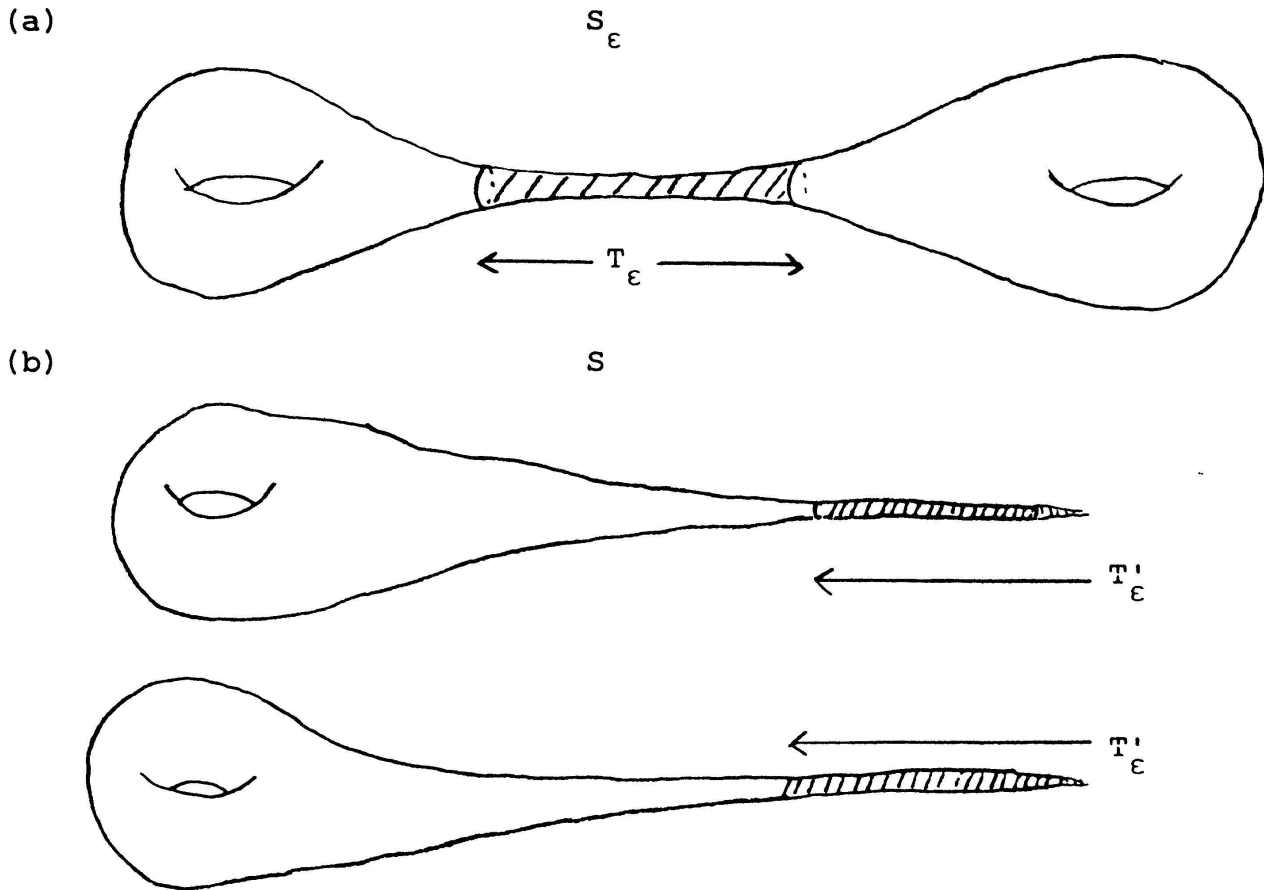


FIG. 2.

*Etape 1.* Chaque fonction propre  $f^\epsilon$  de  $S_\epsilon$  de valeur propre inférieure à  $\frac{1}{4}$  strictement est de  $H^1$ -norme de plus en plus petite autour de chaque géodésique dont la longueur tend vers 0. Précisément, il existe un voisinage tubulaire dont le rayon tend vers l'infini lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  autour de chacune de ces géodésiques tel que la  $H^1$ -norme de la fonction propre de  $f^\epsilon$  sur la réunion  $T_\epsilon$  de ces voisinages tende vers 0 avec  $\epsilon$ . (Fig. 2a)

*Etape 2.* Toute fonction propre de la surface limite  $S$  de valeur propre inférieure à  $\frac{1}{4}$  est de  $H^1$ -norme de plus en plus petite sur des voisinages  $T'_\epsilon$  de plus en plus fins de l'infini sur chaque cusp (Fig. 2b).

*Etape 3.* On peut choisir  $T_\epsilon$  et  $T'_\epsilon$  de sorte qu'il existe une quasi-isométrie entre  $S_\epsilon \setminus T_\epsilon$  et  $S \setminus T'_\epsilon$  dont le rapport tend vers 1 lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Cette quasi-isométrie et les étapes 1 et 2 permettent d'associer à toute fonction propre de  $S_\epsilon$  de valeur propre inférieure à  $\frac{1}{4}$  une fonction de  $S$  sans changer beaucoup le quotient de Rayleigh et réciproquement. Le principe du minimax permet alors de comparer les  $\mu_k$  aux  $\lambda_k$ .

### 1. Etape 1. Comportement des fonctions propres de $S_\varepsilon$

Soit  $\gamma_{i,j}^\varepsilon$  une géodésique dont la longueur tend vers 0 avec  $\varepsilon$ . D'après le Lemme du Collier [RI], il y a un cylindre  $C_{i,j}^\varepsilon$  sur lequel la métrique s'écrit en coordonnées de Fermi:

$$ds^2 = dr^2 + \varepsilon_{i,j}^2 ch^2 r d\theta^2 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq |r| \leq \arg ch(1/\pi\varepsilon_{i,j}) \quad (1.1)$$

Fixons dans la suite les indices  $i, j$  et notons pour simplifier  $\pi\varepsilon_{i,j} = \varepsilon$  (demi-longueur de  $\gamma_{i,j}^\varepsilon$ ).

