Su una congettura di Petri.

Autor(en): **Arbarello, Enrico / Cornalba, Maurizio**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **56 (1981)**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-43228

Comment. Math. Helvetici **56** (1981) 1–38 0010–2571/81/001001–38$01.50+0.20/0

Su una congettura di Petri

ENRICO ARBARELLO E MAURIZIO CORNALBA*

Introduzione

Nel suo lavoro "Über Spezialkurven," [19] p. 184, K. Petri, in modo quasi parentetico, afferma quanto, in linguaggio moderno, può essere espresso come segue

(0.1) *Dato un qualsiasi divisore D su di una curva C a moduli generali il prodotto "cup"*

$$\mu_0 : H^0(C, \mathcal{O}(D)) \otimes H^0(C, \Omega^1_C(-D)) \to H^0(C, \Omega^1_C)$$

è iniettivo.

Chiameremo (0.1) la congettura di Petri. Questa congettura giuoca un ruolo centrale nella teoria dei divisori speciali su di una curva e precisa la bella congettura di A. Brill e M. Noether che è stata recentemente dimostrata da P. Griffiths e J. Harris, [6], [1]. Ricordiamo il contenuto di questa congettura. Sia C una curva di genere g. Indichiamo con W^r_d l'insieme delle classi di equivalenza lineare dei divisori di grado d su C che si muovono in un sistema lineare di dimensione almeno r. Vi è su W^r_d una struttura naturale di varietà algebrica (anche non ridotta). La congettura di Brill e Noether afferma che

(0.2) *Se C è una curva a moduli generali allora:*

a) W^r_d *è ridotta.*

b) *Ogni componente irriducibile di* W^r_d *ha dimensione*

$$\rho = g-(r+1)(g-d+r)$$

---

* Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi per la Matematica del C.N.R. e finanziato in parte dalla N.S.F. (Grant MCS-78-07348).

Nella prima parte di questo lavoro daremo un primo significato geometrico della congettura di Petri, mostrando che essa può essere pensata come un teorema di singolarità di Riemann per W^r_d su di una curva a moduli generali. Più precisamente mostreremo che

(0.3)

a) *La congettura di Petri implica* (0.2).

b) *Se vale la congettura di Petri e C è a moduli generali, il luogo singolare di* W^r_d *è esattamente* W^{r+1}_d.

Le tecniche da noi usate nello studiare la struttura di W^r_d sono simili a quelle usate da Kleiman e Laksov [14].

Seguendo il metodo usato da Kempf [12] nel dimostrare la sua generalizzazione del teorema di singolarità di Riemann mostreremo inoltre come la congettura di Petri permetta, su di una curva a moduli generali, di calcolare i coni tangenti a W^r_d e i loro gradi.

Il lavoro prosegue poi col dare una ulteriore interpretazione geometrica della congettura di Petri, e cioè:

(0.4) *Se C è una curva a moduli generali e*

$$\varphi : C \to \mathbf{P}^r$$

è un qualsiasi morfismo, ogni deformazione infinitesima di φ *è non ostruita. Più precisamente, denotando con* N_φ *il fascio normale a* φ, *si ha*

$$H^1(C, N_\varphi) = 0$$

Usando questa versione della congettura di Petri, dimostreremo la congettura stessa nel caso $r = 2$, cioè per le curve piane (il caso $r = 1$ è stato studiato classicamente e risolto da numerosi autori moderni).

La dimostrazione della congettura per $r = 2$ sarà basata su un curioso risultato di natura generale riguardante le deformazioni di curve con cuspidi. Più esattamente, dato un morfismo

$$\varphi : C \to \mathbf{P}^r$$

individueremo un sottofascio $\mathcal{K}_\varphi$ di N_φ avente supporto nei punti di diramazione di φ (le "cuspidi" di $\varphi(C)$) con le seguenti proprietà:

a) *Gli elementi di* $H^0(C, \mathcal{K}_\varphi)$ *corrispondono alle deformazioni infinitesime di* φ *che non mutano* $\varphi(C)$.

b) *Se* φ *non è composto con una involuzione, ogni deformazione effettiva di* φ, *definita, al primo ordine, da un elemento non nullo di* $H^0(C, \mathcal{K}_\varphi)$, *ha l'effetto di far diminuire la complessità delle cuspidi di* $\varphi(C)$.

I temi e le idee sviluppate in questo lavoro hanno avuto origine da una lunga e amichevole collaborazione con P. Griffiths e J. Harris (vedi [1]). Cogliamo qui l'occasione per ringraziarli vivamente entrambi. Vogliamo anche ringraziare Edoardo Sernesi per le numerose e interessanti conversazioni che abbiamo avuto con lui su questi problemi.

§1. Notazioni e preliminari

L'ambiente in cui opereremo è quello delle varietà algebriche su $\mathbf{C}$. Una tale varietà algebrica potrà anche essere non ridotta o riducibile. Poichè ciò non darà mai adito ad ambiguità, ci riterremo liberi, ove necessario, di trattare tali varietà come varietà analitiche complesse avvertendone, beninteso, il lettore.

Il termine curva sarà sempre usato nel senso di "varietà algebrica completa, irriducibile, non singolare e di dimensione uno." Per convenzione useremo il termine "fibrato in rette" in luogo di "fascio algebrico invertibile." Data una varietà algebrica liscia indicheremo con i simboli K_X, Θ_X (o più semplicemente K, Θ) il fibrato canonico su X e il fascio tangente su X.

Sia ora C una curva di genere g. Indicheremo con C_d il prodotto simmetrico d-esimo di C e con $u = u_d$ il morfismo

(1.1) $u_d : C_d \to \mathrm{Pic}^d(C)$

che a ogni divisore D associa il fibrato in rette $\mathcal{O}(D)$. Indicheremo altresì con il simbolo C_d^r la sottovarietà di C_d di "equazioni":

$$\text{rango } u_* \leq d - r$$

Più esattamente, l'ideale di C_d^r è generato, localmente, dai minori $(d-r+1) \times (d-r+1)$ della matrice jacobiana di u. E'un fatto classico [2] che C_d^r, come insieme di punti, non è altro che il luogo dei $D \in C_d$ tali che

$$\dim H^0(C, \mathcal{O}(D)) \geq r+1.$$

Esporremo ora, per convenienza del lettore, alcuni rudimenti della teoria della deformazioni di fibrati in rette su curve (cf. [15], [1] per una trattazione più ampia).

In primo luogo, se C è una curva di genere g e L è un fibrato in rette di grado d su C, vi è un isomorfismo naturale tra $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ e lo spazio tangente a $\mathrm{Pic}^d(C)$ in L. Analogamente, se D è un punto di C_d, si ha una identificazione naturale tra lo spazio tangente a C_d nel punto D e $H^0(C, \mathcal{O}_D(D))$.

(1.2) *Con queste identificazioni, l'omomorfismo*

$$u_{*,D}: T_D(C_d) \to T_{u(D)}(\mathrm{Pic}^d(C))$$

si identifica all'omomorfismo cobordo

$$H^0(C, \mathcal{O}_D(D)) \to H^1(C, \mathcal{O}_C)$$

della successione esatta di coomologia di

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C(D) \to \mathcal{O}_D(D) \to 0$$

Indichiamo con il simbolo $\mathbf{C}[\varepsilon]$ l'anello dei numeri duali. Per la proprietà universale di $\mathrm{Pic}^d(C)$ [7], un elemento φ di $H^1(C, \mathcal{O})$ corrisponde a un fibrato in rette $\mathcal{L}$ su $C \times \mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[\varepsilon]$ la cui restrizione a C è L. Nel seguito un tale fibrato in rette sarà chiamato una *deformazione infinitesima di* L e φ la sua *classe di Kodaira–Spencer.*

Si ha una successione esatta

$$(1.3) \quad H^0(C \times \mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[\varepsilon], \mathcal{L}) \to H^0(C, L) \xrightarrow{f} H^1(C, L)$$

ove f è il prodotto "cup" con φ.

Analogamente, per *deformazione infinitesima* di $L \to C$ intenderemo il dato di una deformazione di C, $X \to \mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[\varepsilon]$, e di un fibrato in rette $\mathcal{L}$ su X la cui restrizione a C è isomorfa a L.

Sia ora Σ_L l'$\mathcal{O}_C$-modulo localmente libero di rango 2 le cui sezioni sono gli operatori differenziali, di ordine al più eguale a uno, agenti su sezioni di L.

A ogni deformazione infinitesima di $L \to C$ è associato un elemento di $H^1(C, \Sigma_L)$ che è chiamato la sua *classe di Kodaira–Spencer.* Si mostra facilmente che ciò induce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle classi di equivalenza di deformazioni infinitesime di $L \to C$ e $H^1(C, \Sigma_L)$.

Sia ora σ un elemento di $H^1(C, \Sigma_L)$ e $\mathcal{L} \to X \to \mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[\varepsilon]$ la corrispondente deformazione infinitesima di $L \to C$. In analogia con quanto si è osservato per le deformazioni infinitesime di un fibrato in rette su di una curva fissa, vi sono un prodotto "cup"

(1.4) $H^1(C, \Sigma_L) \otimes H^0(C, L) \to H^1(C, L)$

e una successione esatta

$$H^0(X, \mathcal{L}) \to H^0(C, L) \xrightarrow{F} H^1(C, L)$$

dove F è il prodotto "cup" con σ.

Si ha infine una successione esatta

(1.5) $0 \to \mathcal{O}_C \to \Sigma_L \to \Theta_C \to 0$

e l'immagine di σ in $H^1(C, \Theta_C)$ è la classe di Kodaira–Spencer della deformazione $X \to \operatorname{Spec} \mathbf{C}[\varepsilon]$.

Sia ora $X \xrightarrow{p} S$ un morfismo liscio e proiettivo di varietà algebriche le cui fibre sono curve di genere g. Supporremo che p possegga una sezione. Esistono allora [7] una varietà $\mathrm{Pic}^d\,(p)$, un morfismo liscio e proiettivo $\mathrm{Pic}^d(p) \xrightarrow{\pi} S$ e un fibrato in rette $\mathcal{L}_d$ su $X \times_S \mathrm{Pic}^d\,(p)$, detto *fibrato di Poincaré*, con la seguente proprietà.

(1.6) *Per ogni morfismo $S' \xrightarrow{\psi} S$ e ogni fibrato in rette $\mathcal{L}$ su $X \times_S S'$, tale che la restrizione di $\mathcal{L}$ a ogni fibra di $q: X \times_S S' \to S'$ abbia grado d, esiste un unico morfismo $S' \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Pic}^d\,(p)$ tale che $\pi \circ \varphi = \psi$ e*

$$(1_X \times \varphi)^*(\mathcal{L}_d) = \mathcal{L} \otimes q^* \mathcal{Q}$$

per qualche fibrato in rette $\mathcal{Q}$ su S'.

Naturalmente, se s è un punto di S

$$\pi^{-1}(s) = \mathrm{Pic}^d\,(p^{-1}(s)).$$

In particolare, se S è un punto, $\mathrm{Pic}^d(p) = \mathrm{Pic}^d(X)$.

§2. Le varietà W_d^r e G_d^r.

In tutto questo paragrafo indicheremo con $X \xrightarrow{p} S$ un morfismo liscio e proiettivo di varietà algebriche le cui fibre sono curve di genere g. Supporremo anche che p abbia una sezione.

Siano $\mathscr{L}_d$ un fibrato di Poincaré su $X \times_S \mathrm{Pic}^d(p)$ e

$$\mathrm{Pic}^d(p) \xrightarrow{\pi} S,$$
$$X \times_S \mathrm{Pic}^d(p) \xrightarrow{q} \mathrm{Pic}^d(p)$$

le proiezioni naturali. I teoremi fondamentali sul cambiamento di base in coomologia [8], [18], implicano che, per ogni punto x di $\mathrm{Pic}^d(p)$ esistono un intorno affine U di x e un omomorfismo di $\mathcal{O}_U$-moduli liberi

$$(2.1)\quad K^0 \xrightarrow{\alpha} K^1$$

con la seguente proprietà. Per ogni morfismo di varietà affini $V \to U$ vi sono isomorfismi funtoriali

$$H^i(q^{-1}(U) \times_U V, \mathscr{L}_{d|_{q^{-1}(U)}} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_V) = H^i(\Gamma(V, K^{\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_V))$$

In particolare se m e n sono i ranghi di K^0 e K^1, segue dal teorema di Riemann–Roch che

$$m - n = d - g + 1$$

Se si scelgono isomorfismi di $\Gamma(U, K^0)$ e $\Gamma(U, K^1)$ con $\Gamma(U, \mathcal{O}_U^m)$ e $\Gamma(U, \mathcal{O}_U^n)$, ad α è associata una matrice $n \times m$ A, con coefficienti in $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Definiamo ora $\mathrm{W}^r_{d,U}$ come la sottovarietà di U il cui ideale è il $(g - d + r)$-esimo ideale di Fitting della presentazione

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_U)^m \to \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^n \to H^1(q^{-1}(U), \mathscr{L}_{d|_{q^{-1}(U)}}) \to 0$$

cioè l'ideale generato dai minori di ordine $n - g + d - r + 1 = m - r$ di A. La formazione degli ideali di Fitting è compatibile con il cambiamento di base; è inoltre noto [4] che due diverse presentazioni di uno stesso modulo di tipo finito su un anello noetheriano hanno gli stessi ideali di Fitting. Esiste perciò una sottovarietà $\mathrm{W}^r_d(p)$ di $\mathrm{Pic}^d(p)$ tale che

$$\mathrm{W}^r_d(p) \cap U_i = \mathrm{W}^r_{d,U_i}$$

dove $\{U_i\}$ è un opportuno ricoprimento affine di $\mathrm{Pic}^d(p)$.

Sia ora $\mathbf{G} = \mathrm{Gr}(r+1, m)$ la Grassmanniana degli $(r+1)$-piani in $\mathbf{C}^m$ e sia M la varietà delle matrici complesse $n \times m$. Su M vi è un omomorfismo naturale di fasci

$$(2.2)\quad \mathcal{O}_M^m \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_M^n$$

la cui matrice è il morfismo identità di M. La matrice A associata a (2.1) può essere pensata come un morfismo di U in M. L'omomorfismo (2.1) è indotto da (2.2) tramite A. Inoltre (2.2) induce un omomorfismo

$$\mathcal{O}^m_{M\times\mathbf{G}} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathcal{O}^n_{M\times\mathbf{G}}$$

Indichiamo con F il sottofascio tautologico (localmente libero di rango $r+1$) di $\mathcal{O}^m_{\mathbf{G}}$ e poniamo $\tilde{F}=\mathcal{O}_M\times F$.

Sia V il luogo dei punti x di $M\times\mathbf{G}$ per cui $\tilde{F}\otimes k(x)$ è contenuto nel nucleo di

$$\tilde{\varphi}_x : k(x)^m \rightarrow k(x)^n$$

V è una sottovarietà liscia di $M\times\mathbf{G}$. Indichiamo con V' la sua immagine in M. E' noto [26] che l'ideale di V' è generato dai minori di ordine $m-r$. D'altro canto $\mathrm{W}^r_d(p)\cap U$ è l'immagine inversa di V' tramite il morfismo A.

Poniamo

$$\mathrm{G}^r_{d,U}=U\times_M V$$

$\mathrm{G}^r_{d,U}$ è una sottovarietà di $U\times\mathbf{G}$. Riassumendo si ha che

(2.3) *I diagrammi*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G}^r_{d,U} & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ V & \longrightarrow & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{W}^r_d(p)\cap U & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ V' & \longrightarrow & M \end{array}$$

sono diagrammi cartesiani.