Posons  $L_\varepsilon = (\arg ch 1/\varepsilon)^{1/2}$  et  $l_\varepsilon = L_\varepsilon^{1/2}$ .

Notons  $T_{i,j}^\varepsilon = \{(r, \theta) \in C_{i,j}^\varepsilon, |r| < l_\varepsilon\}$  le voisinage tubulaire de rayon  $l_\varepsilon$  de  $\gamma_{i,j}^\varepsilon$

**PROPOSITION 1.1.** *Soit  $f^\varepsilon$  une fonction propre de  $S_\varepsilon$  de valeur propre comprise dans l'intervalle  $[0, \frac{1}{4}]$  telle que  $\|f^\varepsilon\|_{H^1(S_\varepsilon)} = 1$ . Alors  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f^\varepsilon\|_{H^1(T_{i,j}^\varepsilon)} = 0$ .*

*Preuve.* La Proposition 1.1 découle du fait que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|f^\varepsilon\|_{H^1(T_{i,j}^\varepsilon)}}{\|f^\varepsilon\|_{H^1(C_{i,j}^\varepsilon)}} = 0 \quad (1.2)$$

Afin d'établir (1.2) nous allons développer  $f^\varepsilon$  en série de Fourier et étudier les coefficients de Fourier. Rappelons que toute fonction propre  $f^\varepsilon$  se développe en série de Fourier sur  $C_{i,j}^\varepsilon$

$$f^\varepsilon(r, \theta) = a_0^\varepsilon(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\varepsilon(r) \cos n\theta + b_n^\varepsilon(r) \sin n\theta) \quad (1.3)$$

et compte tenu de l'équation  $\Delta f^\varepsilon = \lambda^\varepsilon f^\varepsilon$  les coefficients de Fourier  $a_n^\varepsilon$  et  $b_n^\varepsilon$  vérifient l'équation différentielle.

$$\Phi'' + \text{th}r \Phi' + \left( \lambda^\varepsilon - \frac{n^2}{\varepsilon^2 ch^2 r} \right) \Phi = 0 \quad (1.4)$$

Les conditions au bord étant déterminées par les valeurs de  $f^\varepsilon$  et de  $\partial f^\varepsilon / \partial r$  sur les bords de  $C_{i,j}^\varepsilon$ .

$$\|f^\varepsilon\|_{L^2(\{|r| < \gamma\})}^2 = \varepsilon \int_{-\gamma}^{\gamma} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) ch r \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\{|r| < \gamma\})}^2 &= \varepsilon \left( \int_{-\gamma}^{\gamma} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2) \right) ch r \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\gamma}^{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) ch^{-1} r \varepsilon^{-2} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

où  $a_n = a_n^\varepsilon(r)$ ;  $b_n = b_n^\varepsilon(r)$  et  $a_0 = b_0 = a_0^\varepsilon(r)$ . Comme dans [C-H] p 292, en posant

$$u(r) = ch^{1/2}r \Phi(r), \quad (1.4) \text{ se transforme en} \quad (1.7)$$

$$u'' = \left( \left( \frac{1}{4} - \lambda^\varepsilon \right) + \frac{1}{4ch^2r} + \frac{n^2}{\varepsilon^2 ch^2r} \right) u \quad (1.8)$$

ainsi, en posant  $\alpha_n = ch^{1/2}r a_n$  et  $\beta_n = ch^{1/2}r b_n$  pour  $n \geq 0$  les relations (1.5) et (1.6) s'écrivent:

$$\|f^\varepsilon\|_{L^2(\{|r|<\gamma\})}^2 = \varepsilon \int_{-\gamma}^{\gamma} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right] dr \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\{|r|<\gamma\})}^2 = \varepsilon \left( \int_{-\gamma}^{\gamma} \left( \frac{th^2r}{4} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right] + \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n'^2 + \beta_n'^2) \right. \right. \\ \left. \left. - thr \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \alpha_n' + \beta_n \beta_n') \right] + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (\alpha_n^2 + \beta_n^2) ch^{-2}r \varepsilon^{-2} \right) \right) \quad (1.10) \end{aligned}$$

Nous allons déduire (1.2) de (1.9), (1.10) et du

**LEMME 1.2.** Soient  $\chi_\varepsilon$  et  $X_\varepsilon$  deux nombres positifs tels que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_\varepsilon / X_\varepsilon = 0$  et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_\varepsilon = \infty$ , et une famille de fonctions  $v_\varepsilon \in C^\infty([0, X_\varepsilon])$  telle que  $v_\varepsilon$  soit positive et strictement croissante sur  $[0, X_\varepsilon]$ . Alors  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\chi_\varepsilon} v_\varepsilon / \int_0^{X_\varepsilon} v_\varepsilon = 0$

*Preuve du lemme.* On a

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^{\chi_\varepsilon} v_\varepsilon / \int_0^{X_\varepsilon} v_\varepsilon &\leq \int_0^{\chi_\varepsilon} v_\varepsilon / \int_{\chi_\varepsilon}^{X_\varepsilon} v_\varepsilon \\ &\leq v_\varepsilon(\chi_\varepsilon) \cdot \chi_\varepsilon / v_\varepsilon(\chi_\varepsilon)(X_\varepsilon - \chi_\varepsilon) = \chi_\varepsilon / (X_\varepsilon - \chi_\varepsilon). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Soient  $s_n(r)$  (resp.  $c_n(r)$ ) la solution de (1.8) telle que  $s_n(0) = 0$ ,  $s_n'(0) = 1$  (resp.  $c_n(0) = 1$ ,  $c_n'(0) = 0$ ). Les fonctions  $\{s_n(r), c_n(r)\}$  forment une base de l'espace des solutions de (1.8). Notons que  $c_n$  et  $s_n'$  sont des fonctions paires et que  $s_n$  et  $c_n'$  sont impaires du fait de la parité du coefficient de l'équation différentielle (1.8).