Sia ora

$$j:\mathrm{G}^r_{d,U}\rightarrow M\times\mathbf{G}$$

il morfismo naturale e

$$g:q^{-1}(U)\times_U \mathrm{G}^r_{d,U}\rightarrow \mathrm{G}^r_{d,U}$$

la proiezione. Indichiamo con il simbolo $\mathcal{M}_U$ il fascio immagine inversa di $\mathcal{L}_d$ tramite il morfismo

$$q^{-1}(U)\times_U \mathrm{G}^r_{d,U}=X\times_S \mathrm{G}^r_{d,U}\rightarrow X\times_S \mathrm{Pic}^d\,(p)$$

Allora $\mathcal{F}_U = j^*(\tilde{F})$ è un sottofascio localmente libero di

$$g_*\mathcal{M}_U = \mathrm{Ker}\,(K^0 \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_{G^r_{d,U}} \to K^1 \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_{G^r_{d,U}})$$

Quanto sopra può essere riassunto dicendo che sul morfismo $q^{-1}(U) \to U$ vi è una famiglia naturale di g^r_d parametrizzata da $G^r_{d,U} \xrightarrow{\psi} U$, secondo la seguente:

(2.4) DEFINIZIONE. *Una famiglia di g^r_d su $X \xrightarrow{p} S$ parametrizzata da f è una terna $(f, \mathcal{L}, \mathcal{H})$ ove:*

a) *$f : S' \to S$ è un morfismo*

b) *$\mathcal{L}$ è un fibrato in rette su $X \times_S S'$ la cui restrizione a ogni fibra di $X \times_S S' \xrightarrow{p'} S'$ ha grado d*

c) *$\mathcal{H}$ è un sottofascio localmente libero di rango $r+1$ di $p'_*(\mathcal{L})$ tale che, per ogni $s \in S'$, l'omomorfismo*

$$\mathcal{H} \otimes k(s) \to H^0(p'^{-1}(s), \mathcal{L} \otimes k(s))$$

sia iniettivo.

Abbiamo il seguente

(2.5) TEOREMA. *Sia $X \xrightarrow{p} S$ un morfismo liscio e proiettivo di varietà algebriche le cui fibre sono curve di genere g. Supponiamo che p abbia una sezione. Sia $\mathrm{Pic}^d(p) \xrightarrow{\pi} S$ la proiezione naturale. Allora esistono una varietà $G^r_d(p)$, un morfismo proiettivo*

$$G^r_d(p) \xrightarrow{c} \mathrm{Pic}^d(p)$$

e una famiglia $(\pi \circ c, \mathcal{M}, \mathcal{F})$ di g^r_d su $X \xrightarrow{p} S$ con la seguente proprietà universale. Se $(f : S' \to S, \mathcal{L}, \mathcal{H})$ è una famiglia di g^r_d su $X \xrightarrow{p} S$, esiste un unico morfismo

$$\eta : S' \to G^r_d(p)$$

di varietà su S tale che l'immagine inversa di $(\pi \circ c, \mathcal{M}, \mathcal{F})$, tramite η, sia isomorfa a

$$(f, \mathcal{L} \otimes \mathcal{Q}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{Q})$$

per qualche fibrato in rette $\mathcal{Q}$ su S'. Inoltre, nel caso in cui $f = \pi \circ \psi$, $S' = G^r_{d,U}$, $\mathcal{L} = \mathcal{M}_U$, $\mathcal{H} = \mathcal{F}_U$, il morfismo η è un isomorfismo di $G^r_{d,U}$ su $c^{-1}(U)$. Infine $\mathcal{M} = (1_X \times c)^* \mathcal{L}_d$, dove $\mathcal{L}_d$ è un fibrato in rette di Poincaré su $X \times_S \mathrm{Pic}^d(p)$, e c si fattorizza attraverso l'inclusione $W^r_d(p) \hookrightarrow \mathrm{Pic}^d(p)$.

Dimostrazione. Per la proprietà universale di $\mathrm{Pic}^d(p)$, si può scrivere, per un unico $\tilde{f}: S' \to \mathrm{Pic}^d(p)$,

$$f = \pi \circ \tilde{f}$$
$$(1_X \times \tilde{f})^* \mathscr{L}_d \cong \mathscr{L} \otimes \mathscr{Q}$$

Basta ora dimostrare che $G^r_{d,U}$, $\mathscr{M}_U$, $\mathscr{F}_U$ hanno la proprietà universale descritta da (2.5) quando $\tilde{f}$ si fattorizza tramite l'inclusione di U in $\mathrm{Pic}^d(p)$. Sia

$$p': X \times_S S' \to S'$$

la proiezione. Il fascio $p'_* \mathscr{L}$ si identifica con il nucleo di

$$\tilde{f}^*(\alpha): \tilde{f}^* K^0 \to \tilde{f}^* K^1$$

Esiste un unico morfismo

$$h: S' \to \mathrm{Gr}(r+1, m) = \mathbf{G}$$

tale che

$$h^*(F) = \mathscr{H} \hookrightarrow \tilde{f}^* K^0 = h^*(\mathcal{O}^m_{\mathbf{G}})$$

Poichè $\mathscr{H} \subset \mathrm{Ker}\, \tilde{f}^*(\alpha)$, il morfismo

$$(\tilde{f}, h): S' \to U \times \mathbf{G}$$

è la composizione dell'inclusione

$$G^r_{d,U} \hookrightarrow U \times \mathbf{G}$$

e di un morfismo

$$\eta: S' \to G^r_{d,U}$$

di varietà su U tale che

$$\eta^* \mathscr{F}_U = \mathscr{H} \otimes \mathscr{Q}$$
$$(1_X \times \eta)^*(\mathscr{M}_U) = \mathscr{L} \otimes \mathscr{Q}$$

Che η sia unico segue dall'unicità di $\tilde{f}$ e h. Q.E.D.

Quando S è un punto, e X è, perciò, una curva di genere g, scriveremo $W^r_d(X)$, $G^r_d(X)$ in luogo di $W^r_d(p)$, $G^r_d(p)$. Come $\mathrm{Pic}^d(X)$ parametrizza le serie lineari complete di grado d su X, $W^r_d(X)$ e $G^r_d(X)$ parametrizzano, rispettivamente, le serie lineari complete su X di grado d e dimensione almeno r, e le serie lineari di grado d e dimensione r su X (cioè le g^r_d su X).

Sia C una curva di genere g. Ricordiamo (cf. (1.1)) che vi è un morfismo

$$u: C_d \to \mathrm{Pic}^d(C)$$

(2.6) PROPOSIZIONE (cf. [14]). $C^r_d = u^{-1}(W^r_d(C))$.

Dimostrazione. Indichiamo con p_1, p_2 le proiezioni di $C \times C_d$ sui due fattori e poniamo $\mathscr{L} = (1_C \times u)^*(\mathscr{L}_d)$. La sottovarietà $u^{-1}(W^r_d(C))$ di C_d ha come fascio di ideali il $(g-d+r)$-esimo ideale di Fitting di $R^1p_{2*}(\mathscr{L})$. Su $C \times C_d$ vi è un divisore D tale che

$$D \cdot (C \times \{\Delta\}) = \Delta, \qquad \Delta \in C_d$$

Inoltre D è piatto su C_d. Poichè $\mathscr{L} \otimes \mathcal{O}(-D)$ è banale su ogni fibra di p_2, esiste, su C_d, un fibrato in rette $\mathscr{Q}$ tale che

$$\mathcal{O}(D) = \mathscr{L} \otimes p_2^* \mathscr{Q}$$

Perciò $u^{-1}(W^r_d(C))$ ha, come fascio di ideali, il $(g-d+r)$-esimo ideale di Fitting di $R^1p_{2*}(\mathcal{O}(D))$. Dalla successione esatta di fasci su $C \times C_d$

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}_D(D) \to 0$$

si deduce una successione esatta di fasci su C_d

$$p_{2*}\mathcal{O}_D(D) \xrightarrow{\alpha} R^1p_{2*}\mathcal{O} \to R^1p_{2*}\mathcal{O}(D) \to 0$$

che può essere usata per calcolare gli ideali di Fitting di $R^1p_{2*}\mathcal{O}(D)$, poichè $p_{2*}\mathcal{O}_D(D)$ e $R^1p_{2*}\mathcal{O}$ sono localmente liberi di ranghi d e g rispettivamente. D'altra parte, per (1.2), α si identifica all'omomorfismo

$$u_*: \Theta_{C_d} \to u^*(\Theta_{\mathrm{Pic}^d(C)}) \qquad \text{Q.E.D.}$$

§3. Il significato geometrico della congettura di Petri

In questo paragrafo esporremo alcune conseguenze della congettura di Petri riguardanti la struttura delle varietà W^r_d.