On a

$$\alpha_n = A_n c_n + A_n' s_n \quad (1.11)$$

$$\beta_n = B_n c_n + B_n' s_n \quad (1.12)$$

$$\varepsilon^{-1} \|f^\varepsilon\|_{H^1(\{|r|<\gamma\})}^2 = \int_{-\gamma}^{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \varphi_n + (A_n'^2 + B_n'^2) \psi_n \quad (1.13)$$

où

$$\varphi_n = c_n^2 \left( 1 + \frac{th^2r}{4} + \frac{n^2}{\varepsilon^2 ch^2r} \right) + c_n'^2 - thr c_n c_n'$$

et

$$\psi_n = s_n^2 \left( 1 + \frac{th^2 r}{4} + \frac{n^2}{\varepsilon^2 ch^2 r} \right) + s_n'^2 - thrs_n s_n'.$$

Le fait que  $|thr c_n c_n'| \leq \frac{1}{2}(c_n^2 + c_n'^2)$  implique

$$\frac{1}{2} \left[ c_n^2 \left( 1 + \frac{n^2}{\varepsilon^2 ch^2 r} \right) + c_n'^2 \right] \leq \varphi_n \leq \frac{7}{4} \left[ c_n^2 \left( 1 + \frac{n^2}{\varepsilon^2 ch^2 r} \right) + c_n'^2 \right] \quad (1.14)$$

$\psi_n$  vérifie une inégalité analogue avec  $(s_n, s_n')$  à la place de  $(c_n, c_n')$ .  
On obtient donc

$$\int_0^\gamma \psi(r) \leq \varepsilon^{-1} \|f^\varepsilon\|_{H^1(\{|r| < \gamma\})}^2 \leq \frac{7}{4} \int_0^\gamma \psi(r) \quad (1.15)$$

où

$$\begin{aligned} \psi(r) = \psi_\varepsilon(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) & \left[ c_n^2 \left( 1 + \frac{n^2}{\varepsilon^2 ch^2 r} \right) + c_n'^2 \right] \\ & + (A_n'^2 + B_n'^2) \left[ s_n^2 \left( 1 + \frac{n^2}{\varepsilon^2 ch^2 r} \right) + s_n'^2 \right]. \end{aligned}$$

de (1.15) on déduit:

$$\frac{\|f^\varepsilon\|_{H^1(\{|r| < l_\varepsilon\})}^2}{\|f^\varepsilon\|_{H^1(\{|r| < L_\varepsilon\})}^2} \leq \frac{7 \int_0^{l_\varepsilon} \psi(r)}{4 \int_0^{L_\varepsilon} \psi(r)}$$

$c_n$  et  $s_n$  vérifiant (1.8), les fonctions  $\{c_n^2, c_n'^2, s_n^2, s_n'^2\}_{n \geq 0}$ ,  $\{c_n^2/\varepsilon^2 ch^2 r, s_n^2/\varepsilon^2 ch^2 r\}_{n \geq 1}$  sont positives croissantes sur  $[0, L_\varepsilon]$ . ((1.8) implique en particulier que pour  $n \geq 1$   $c_n'' \geq c_n$ ,  $s_n'' \geq s_n$  sur  $[0, L_\varepsilon]$ . Comme  $chr'' = chr$ ,  $shr'' = shr$  Sturm–Liouville montre que  $c_n/chr$  et  $s_n/chr$  sont croissantes). On se trouve ainsi dans les hypothèses du Lemme 1.2. On déduit ainsi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|f^\varepsilon\|_{H^1(T_\varepsilon)}^2}{\|f^\varepsilon\|_{H^1(C_\varepsilon)}^2} = 0$$

## 2. Etape 2. Comportement des fonctions propres sur les cusps

Soit  $S$  une surface à courbure  $-1$ , de volume fini, avec des cusps. Considérons une fonction propre  $f$  de valeur propre  $\lambda < \frac{1}{4}$ . Nous allons montrer que la  $H^1$ -norme de  $f$  tend vers 0 sur l'extrémité des cusps.

Rappelons qu'un cusp  $C$  admet la métrique:

$$ds^2 = dr^2 + e^{-2r} d\theta^2, \quad 0 < r < \infty \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (2.1)$$

Notons  $U_\varepsilon = \{(r, \theta) \mid r \geq r_\varepsilon, \text{ avec } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\varepsilon = \infty\}$

LEMME 2.1. *Soit  $f$  une fonction propre de  $S$  telle que*

$$\|f\|_{H^1(S)} = 1$$

*Alors  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f\|_{H^1(U_\varepsilon)} = 0$*

Ce lemme est conséquence du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

## 3. Une quasi-isométrie

3.1. On a vu que la  $H^1$ -norme des fonctions de  $S$  tend vers 0 à l'extrémité  $W_\varepsilon$  des cusps et que, d'autre part, la  $H^1$ -norme des fonctions propres associées aux valeurs propres inférieures à  $\frac{1}{4}$  tend vers 0 sur un voisinage  $T_\varepsilon$  des géodésiques dont la longueur tend vers 0.

On a la situation de la Figure 3.