Sia C una curva di genere $g \geq 3$. Siano r e d due interi non negativi. Sia L un fibrato in rette su C di grado d, e sia

$$W \subset H^0(C, L)$$

un sottospazio di dimensione $r+1$ (una g^r_d). Indicheremo con I il punto corrispondente a una tale g^r_d in $G^r_d(C)$. Diremo che *I soddisfa la condizione di Petri* se il prodotto "cup"

$$(3.1) \quad \mu_0 : W \otimes H^0(C, K \otimes L^{-1}) \to H^0(C, K)$$

è iniettivo.

La congettura di Petri è perciò equivalente a

(3.2) CONGETTURA. *Sia C una curva di genere $g \geq 3$, a moduli generali. Allora, per ogni r e ogni d, ogni punto I di $G^r_d(C)$ soddisfa la condizione di Petri.*

Il risultato fondamentale che traduce la congettura di Petri in un enunciato geometrico è il seguente

(3.3) TEOREMA. *Sia C una curva di genere $g \geq 3$. Sia I un punto di $G^r_d(C)$. Allora I soddisfa la condizione di Petri se e solo se $G^r_d(C)$ è liscia e di dimensione*

$$\rho = g - (r+1)(g-d+r)$$

nel punto I.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che ogni componente irriducibile di $G^r_d(C)$ ha dimensione pari almeno a ρ; poichè questa affermazione è di carattere locale, possiamo lavorare su $G^r_{d,U}$ dove U è un aperto affine di $\mathrm{Pic}^d(C)$. Segue da (2.3) e dal fatto che V è una sottovarietà liscia di $M \times \mathrm{Gr}(r+1, m)$ di codimensione $n(r+1)$, che ogni componente irriducible di $G^r_{d,U}$ ha dimensione pari almeno a ρ.

Siano ora L il fibrato in rette su C e W il sottospazio di $H^0(C, L)$ corrispondenti al punto $I \in G^r_d(C)$. Vogliamo calcolare lo spazio tangente di Zariski

$$T_I(G^r_d(C))$$

a $G^r_d(C)$ nel punto I. Per la proprietà universale di $G^r_d(C)$, $T_I(G^r_d(C))$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle classi di equivalenza di famiglie di g^r_d

su C parametrizzate da Spec $\mathbf{C}[\varepsilon]$ che estendono $W \subset H^0(C, L)$. Per l'esattezza della successione (1.3), l'immagine di $T_I(G^r_d(C))$ in $T_L(\mathrm{Pic}^d(C)) = H^1(C, \mathcal{O})$ è

(3.4) $H = \{\varphi \in H^1(C, \mathcal{O}) : \varphi \cdot W = 0\}$

Vi è perciò una successione esatta

(3.5) $0 \to H' \to T_I(G^r_d(C)) \to H \to 0$

dove H' è l'insieme delle classi di equivalenza di famiglie di g^r_d contenute in $|L|$ e cioè lo spazio tangente alla grassmanniana $\mathrm{Gr}(r+1, H^0(C, L))$ nel punto W. Quindi

$$H' = \mathrm{Hom}(W, H^0(C, L)/W)$$

e

$$\dim T_I(G^r_d(C)) = \dim H + (r+1)(\bar{r} - r)$$

dove si è posto $\bar{r} = \dim(H^0(C, L)) - 1$. Ora H è definito come il nucleo dell'aggiunta di (3.1):

$$H^1(C, \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}(W, H^1(C, L))$$

quindi

$$\dim T_I(G^r_d(C)) = (r+1)(\bar{r} - r) + \dim(\mathrm{coker}\, \mu_0).$$

Perciò dire che I soddisfa la condizione di Petri è equivalente a dire che

$$\begin{aligned} \dim T_I(G^r_d(C)) &= (r+1)(\bar{r} - r) + g - (r+1)(\bar{r} - d + g) \\ &= g - (r+1)(g - d + r) = \rho \end{aligned}$$

Poichè in precedenza si è osservato che ogni componente irriducibile di $G^r_d(C)$ ha dimensione pari almeno a ρ, ciò conclude la dimostrazione. Q.E.D.

Consideriamo un morfismo di varietà algebriche ridotte

(3.6) $f : X \to Y$

Supponiamo che X e Y siano connesse. Ricordiamo che f si dice una *risoluzione* *razionale* se X è liscia, Y è normale e di Cohen–Macaulay, f è propria e birazionale e le immagini dirette superiori $R^q f_*(\mathcal{O}_X)$, $q>0$, sono nulle. Se X e Y non sono connesse e $X_1, \dots, X_n$ sono le componenti connesse di X, diremo che (3.6) è una risoluzione razionale se, per ogni i,

$$f\,|_{X_i} : X_i \to f(X_i)$$

è una risoluzione razionale e Y è unione disgiunta degli $f(X_i)$.

(3.7) TEOREMA. *Se C è una curva di genere $g \geq 3$ che soddisfa la condizione di Petri per ogni g_d^r, ove d è un intero minore o eguale a $g-1$, allora $\mathrm{G}_d^r(C)$ è non singolare e di dimensione*

$$\rho = g-(r+1)(g-d+r).$$

Inoltre $\mathrm{W}_d^r(C) = c(\mathrm{G}_d^r(C))$ *e*

$$\mathrm{G}_d^r(C) \to \mathrm{W}_d^r(C)$$

è una risoluzione razionale.

La dimostrazione si basa su due lemmi che enunciamo senza dimostrazione.

(3.8) LEMMA (cf. [12], Lemma 2). *Siano X, Z, Z' varietà lisce e connesse e*

$$g : X \to Z, \qquad m : Z' \to Z$$

morfismi. Supponiamo che g sia proprio e che il morfismo indotto $f : X \to Y = g(X)$ sia una risoluzione razionale. Siano

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & Z' \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ X & \xrightarrow{g} & Z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & Z' \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

diagrammi cartesiani. Se X' è liscia e $\dim X' - \dim Z' = \dim X - \dim Z$, *allora l'immagine di g' è $j(Y')$ e*

$$f' : X' \to Y'$$

è una risoluzione razionale.

Prima di enunciare l'altro lemma, richiamiamo alcune notazioni del §2. Indichiamo con M la varietà delle matrici $n \times m$ a coefficienti complessi, con V la sottovarietà (liscia) di $M \times \mathrm{Gr}(r+1, m)$ costituita dalle coppie (B, W) tali che $B \cdot W = 0$, e con V' la sottovarietà di M il cui ideale è generato dai minori di ordine $m-r$.

(3.9) LEMMA (cf. [13], [26]). *Se $n \geq m$, V' è l'immagine di V tramite la proiezione di $M \times \mathrm{Gr}(r+1, m)$ su M e*

$$V \to V'$$

è una risoluzione razionale.

La dimostrazione di (3.7) è ora immediata. La prima parte segue dal Teorema (3.3) e dal teorema di esistenza per i divisori speciali [11], [14], [25]. Per quanto riguarda la seconda parte, la questione è di natura locale su $\mathrm{Pic}^d(C)$, perciò basta mostrare che ogni punto di $\mathrm{Pic}^d(C)$ possiede un intorno U tale che $c(\mathrm{G}^r_{d,U}) = \mathrm{W}^r_d(C) \cap U$ e che $\mathrm{G}^r_{d,U}$ sia una risoluzione razionale di $\mathrm{W}^r_d(C) \cap U$. Si può anche supporre che $\mathrm{W}^r_d(C) \cap U$ sia connesso: allora anche $\mathrm{G}^r_{d,U}$ lo è, poichè c ha fibre connesse. Il risultato segue ora da (2.3) e dai Lemmi (3.8) e (3.9) dopo aver notato che, per il Teorema (3.3) $\mathrm{G}^r_{d,U}$ è liscia e

$$\dim U - \dim \mathrm{G}^r_{d,U} = (r+1)(r+g-d)$$

mentre

$$\begin{aligned}\dim M - \dim V &= nm - (r+1)(m-r-1) + n(m-r-1)\\ &= (r+1)(n-m+r+1) = (r+1)(r+g-d)\end{aligned}$$

poichè, nel nostro caso, $m-n = d-g+1$. Ciò conclude la dimostrazione di (3.7).