On va montrer qu'il existe une quasi-isométrie  $\varphi_\varepsilon$  de rapport  $k_\varepsilon$  entre  $S - W_\varepsilon$  et  $S_\varepsilon - V_\varepsilon$  avec  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon = 1$ . Cette quasi-isométrie sera définie par pantalon. Sur les pantalons  $P_i^\varepsilon$  bordés par des géodésiques de longueur constante (i.e tels que  $P_i^\varepsilon = P_i \forall \varepsilon$ ) on identifie naturellement  $P_i^\varepsilon$  et  $P_i$ .

Sur les pantalons  $P_i^\varepsilon$  dont au moins une des géodésiques du bord a une longueur qui tend vers 0, on procède de la façon suivante. Il y a trois cas selon que une, deux ou trois géodésiques voient leur longueur tendre vers zéro (voir Fig. 3 pour le cas d'une longueur tendant vers zéro) mais la méthode est la même dans chacun de ces trois cas.



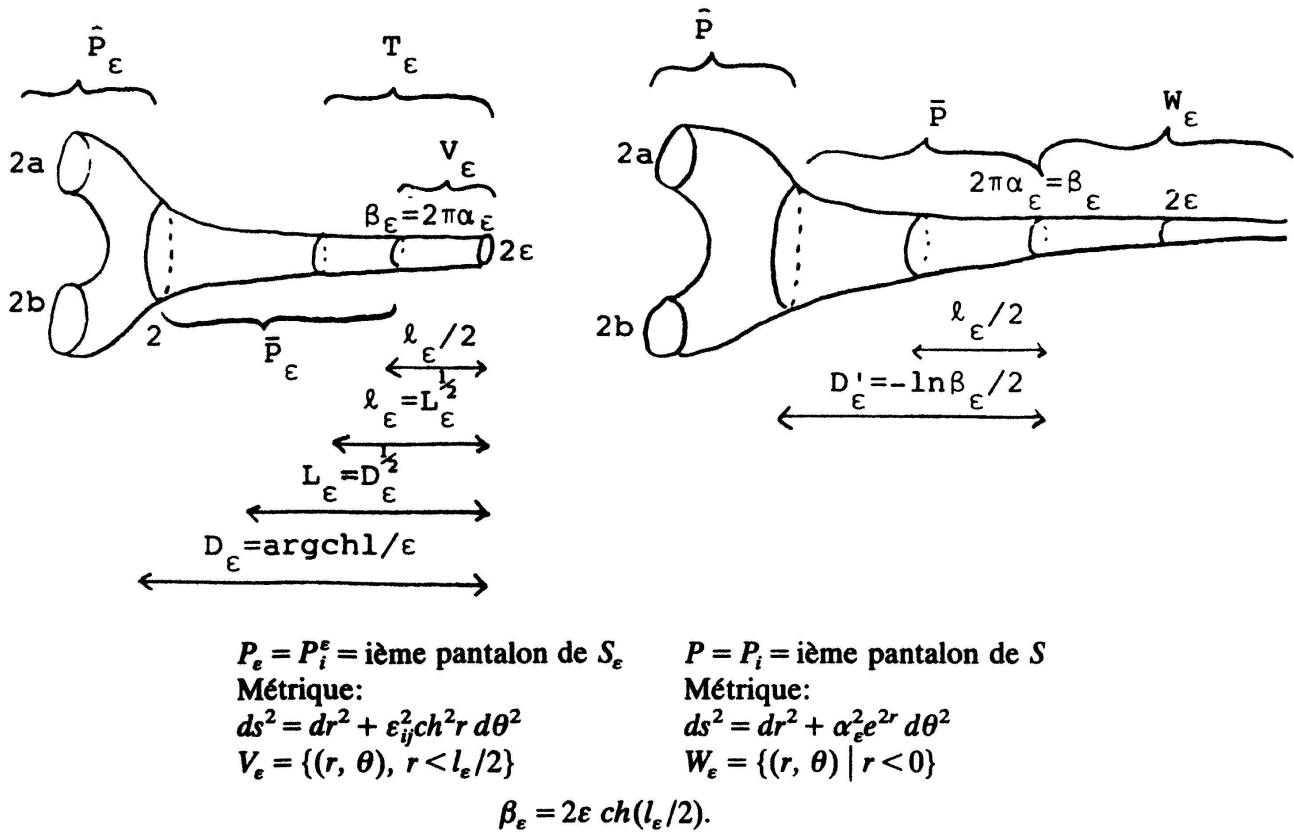


FIG. 3.

Soient

$$\begin{aligned} \bar{P}_\epsilon &= \{(r, \theta) \mid (l_\epsilon/2) < r < D_\epsilon\} \bar{P}_\epsilon, \hat{P}_\epsilon \subset P_\epsilon \\ \hat{P}_\epsilon &= P_\epsilon \setminus \{(r, \theta) \mid r < D_\epsilon\} \\ \bar{P} &= \{(r, \theta) \mid 0 < r < D'_\epsilon\} \\ \hat{P} &= P \setminus \{(r, \theta) \mid r < D'_\epsilon\} \quad \bar{P}, \hat{P} \subset P \end{aligned}$$

Nous allons montrer qu'il existe d'une part une quasi-isométrie  $\hat{\varphi}^\epsilon$  de  $\hat{P}_\epsilon$  sur  $\hat{P}$ , identifiant  $\partial\hat{P}_\epsilon$  et  $\partial\hat{P}$  et d'autre part une quasi-isométrie  $\bar{\varphi}^\epsilon$  de  $\bar{P}_\epsilon$  sur  $\bar{P}$  avec la même identification des bords.

La quasi-isométrie  $\varphi^\epsilon$  de  $P_\epsilon \setminus V_\epsilon$  sur  $P \setminus W_\epsilon$  s'obtient alors en recollant  $\hat{\varphi}^\epsilon$  et  $\bar{\varphi}^\epsilon$ .