(3.10) TEOREMA. *Sia C una curva di genere $g \geq 3$. Sia d un intero minore o uguale a $g-1$. Sia I un punto di $\mathrm{G}^r_d(C)$, e siano L il fibrato in rette su C e W il sottospazio $(r+1)$-dimensionale di $H^0(C, L)$ corrispondenti a I. Supponiamo che I soddisfi la condizione di Petri. Allora il cono tangente a $\mathrm{W}^r_d(C)$ nel punto L è la sottovarietà ridotta T di $T_L(\mathrm{Pic}^d(C)) = H^1(C, \mathcal{O})$ di supporto*

$$\mathrm{Supp}\, T = \{\varphi \in H^1(C, \mathcal{O}) : \varphi \cdot W = \{0\} \subset H^1(C, L), \textit{ per qualche } W \in \mathrm{Gr}(r+1, H^0(C, L))\}$$

Inoltre se N è il fibrato normale alla fibra di

$$c: G^r_d(C) \to W^r_d(C)$$

sopra L, il morfismo $N \to T$ è una risoluzione razionale.

Dimostrazione. Poniamo $\bar{r} = \dim H^0(C, L) - 1$ e $i = \dim H^1(C, L)$. Come segue dalla esattezza della successione (3.5), c_* applica lo spazio normale a $c^{-1}(L)$ in I isomorficamente sul sottospazio H di $H^1(C, \mathcal{O})$ definito da (3.4). Perciò l'immagine di N in $H^1(C, \mathcal{O})$ è precisamente T. Indichiamo con $\mathcal{V}$ la sottovarietà liscia di

$$\mathrm{Hom}\,(H^0(C, L),\ H^1(C, L)) \times \mathrm{Gr}\,(r+1,\ H^0(C, L))$$

costituita dalle coppie (ψ, W) tali che $\psi(W) = 0$. Per il Lemma (3.9) $\mathcal{V}$ è una risoluzione razionale della sua immagine $\mathcal{V}'$ in $\mathrm{Hom}\,(H^0(C, L),\ H^1(C, L))$. Inoltre il supporto di $\mathcal{V}'$ è l'insieme degli omomorfismi di $H^0(C, L)$ in $H^1(C, L)$ di rango non superiore a $\bar{r} - r$. Vi è un diagramma cartesiano

$$\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(C, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\mu_0^*} & \mathrm{Hom}\,(H^0(C, L),\ H^1(C, L)) \end{array}$$

Definiamo T' come l'immagine inversa di $\mathcal{V}'$ tramite μ_0^*. Poichè

$$\dim N - \dim H^1(C, \mathcal{O}) = \rho - g = (r+1)(d-g-r)$$

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{V} - \dim \mathrm{Hom}\,(H^0(C, L),\ H^1(C, L)) &= (r+1)(\bar{r}-r) + i(\bar{r}-r) - (r+1)i \\ &= (r+1)(\bar{r}-r-i) = (r+1)(d-g-r) \end{aligned}$$

e N è liscia, il Lemma (3.8) dice the $T = T'$ e che N è una risoluzione razionale di T. In particolare T è normale e birazionale a N. Per concludere si usa il seguente lemma, che enunciamo senza dimostrazione

(3.11) LEMMA (cf. [12], Proposition 1). *Sia $f: X \to Y$ un morfismo proprio tra varietà liscie. Sia y un punto di Y tale che $f^{-1}(y)$ sia liscia. Indichiamo con $\mathcal{N}$ il fibrato normale a $f^{-1}(y)$ e con $\mathcal{T}$ la sua immagine in $T_y(Y)$. Se $\mathcal{N}$ è birazionale a $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ è normale, allora $\mathcal{T}$ è il cono tangente a $f(X)$ in y.*

(3.12) *Osservazione.* Sempre nelle ipotesi del Teorema (3.10), supponiamo che C non sia iperellittica e identifichiamo C con la sua immagine canonica in $\mathbf{P}^{g-1}=\mathbf{P}H^1(C,\mathcal{O})$. Se D è un divisore su C indichiamo con $\bar{D}$ il sottospazio lineare generato da D. Allora il Teorema (3.10) ci dice che il proiettivizzato $\tilde{T}$ del cono tangente a $W^r_d(C)$ in L è

$$\tilde{T}=\bigcup\left\{\bigcap_{D\in W}\bar{D}: W\in\mathbf{P}\,\mathrm{Gr}\,(r,|L|)\right\}\subset\mathbf{P}^{g-1}=\mathbf{P},$$

dove si è indicata con $\mathbf{P}\,\mathrm{Gr}\,(r,|L|)$ la grassmaniana degli r-piani nello spazio proiettivo $|L|$. Parimenti indichiamo con $\tilde{N}$ il proiettivizzato del fibrato normale a $c^{-1}(L)=\mathrm{Gr}\,(r+1,H^0(C,L))=\mathbf{G}$, e, come al solito, poniamo $\bar{r}=\dim H^0(C,L)-1$, $i=\dim H^1(C,L)$. Vogliamo calcolare la classe di coomologia di $\tilde{N}$ in $\mathbf{P}\times\mathbf{G}$. Indichiamo con p e q le proiezioni di $\mathbf{P}\times\mathbf{G}$ sui due fattori. Immergiamo $\mathbf{P}\times\mathbf{G}$ in $\mathbf{P}\times\mathbf{P}'$ tramite l'immersione di Plücker di $\mathbf{G}$ in $\mathbf{P}'=\mathbf{P}(\Lambda^{r+1}H^0(C,L))$. Indichiamo con h la classe di coomologia di un iperpiano in $\mathbf{P}$ e con h' la classe di coomologia di un iperpiano in $\mathbf{P}'$. Se $\mathbf{P}\times\mathbf{P}'\to\mathbf{P}''$ è l'immersione di Segre, $\tilde{N}$ è tagliata da una sottovarietà lineare di $\mathbf{P}''$. Poichè la codimensione di $\tilde{N}$ in $\mathbf{P}\times\mathbf{G}$ è $i(r+1)$, la classe di $\tilde{N}$ è

$$\nu=(p^*h+q^*h')^{i(r+1)}$$

Perciò la classe di $\tilde{T}$ in $\mathbf{P}$ è

$$p_*\nu=d(r,\bar{r})\binom{i(r+1)}{(\bar{r}-r)(r+1)}h^{(r+1)(g-d+r)}$$

dove

$$d(r,\bar{r})=\frac{1!2!\cdots r!(r+1)(\bar{r}-r)!}{(\bar{r}-r)!(\bar{r}-r+1)!\cdots\bar{r}!}$$

è il grado della Grassmanniana $\mathbf{G}$ nella immersione di Plücker [9]. Concludendo

(3.13) PROPOSIZIONE. *Nelle ipotesi del Teorema* (3.10) *il proiettivizzato* $\tilde{T}$ *del cono tangente a* $W^r_d(C)$ *in* L *è una sottovarietà di* $\mathbf{P}^{g-1}=\mathbf{P}H^1(C,\mathcal{O})$ *di grado*

$$\frac{[(r+1)(g-d+\bar{r})]!1!2!\cdots r!}{[(r+1)(g-d+r)]!(\bar{r}-r)!\cdots\bar{r}!}$$

dove si è posto $\bar{r}=\dim H^0(C,L)-1$.

§4. g^r_d su di una curva mobile

Sia C una curva di genere $g \geq 3$. Ricordiamo [20] che esistono varietà liscie e irriducibili X, S e un morfismo liscio e proiettivo

$$p : X \to S$$

tali che

1) Ogni fibra di p è una curva di genere g e una di queste è isomorfa a C.
2) Per ogni punto $t \in S$ l'omomorfismo di Kodaira–Spencer

$$T_t(S) \to H^1(p^{-1}(t), \Theta_{p^{-1}(t)})$$

è un isomorfismo (ciò si esprime dicendo che la famiglia $p : X \to S$ è *completa* e *effettivamente parametrizzata*, e implica che il morfismo naturale da S allo spazio dei moduli delle curve di genere g è *finito* e ha *immagine densa*).

3) p possiede una sezione.