### 3.2. Construction de $\bar{\varphi}^\epsilon$

Rappelons que sur  $\bar{P}_\epsilon$  on a la métrique

$$g_1 = dr^2 + \left(\frac{\epsilon}{\pi}\right)^2 ch^2 r d\theta^2 \quad l_\epsilon/2 \leq r \leq D_\epsilon, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{3.1}$$

et sur  $\bar{P}$  la métrique:

$$g_2 = dr^2 + \alpha_\epsilon^2 e^{2r} d\theta^2 \quad 0 \leq r \leq D'_\epsilon, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{3.2}$$

Au moyen d'une translation de  $l'_\varepsilon = l_\varepsilon/2$ , la métrique sur  $\bar{P}_\varepsilon$  s'écrit:

$$g_3 = dr^2 + \alpha_\varepsilon^2 \left( e^{2r} \frac{(1 + thl'_\varepsilon)^2}{4} + e^{-2r} \frac{(1 - thl'_\varepsilon)^2}{4} + \frac{1}{2}(1 - th^2 l'_\varepsilon) \right) d\theta^2$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq D_\varepsilon - l_\varepsilon/2. \tag{3.3}$$

Posons  $c_\varepsilon = D'_\varepsilon/(D_\varepsilon - l_\varepsilon/2)$ . On définit la quasi-isométrie  $\bar{\varphi}_\varepsilon$  par:

$$\bar{\varphi}_\varepsilon: \bar{P}^\varepsilon \rightarrow \bar{P}$$

$$(r, \theta) \rightarrow (c_\varepsilon r, \theta) \tag{3.4}$$

La métrique induite sur  $\bar{P}^\varepsilon$  via  $\bar{\varphi}_\varepsilon$  est

$$g_4 = c_\varepsilon^2 dr^2 + \alpha_\varepsilon^2 e^{2c_\varepsilon r} d\theta$$

Il s'agit de comparer  $g_4$  à  $g_3$  en examinant le rapport  $g_4(r, \theta)/g_3(r, \theta)$

En fait on voit:

$$\frac{1}{k_\varepsilon} \leq \frac{g_4}{g_3} \leq k_\varepsilon \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon = 1 \tag{3.5}$$

En effet  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon = 1$  et  $e^{2(c_\varepsilon - 1)r}$  converge uniformément vers 1 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  sur l'intervalle  $[0, D_\varepsilon - l_\varepsilon/2]$ .

**3.3. Construction de  $\hat{\varphi}_\varepsilon$ .** Le pantalon  $P_\varepsilon$  est obtenu en recollant deux hexagones hyperboliques identiques  $H_\varepsilon$  (Fig. 4a). Il en est de même pour le pantalon  $P$  avec deux exemplaires de l'hexagone  $H$  (dont un côté est de longueur nulle) (Fig. 4b)

On va construire  $\hat{\varphi}_\varepsilon$  de  $\hat{H}_\varepsilon$  sur  $\hat{H}$ . (cf. Fig. 4).

*Notations.*  $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_{x_\varepsilon}, \gamma_{y_\varepsilon}, \gamma_{z_\varepsilon}, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  représentent les géodésiques bordant  $\hat{H}_\varepsilon$  et  $\hat{H}$  de longueur  $a, b, x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon, x, y, z$ .  $\gamma_{c_\varepsilon}$  et  $\gamma_c$  représente le bord de  $\hat{P}_\varepsilon$  dans  $P_\varepsilon$  [resp.  $\hat{P}$  dans  $P$ ] (cf. Fig. 3) de longueur 1. Notons que  $\gamma_{c_\varepsilon}$  et  $\gamma_c$  ne sont pas des géodésiques.  $\gamma_c$  est un horocycle et  $\gamma_{c_\varepsilon}$  est une parallèle à la base du pantalon  $P_\varepsilon$  de longueur  $2\varepsilon$ .

Des calculs standards de trigonométrie hyperbolique (voir [Bd], [Bu2]) montrent que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = (x, y, z).$$

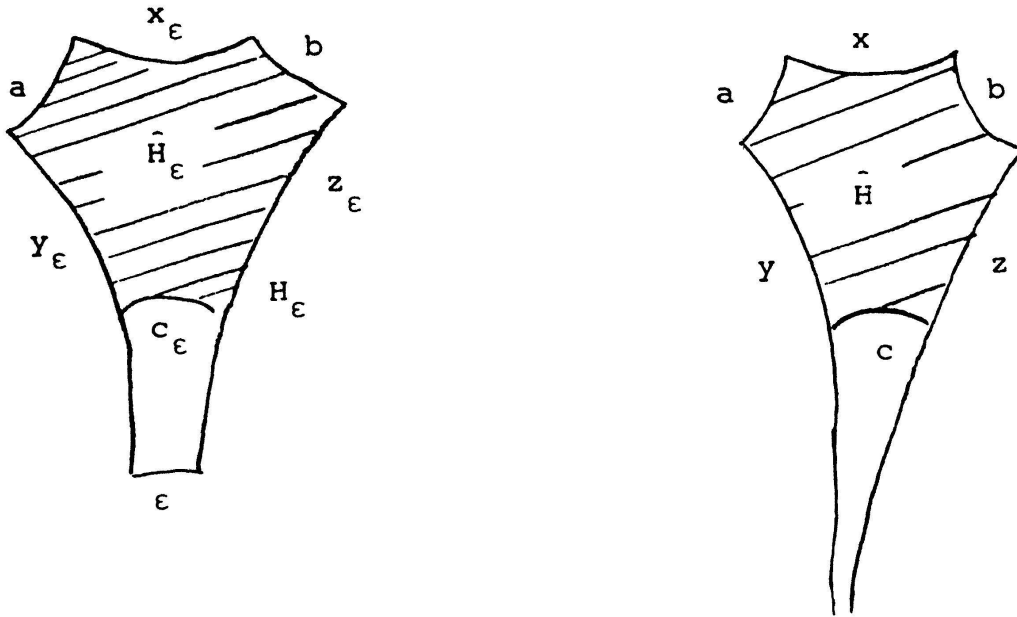


FIG. 4.