Fissiamo ora, una volta per tutte, una famiglia con le proprietà 1), 2), 3). Per ogni $s \in S$ porremo

$$p^{-1}(s) = C_s, \qquad K_{C_s} = K_s, \qquad \Theta_{C_s} = \Theta_s$$

Riferendoci alle notazioni introdotte nel §2 porremo, in modo suggestivo

$$Pic^d = \mathrm{Pic}^d\,(p)$$
$$\mathcal{W}^r_d = \mathrm{W}^r_d(p)$$
$$\mathcal{G}^r_d = \mathrm{G}^r_d(p)$$

cosicchè si hanno morfismi

$$c : \mathcal{G}^r_d \to Pic^d, \qquad \pi : Pic^d \to S$$

Sia I un punto di Pic^d, corrispondente a una fibra $C_t = p^{-1}(t)$ e a un fibrato in rette $L \to C_t$. Le argomentazioni svolte nel §1 consentono di identificare lo spazio tangente a Pic^d in I con $H^1(C_t, \Sigma_L)$. Se poi $I \in \mathcal{W}^r_d$ e w è il punto di $\mathcal{G}^r_d$ corrispondente a un sottospazio $(r+1)$-dimensionale $W \subset H^0(C_t, L)$, considerazioni analoghe a quelle contenute nella dimostrazione del Teorema (3.3) mostrano che vi è una successione esatta

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(W, H^0(C_t, L)/W) \to T_w(\mathcal{G}^r_d) \xrightarrow{c_*} T_I(Pic^d)$$

e inoltre che

$$c_*(T_w(\mathscr{G}^r_d)) = \{\sigma \in H^1(C_t, \Sigma_L) : \sigma \cdot W = 0\}$$

Ricordiamo la fondamentale applicazione

$$\mu_0 : W \otimes H^0(C_t, K_t \otimes L^{-1}) \to H^0(C_t, K_t)$$

Seguendo le idee sviluppate in [1], consideriamo l'applicazione lineare

$$\mu : W \otimes H^0(C_t, K_t \otimes L^{-1}) \to H^0(C_t, K_t \otimes \Sigma_L^*)$$

definita per dualità a partire da (1.4), e definiamo una applicazione lineare

$$\mu_1 : \operatorname{Ker} \mu_0 \to H^0(C_t, K_t^2)$$

a mezzo del diagramma commutativo

$$\tag{4.1}
\begin{tikzcd}
 & 0 \\
W \otimes H^0(C_t, K_t \otimes L^{-1}) \arrow[r, "\mu_0"] \arrow[d, equal] & H^0(C_t, K_t) \arrow[u] \\
W \otimes H^0(C_t, K_t \otimes L^{-1}) \arrow[r, "\mu"] & H^0(C_t, K_t \otimes \Sigma_L^*) \arrow[u] \\
\operatorname{Ker} \mu_0 \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mu_1"] & H^0(C_t, K_t^2) \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

L'osservazione centrale che mette in relazione l'omomorfismo μ_1 con l'applicazione

$$\pi \circ c : \mathscr{G}^r_d \to S$$

costruita all'inizio di questo paragrafo, sfrutta, in modo essenziale, la proprietà di completezza 2) soddisfatta, per ipotesi, dalla famiglia $X \to S$ e si lascia enunciare dal seguente

(4.2) LEMMA (cf. [1]). *Supponiamo che il morfismo $\pi \circ c : \mathscr{G}^r_d \to S$ sia suriettivo. Sia t un punto generale di S. Per ogni L e ogni W si ha che*

$$\mu_1 = 0$$

Dimostrazione. Essendo t generale si può assumere che per ogni $w \in (\pi \circ c)^{-1}(t)$

$$T_w(\mathcal{G}_d^r) \xrightarrow{(\pi\circ c)_*} T_t(S) \cong H^1(C_t, \Theta_t)$$

sia suriettivo. Da (4.1), per dualità, si ottiene un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H^1(C_t, \Sigma_L) & \xrightarrow{\mu^*} & \mathrm{Hom}\,(W, H^1(C_t, L)) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow \\ H^1(C_t, \Theta_t) & \xrightarrow{\mu_1^*} & (\mathrm{Ker}\,\mu_0)^* \end{array}$$

D'altra parte, l'ipotesi fatta su t significa che

$$\begin{array}{c} \mathrm{Ker}\,\mu^* = \{\sigma \in H^1(C_t, \Sigma_L) : \sigma \cdot W = 0\} = c_* T_w(\mathcal{G}_d^r) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ H^1(C_t, \Theta_t) \end{array}$$

è suriettiva. Q.E.D.

§5. Il fascio normale

Incominciamo col richiamare alcuni risultati elementari della teoria di Horikawa [10].

Dato un morfismo non banale

$$\varphi : C \to M$$

dove C è una curva e M una varietà liscia, il *fascio normale* $N = N_\varphi$ *al morfismo* φ è, per definizione, il conucleo dell'omomorfismo iniettivo di fasci

$$\varphi_* : \Theta_C \to \varphi^*(\Theta_M)$$

Si ha quindi una successione esatta

$$(5.1) \quad 0 \to \Theta_C \to \varphi^*\Theta_M \to N_\varphi \to 0$$

La teoria di Horikawa mette in corrispondenza biunivoca lo spazio vettoriale

$H^0(C, N)$ con l'insieme delle classi di equivalenza di deformazioni infinitesime di φ.

Una *deformazione infinitesima* di φ, lo ricordiamo, è il dato di una deformazione infinitesima di C,

$$p : \mathscr{C} \to \operatorname{Spec} \mathbf{C}[\varepsilon]$$

e di un morfismo

$$\tilde{\varphi} : \mathscr{C} \to M$$

tale che $\tilde{\varphi}\,|_C = \varphi$. La nozione di equivalenza tra deformazioni infinitesime di φ è quella ovvia.

Supponiamo ora che il genere di C sia almeno 3, che $M = \mathbf{P}^r$, $r \geq 1$, e che il morfismo φ sia associato a un sottospazio $(r+1)$-dimensionale $W \subset H^0(C, L)$, per un fibrato in rette L su C di grado d, di modo che la g^r_d definita da W non ha punti base. In questo caso la successione del fibrato normale (5.1) e la successione (1.5) sono legate dalla ben nota successione di Eulero, e, insieme, queste successioni formano il seguente diagramma commutativo:

$$(\Theta = \varphi^*(\Theta_{\mathbf{P}^r}))$$

$$\text{(5.2)} \quad \begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathcal{O}_C \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{O}_C \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \Sigma_L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & L^{\oplus(r+1)} \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Theta_C \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d] & \Theta \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

L'unico morfismo che va definito è λ. Per fare ciò notiamo che intrinsecamente, $\mathbf{P}^r = \mathbf{P}W^*$ e $L^{\oplus(r+1)} = L \otimes_{\mathbf{C}} W^*$. Sia ora $x_0, \ldots, x_r$ una base di E e $\xi_0, \ldots, \xi_r$ la base duale di W^*. Una sezione locale di Σ_L è un operatore differenziale ∇ di ordine ≤ 1 operante sulle sezioni di L. Porremo

$$\lambda(\nabla) = \Sigma \nabla x_i \otimes \xi_i$$

Il lettore non avrà alcuna difficoltà nel dimostrare la commutatività del diagramma (5.2). Da (5.2) si ottiene un diagramma commutativo di coomologia

(5.3)
$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr] & & & & \\
 & & & H^1(C,\Theta_C) \arrow[ddl, "\mu_0^*"'] \arrow[dr] & & H^0(C,N) \arrow[dl] & \\
 & & & & H^1(C,\Sigma_L) \arrow[dll, "\mu^*"'] \arrow[ddr] & & \\
 & & \operatorname{Hom}(W, H^1(C,L)) \arrow[dl] \arrow[d] & & & & \\
0 & H^1(C,N) \arrow[l] \arrow[dl] & H^1(C,\Theta) \arrow[l] & & & H^1(C,\Theta_C) \arrow[lll, "\mu_1^*"'] \arrow[dr] & \\
0 & & & & & & 0
\end{tikzcd}$$

dove si è fatta l'identificazione

$$\operatorname{Hom}(W, H^1(C,L)) = H^1(C, L \otimes_{\mathbf{C}} W^*) = H^1(C, L^{\oplus(r+1)})$$

Una prima immediata conseguenza del diagramma (5.3) è

(5.4) PROPOSIZIONE. *Il nucleo di μ_0 si identifica allo spazio duale di $H^1(C,\Theta)$. I nuclei di μ e μ_1 si identificano allo spazio duale di $H^1(C,N)$.*

Vogliamo sottolineare che l'interpretazione dei nuclei di μ_0, μ, μ_1 data da (5.4) è valida solo solo per g_d^r senza punti base. A questo punto è anche utile osservare che la congettura di Petri così come formulata in (3.2) si riduce in modo naturale alla corrispondente asserzione per le serie prive di punti base.

Tenuto conto del Lemma (4.2), ecco dunque una nuova e assai suggestiva formulazione della congettura di Petri.

(5.5) CONGETTURA. *Sia C una curva a moduli generali di genere $g \geq 3$. Sia*

$$\varphi : C \to \mathbf{P}^r \quad (r \geq 1)$$

un morfismo non degenere. Allora

$$H^1(C, N_\varphi) = 0$$

Come applicazione immediata delle considerazioni fin qui svolte dimostriamo la congettura di Petri per le g_d^1. E'questo un risultato da alcuni considerato noto classicamente e (ri)dimostrato da numerosi autori moderni [3], [16], [22], [24], [27].

Lax [16] lo enuncia esplicitamente nella forma equivalente data dal Teorema (3.3), per $r=1$. Abbiamo dunque il seguente

(5.6) SCOLIO. *Sia C una curva a moduli generali di genere* $g \geq 3$. *Allora C soddisfa la condizione di Petri per le* g_d^1; *in altri termini, per ogni* g_d^1 *su C si ha*

$$\mathrm{Ker}\ \mu_0 = \{0\}$$

Dimostrazione. Basta considerare il caso di una g_d^1 senza punti fissi, che dà luogo a un morfismo

$$\varphi : C \rightarrow \mathbf{P}^1$$

Poichè N_φ è concentrato sul divisore di ramificazione di φ si ha $H^1(C, N_\varphi) = 0$. Q.E.D.

Un'altra versione di (5.6) anch'essa classicamente nota [24] è:

(5.7) COROLLARIO. *Sia C una curva a moduli generali di genere* $g \geq 3$ *e D un divisore su C tale che* $\dim |D| \geq 1$. *Allora*

$$H^0(C, K(-2D)) = 0$$

Dimostrazione. Siano s_1, s_2 sezioni linearmente indipendenti di $H^0(C, \mathcal{O}(D))$ e sia t una sezione di $H^0(C, K(-2D))$. Allora

$$s_1 \otimes ts_2 - s_2 \otimes ts_1$$

appartiene al nucleo di μ_0 ed è nulla se e solo se t lo è. Q.E.D.

Concludiamo queste considerazioni con la seguente applicazione.

(5.8) PROPOSIZIONE. *Sia C una curva a moduli generali di genere* $g \geq 3$. *Sia*

$$\varphi : C \rightarrow \mathbf{P}^r \quad (r \geq 2)$$

un morfismo non degenere definito da una g^r_d speciale. Allora φ stabilisce una birazionalità tra C e la sua immagine $\Gamma = \varphi(C)$.

Dimostrazione. Poichè C è a moduli generali, per un risultato classico (della cui dimostrazione il lettore troverà una moderna versione in [1]) si ha che, o Γ è birazionale a C, oppure il genere di Γ è zero. Questa eventualità non può presentarsi. Se così fosse, detto $n = 2$ il grado della curva Γ, il divisore Δ, immagine inversa su C di un punto di Γ, avrebbe la proprietà che

$$\dim H^0(C, \mathcal{O}(\Delta)) \geq 2$$
$$H^0(C, K(-n\Delta)) \neq 0$$

in contraddizione con il Corollario (5.7). Q.E.D.

La conclusione della Proposizione (5.8) è chiaramente falsa se non si assume che φ sia definita da una g^r_d speciale. Come curiosità il lettore noterà che un'altra conseguenza di (5.6) è che la conclusione della Proposizione (5.8) continua a valere ove si assuma che la g^r_d che definisce φ sia completa (non necessariamente speciale), a meno che non sia $r = 2$, $d = g + 2$ e g pari.

§6. Un fenomeno assai curioso

In questo paragrafo ci porremo nella categoria degli spazi analitici complessi. I risultati che otterremo saranno applicabili alla nostra situazione algebrica per i noti teoremi di paragone di J. P. Serre [23].

Consideriamo un morfismo analitico non banale

$$\varphi : C \to M$$

dove C è una curva di genere $g \geq 1$ e M una varietà analitica liscia. Come nella situazione algebrica descritta nel §5, vi è un fascio normale a φ, N_φ, le cui sezioni sono in corrispondenza biunivoca con le classi di equivalenza di deformazioni infinitesime di φ.

Sia Z il *divisore di ramificazione di* φ, cioè il divisore degli zeri del differenziale di φ. Si ha allora un omomorfismo iniettivo

$$\varphi_* : \Theta_C(Z) \to \varphi^*(\Theta_M)$$

il cui conucleo è un fascio localmente libero che denoteremo con $N' = N'_\varphi$. Si ha dunque un diagramma commutativo di successioni esatte

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & \mathcal{K}_\varphi \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Theta_C \arrow[r] \arrow[d] & \varphi^*(\Theta_M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & N_\varphi \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Theta_C(Z) \arrow[r] \arrow[d] & \varphi^*(\Theta_M) \arrow[r] & N'_\varphi \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathcal{Q}_\varphi \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
\tag{6.1}
$$

In cui $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\varphi$ e $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\varphi$ sono (non-canonicamente) isomorfi al fascio strutturale $\mathcal{O}_Z$. Una prima immediata osservazione è che

$$H^1(C, N) = H^1(C, N')$$

Le considerazioni che ora svolgeremo hanno lo scopo di dare una interpretazione geometrica degli elementi di $H^0(C, \mathcal{K}_\varphi)$. Per fare ciò è innanzitutto necessario rendere esplicita l'interpretazione, in termini di deformazioni infinitesime di φ, degli elementi di $H^0(C, N)$.

Scegliamo un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di C costituito da dischi coordinati su cui è stato scelto un parametro locale z_α. Si può assumere che, per ogni α, $\varphi(U_\alpha) \subset V_\alpha$, dove V_α è un aperto coordinato di M, con parametri locali $w_\alpha = (w_\alpha^1, \ldots, w_\alpha^n)$. Poniamo

$$
\begin{aligned}
z_\alpha &= f_{\alpha\beta}(z_\beta) \quad \text{in} \quad U_\alpha \cap U_\beta \\
w_\alpha &= g_{\alpha\beta}(w_\beta) \quad \text{in} \quad V_\alpha \cap V_\beta
\end{aligned}
$$

e sia

$$w_\alpha = \psi_\alpha(z_\alpha)$$

l'espressione di φ in queste coordinate. Naturalmente

$$g_{\alpha\beta}(\psi_\beta(z_\beta)) = \psi_\alpha(f_{\alpha\beta}(z_\beta)) \tag{6.2}$$

Sia ora

$$(6.3)\qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & M \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ \operatorname{Spec} \mathbf{C}[\varepsilon] & & \end{array}$$

una deformazione infinitesima di φ. Questa deformazione è definita dai seguenti dati:

a) Funzioni di transizione per $\mathscr{C}$:

$$z_\alpha = \tilde{f}_{\alpha\beta}(z_\beta, \varepsilon) = f_{\alpha\beta}(z_\beta) + \varepsilon b_{\alpha\beta}(z_\beta)$$

b) Espressioni locali di $\tilde{\varphi}$

$$w_\alpha = \tilde{\psi}_\alpha(z_\alpha, \varepsilon) = \psi_\alpha(z_\alpha) + \varepsilon a_\alpha(z_\alpha)$$

Il cociclo $\{b_{\alpha\beta}(\partial/\partial z_\alpha)\}$ rappresenta la classe di Kodaira–Spencer di $p:\mathscr{C} \to \operatorname{Spec} \mathbf{C}[\varepsilon]$. Si ha inoltre una condizione di compatibilità analoga a (6.2). Questa condizione è equivalente a (6.2) insieme con la condizione

$$(6.4)\qquad \sum_j \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial w^j_\beta} a^j_\beta = a_\alpha + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial z_\alpha} b_{\alpha\beta}$$

Gli a_α definiscono un elemento di $H^0(C, N)$ che chiameremo la *classe di Horikawa di* (6.3). Naturalmente l'omomorfismo cobordo

$$H^0(C, N) \xrightarrow{\delta} H^1(C, \Theta_C)$$

applica la classe di Horikawa di (6.3) sulla classe di Kodaira-Spencer di $p:\mathscr{C} \to \operatorname{Spec} \mathbf{C}[\varepsilon]$.