En premier lieu,  $\varphi_\epsilon$  va identifier les côtés de même longueur ( $a$  et  $b$  respectivement) de  $\hat{H}_\epsilon$  et  $\hat{H}$ .

La valeur de  $\varphi_\epsilon | \gamma_{c_\epsilon}$  est également imposée par la construction de  $\bar{\varphi}_\epsilon$  qui est déjà définie sur  $\gamma_{c_\epsilon}$ .

Pour construire  $\bar{\varphi}_\epsilon$  on sépare  $\hat{H}_\epsilon$  et  $\hat{H}$  en trois parties (Figs. 5a et 5b) au moyen de segments géodésiques  $\gamma_{e_\epsilon}$ ,  $\gamma_{f_\epsilon}$ ,  $\gamma_e$ ,  $\gamma_f$  joignant respectivement  $\gamma_{x_\epsilon}$  à  $\gamma_{y_\epsilon} \cap \gamma_{c_\epsilon}$ ,  $\gamma_{x_\epsilon}$  à  $\gamma_{c_\epsilon} \cap \gamma_{z_\epsilon}$ ,  $\gamma_x$  à  $\gamma_y \cap \gamma_c$ ,  $\gamma_x$  à  $\gamma_c \cap \gamma_z$ , et orthogonaux à  $\gamma_{x_\epsilon}$  et  $\gamma_x$ .

On note  $\hat{H}_\epsilon^j$  (resp.  $\hat{H}^j$ ) ces trois parties.

On va décrire l'application  $\bar{\varphi}_\epsilon$  entre  $\hat{H}_\epsilon^j$  et  $\hat{H}^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Faisons-le par exemple pour  $j = 1$ .

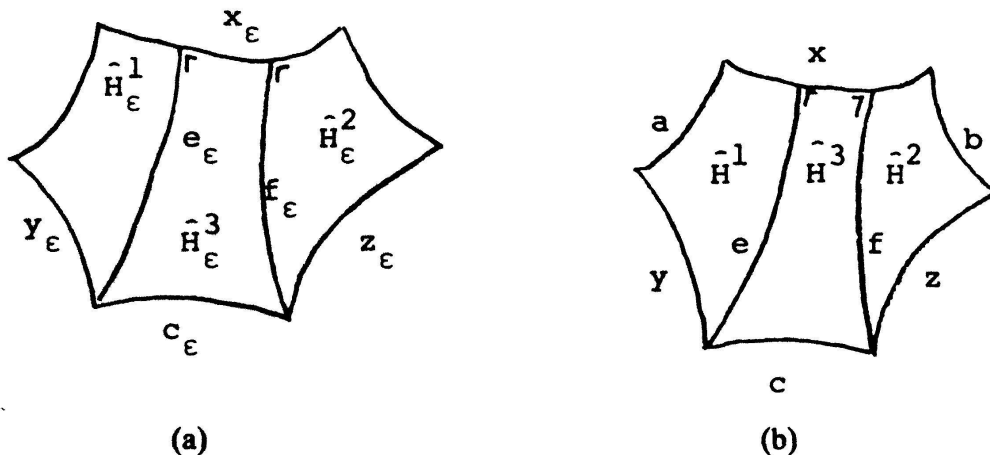


FIG. 5.

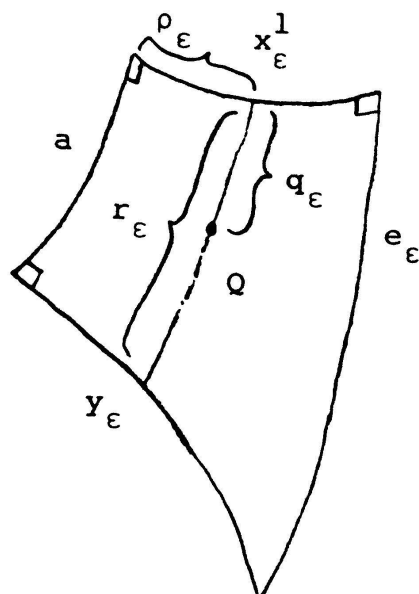


FIG. 6.

Notons  $x_\epsilon^1$  (resp.  $x^1$ ) la longueur de l'intersection de  $\hat{H}_\epsilon^1$  avec  $\gamma_{x_\epsilon}$  (resp. de  $\hat{H}^1$  avec  $\gamma_x$ ) (Fig. 6)

Soit  $Q \in \hat{H}_\epsilon^1$ . Soit  $q_\epsilon$  la distance de  $Q$  à  $\gamma_{x_\epsilon}$ .

Il existe un unique segment géodésique  $\gamma_\epsilon$  à  $\gamma_{y_\epsilon}$ , passant par  $Q$ , orthogonal à  $\gamma_{x_\epsilon}$ .

Notons  $r_\epsilon$  la longueur de ce segment,  $\rho_\epsilon$  la distance du pied de ce segment sur  $\gamma_{x_\epsilon}$  à  $\gamma_a$ .

Alors  $Q$  est univoquement caractérisé par les deux rapports  $(\rho_\epsilon/x_\epsilon^1, q_\epsilon/r_\epsilon)$ .  $\hat{\phi}_\epsilon$  enverra  $\gamma_\epsilon$  sur une géodésique  $\gamma$ , orthogonale à  $\gamma_x$ , telle que la distance du pied de  $\gamma$  sur  $\gamma_x$  à  $\gamma_a$  soit aussi dans un rapport  $\rho_\epsilon/x_\epsilon^1$  avec  $x^1$ .  $\hat{\phi}_\epsilon(Q)$  sera sur  $\gamma$ , dans le même rapport que  $Q$  sur le segment  $\gamma_\epsilon$ .

Des calculs standards de trigonométrie hyperbolique montrent que  $\hat{\phi}_\epsilon$  ainsi définie est une quasi-isométrie dont le rapport  $k_\epsilon$  tend vers 1 lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Remarquons que l'on a bien ainsi l'identité sur  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$ . Notons que le cas de  $\hat{H}_\epsilon^3 \rightarrow \hat{H}^3$  est plus délicat, du fait que  $\hat{\phi}_\epsilon | \gamma_{c_\epsilon}$  est imposée. L'idée de repérer les points de  $\hat{H}_\epsilon^3$  au moyen de géodésiques orthogonales à  $\gamma_{x_\epsilon}$  reste valable, mais l'image d'une telle géodésique est imposée par  $\hat{\phi}_\epsilon | \gamma_{c_\epsilon}$ . Cependant le défaut pour  $\hat{\phi}_\epsilon | \gamma_{c_\epsilon}$  à être une isométrie est déterminée par  $\tilde{\varphi}_\epsilon | \gamma_{c_\epsilon}$ . Cela est lié à la différence entre (3.3) et (3.2). Or cette différence tend vers 1. On obtient alors que  $\hat{\phi}_\epsilon | \hat{H}_\epsilon^3$  est une quasi-isométrie dont le rapport tend vers 1 lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ce qui précède montre la

**PROPOSITION 3.1.** *L'application  $\varphi_\epsilon : P_\epsilon \setminus V_\epsilon \rightarrow P \setminus W_\epsilon$  obtenue en recollant  $\hat{\phi}_\epsilon$  et  $\tilde{\varphi}_\epsilon$  est une quasi-isométrie dont le rapport  $k_\epsilon$  tend vers 1 lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.*

4. Preuve du Théorème 01

Soite  $S_\epsilon$  une famille de surfaces comme dans le Théorème 01 et  $S$  la surface limite associée. La quasi-isométrie permet de transplanter les fonctions de  $S$  sur  $S_\epsilon$  et réciproquement.

La quasi-isométrie n'étant définie que partiellement de  $P_i^\epsilon$  sur  $P_i$ , on commence par annuler les fonctions sur les voisinages des parties  $\gamma_{ij}^\epsilon$  du bord des  $P_i^\epsilon$  dont la longueur tend vers 0 avec  $\epsilon$  (resp. sur les voisinages de l'infini des cusps de  $P_i$ )

On le fait en les multipliant au moyen de fonctions  $u_\epsilon$  et  $v_\epsilon$  définies sur la Fig. 7 (comparer à la Fig. 3).

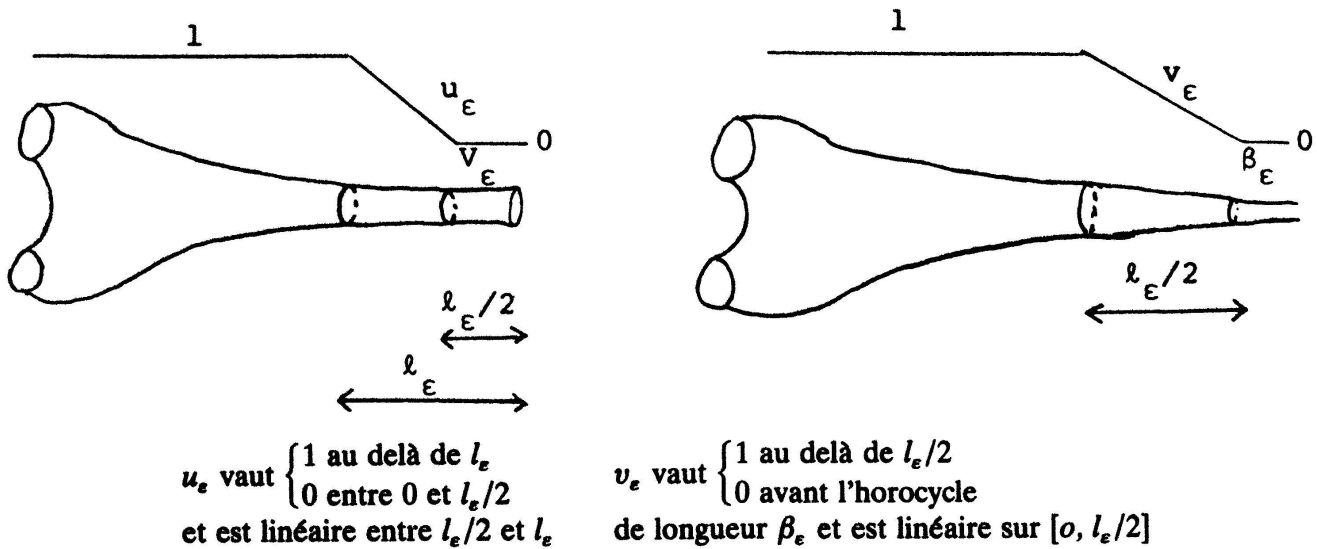


FIG. 7.

On a le

LEMME 4.1. Soient  $f_\epsilon$  (resp  $f$ ) une fonction propre de  $S_\epsilon$  (resp. de  $S$ ) telle que

$$\|f_\epsilon\|_{H^1(S_\epsilon)} = \|f\|_{H^1(S)} = 1.$$

Alors  $\|f_\epsilon - f_\epsilon u_\epsilon\|_{H^1(S_\epsilon)} = o(1)$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\|f - f v_\epsilon\|_{H^1(S)} = o(1) \text{ pour } \epsilon \rightarrow 0.$$

( $o(1)$  signifie que le terme de gauche tend vers 0 avec  $\epsilon$ )

Preuve. Le résultat provient du fait que  $|u_\epsilon|$ ,  $|v_\epsilon|$ ,  $|\nabla u_\epsilon|$ ,  $|\nabla v_\epsilon|$  sont bornés

uniformément et du fait que d'après l'étape 1 et 2,  $f_\varepsilon$  et  $f$  tendent vers 0 en  $H^1$ -norme là où  $u_\varepsilon$  et  $v_\varepsilon$  varient et sont nulles. ■

On peut ainsi associer à chaque fonction propre  $f_\varepsilon$  de  $S_\varepsilon$  (resp.  $g$  de  $S$ ) associée à une valeur propre inférieure à  $\frac{1}{4}$  une fonction  $\bar{f}_\varepsilon$  (resp.  $\bar{g}_\varepsilon$ ) nulle sur  $V_\varepsilon$  (resp. nulle sur  $W_\varepsilon$ ) et dont le quotient de Rayleigh a très peu changé, i.e.

$$\frac{\int_{S_\varepsilon} |\nabla \bar{f}_\varepsilon|^2}{\int_{S_\varepsilon} \bar{f}_\varepsilon^2} - \frac{\int_{S_\varepsilon} |\nabla f_\varepsilon|^2}{\int_{S_\varepsilon} f_\varepsilon^2} = o(1) \quad \text{pour } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\left( \text{resp. } \frac{\int_S |\nabla \bar{g}_\varepsilon|^2}{\int_S \bar{g}_\varepsilon^2} - \frac{\int_S |\nabla g|^2}{\int_S g^2} = o(1) \right) \text{ pour } \varepsilon \rightarrow 0$$

Comme  $S_\varepsilon - V_\varepsilon$  et  $S - W_\varepsilon$  sont quasi-isométriques de rapport tendant vers 1 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on déduit le théorème 0.1 par le minimax. ■

### 5. Quelques remarques

*Remarque 1.* Le problème étant de nature locale, le résultat est également vrai pour une suite de surfaces  $S_n$  convergeant vers une surface à cusps  $S$  (composée d'un nombre fini de composantes connexes) au sens où il existe une décomposition de  $S_n$  et de  $S$  en pantalons telle que les pantalons de  $S_n$  convergent vers les pantalons correspondant de  $S$  dans un sens évident.

*Remarque 2.* On pourrait travailler sur des familles de surfaces non compactes (avec cusps et vasques hyperboliques) dégénérent en certains endroits.

*Remarque 3.* Bien que l'effort ait été porté sur la convergence des valeurs propres, la construction montre que l'on a également une convergence des fonctions propres.

*Remarque 4.* Les auteurs viennent de prendre connaissance d'un preprint de D. A. Hejhal, cf. [Hl2], où le Théorème 0.1 est prouvé par d'autres méthodes.

## BIBLIOGRAPHIE

- [Bd] A. F. BEARDON, *The geometry of discrete groups*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [Br] M. BURGER, *Dégénérescence de surface de Riemann et petites valeurs propres*, Preprint, Bâle, 1987.
- [B-B-D] M. BURGER, P. BUSER et J. DODZIUK, *Riemann surfaces of large genus and large  $\lambda_1$* , Preprint, 1987.
- [Bu1] P. BUSER, *On Cheeger inequality  $\lambda_1 \geq h^2/4$* , Proc. of Symp. in Pure Math. 36, pp. 29–77, 1980.
- [Bu2] P. BUSER, *Riemannsche Flächen und Längenspectrum vom trigonometrischen Standpunkt*, Aus Habilitationsschrift, Bonn, 1980.
- [Cl] I. CHAVEL, *Eigenvalue in riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1984.
- [Cg] S. Y. CHENG, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications*, Math. Z. 143, 1975, pp. 289–297.
- [C-C] B. COLBOIS et Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante*, Prépublication de l'Institut Fourier no. 62 (1986). A paraître aux Comm. Math. Helv.
- [Cs1] B. COLBOIS, *Petites valeurs propres du laplacien sur une surface de Riemann compacte et graphes*, C. R. Acad. Sci. Paris 301, 1985, pp. 927–930.
- [Cs2] B. COLBOIS, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien des surfaces à courbure -1*, Thèse, Lausanne, 1987.
- [C-H] R. COURANT et D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, Wiley-Interscience I, 1953, II 1962.
- [Dy] H. DONNELLY, *On the essential spectrum of a complete riemannian manifold*, Topology 20, pp. 1–14, 1981.
- [RI] B. RANDOL, *Cylinders in Riemann surfaces*, Comm. Math. Helv. 54, pp. 1–5, 1979.
- [S-W-Y] R. SCHOEN, S. WOLPERT et S. T. YAU, *Geometric bounds of the low eigenvalues of a compact surface*, Proc. symp. Pure Math. 36, pp. 279–285, 1980.
- [HI1] D. A. HEJHAL, A continuity method for spectral theory on Fuchsian groups in: *Modular forms*. Rankin, R. A. (ed), Ellis-Horwood (1984) pp. 107–140.
- [HI2] D. A. HEJHAL, *Regular B-groups, degenerating Riemann surfaces and spectral theory*, Preprint Chalmers University of Technology and the University of Göteborg (1987).
- [CV] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Résonances*, Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Université de Grenoble, Institut Fourier, 1984–85.
- [WT] S. WOLPERT, *Asymptotics of the spectrum and the Selberg zeta function on the space of Riemann surfaces*. Comm. Math. Phys. 112 (1987) 283–315.

B. Colbois  
 Inst. Math. Univ. Lausanne  
 et DMA-EPFL  
 CH 1015 Lausanne, Suisse

G. Courtois  
 DMA-EPFL  
 CH 1015 Lausanne, Suisse  
 et Institut Fourier  
 B. P. 74  
 F 38402 St Martin d'Hères,  
 France

Reçu le 27 novembre 1987