Scriviamo $Z = \sum_{i=1}^s \nu_i p_i$, dove i p_i sono punti distinti. Possiamo supporre che ciascuno dei punti p_i sia contenuto in un unico aperto U_{α_i} e che $z_{\alpha_i}(p_i) = 0$. Ogni elemento $\{a_\alpha\}$ di $H^0(C, \mathscr{K})$ è della forma

$$(6.5)\qquad \begin{cases} a_{\alpha_i} = c_i(z_{\alpha_i}) \dfrac{\partial \psi_{\alpha_i}}{\partial z_{\alpha_i}} z_{\alpha_i}^{-\nu_i}, & i = 1, \ldots, s \\ a_\beta = 0, \quad \text{se} \quad \beta \neq \alpha_i, & i = 1, \ldots, s, \end{cases}$$

dove c_i è un polinomio di grado al più $\nu_i - 1$. Naturalmente la corrispondente classe di Kodaira–Spencer è data da

$$
(6.6)\qquad
\begin{aligned}
&b_{\alpha_i\beta} = -c_i(z_{\alpha_i})z_{\alpha_i}^{-\nu_i}\\
&b_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{se} \quad \alpha \neq \alpha_i \neq \beta \quad i = 1, \dots, s
\end{aligned}
$$

Nel caso in cui $c_i(z) = z^{\nu_i - 1}$ e $c_j = 0$ per ogni $j \neq i$, la classe di Kodaira–Spencer definita da (6.6) non è altro che la *variazione di Schiffer* [21] associata al punto p_i, e come tale è un elemento non nullo di $H^1(C, \Theta_C)$.

Le formule (6.5) dicono che il morfismo $\tilde{\varphi}$ associato a una classe $\{a_\alpha\} \in H^0(C, \mathscr{K})$ si fattorizza attraverso l'inclusione di $\Gamma = \varphi(C)$ in M:

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[rr, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr] & & M \\
& \Gamma \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

Il fenomeno ora descritto permette quindi di identificare gli elementi di $H^0(C, \mathscr{K})$ con le deformazioni infinitesime del morfismo φ che lasciano fissa (al prim'ordine) la curva immagine Γ. Dunque nel caso in cui φ sia una birazionalità tra C e Γ, *la presenza di "cuspidi" su Γ, comporta l'esistenza, dal punto di vista infinitesimo, di più di un modello liscio della curva Γ*, se così ci possiamo esprimere.

Veniamo ora a un semplice lemma di natura locale che ci permetterà di usare costruttivamente questo fenomeno, a prima vista paradossale.

Diamo innanzitutto la seguente definizione. Sia Δ il disco unitario nello spazio di una coordinata complessa z e sia

$$\psi : \Delta \to \mathbf{C}^n, \qquad n > 1$$

una applicazione iniettiva tale che $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. Con una opportuna scelta di coordinate in $\mathbf{C}^n$ si può assumere che

$$\psi(z) = (\psi_1, \psi_2, \dots)$$

dove ψ_i si annulla di ordine $k_i > 1$ per $z = 0$ e

$$
(6.7)\qquad
\begin{cases}
k_1 < k_2 < \cdots\\
k_1 \nmid k_2
\end{cases}
$$

E'immediato verficare che gli interi k_1, k_2 così definiti sono invarianti di ψ.

L'intero k_1 è *l'indice di ramificazione di* ψ *in* 0 e k_2 verrà chiamato il *tipo* del punto di ramificazione in questione.

(6.8) LEMMA. *Sia*

$$\psi:\{(z,t)\in\mathbf{C}^2:|z|<1,\ |t|<1\}=\Delta^2\to\mathbf{C}^n,\qquad n>1$$

un morfismo analitico. Supponiamo che, comunque fissato t, $\psi_t(z)=\psi(z,t)$ *sia iniettiva, abbia un unico punto di ramificazione, e che l'indice e il tipo di questo punto siano indipendenti da t. Supponiamo anche che esista una funzione meromorfa* $f(z)$ *tale che*

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(z,0)=f(z)\frac{\partial\psi}{\partial z}(z,0) \tag{6.9}$$

Allora $f(z)$ *è olomorfa.*

Dimostrazione. E'semplice verificare che la validità (o meno) dell'ipotesi (6.9) e della tesi non è inficiata ove si effettuino, in $\mathbf{C}^n$, un arbitrario cambiamento di coordinate e, in Δ^2, un cambiamento di coordinate del tipo $z'=z'(z,t)$, $t'=t$. Sia $V\subset\Delta^2$ il luogo dei punti di ramificazione degli ψ_t. Poichè, per ipotesi, V si proietta bijettivamente su $\{t\in\mathbf{C}:|t|<1\}$, V è una sottovarietà liscia di Δ^2 e si può supporre che la sua equazione sia $z=0$. L'indice di ramificazione di ψ_t non dipende da t e lo indichiamo con h; quindi, a meno di un cambiamento di coordinate in $\mathbf{C}^n$ e della moltiplicazione di z per una funzione mai nulla si può supporre che

$$\psi=(\psi_1,\dots,\psi_n)$$

sia della forma

$$\begin{aligned}&\psi_1(z,t)=\alpha(t)+z^h\\&\psi_i(z,t)=P_i(z^h,t)+\gamma_i(t)z^k+[k];\qquad i=2,\dots,n\end{aligned} \tag{6.10}$$

dove:

a) $k>h$
b) h non divide k
c) $P_i(\zeta,t)$ è un polinomio in ζ
d) le funzioni γ_i non sono tutte identicamente nulle
e) il simbolo $[k]$ denota una somma di termini di ordine superiore a k in z.

L'ipotesi che il tipo del punto di ramificazione di ψ_t non dipenda da t significa che una tra le funzioni γ_i, diciamo γ_2, non si annulla per $t=0$. La (6.9) e la (6.10) implicano intanto che

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0)=hf(z)z^{h-1}$$

Perciò $f(z)=cz^{1-h}$, dove c è una costante. Usando ancora (6.9) e (6.10) si ottiene che

$$\frac{\partial P_2}{\partial t}(z^h,0)+\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}(0)z^k+[k]=c\left(h\frac{\partial P_2}{\partial \zeta}(z^h,0)+k\gamma_2(0)z^{k-h}+[k-h]\right).$$

Poichè $\gamma_2(0)\neq 0$ deve essere $c=0$. Dunque, in questo particolare sistema di coordinate, f è la funzione olomorfa identicamente nulla. Q.E.D.

(6.11) COROLLARIO. *Sia* $\mathscr{C}\xrightarrow{p}\Delta=\{t\in\mathbf{C}:|t|<1\}$ *una famiglia analitica di curve di genere* g, *e*

$$\varphi:\mathscr{C}\to M$$

un morfismo analitico di $\mathscr{C}$ *in una varietà analitica liscia* M. *Poniamo* $C_t=p^{-1}(t)$, $\varphi_t=\varphi\,|_{C_t}$. *Supponiamo che*

a) φ_t *stabilisca una birazionalità tra* C_t *e* $\varphi(C_t)$.

b) *Il numero, l'indice e il tipo dei punti di ramificazione di* φ_t *non dipendano da* t.

Allora la classe di Horikava di $(\mathscr{C},p,\varphi)$, *per* $t=0$, *non appartiene a* $H^0(C_0,\mathscr{K}_{\varphi_0})$, *a meno che non sia nulla.*

Dimostrazione. Sia V il luogo dei punti di ramificazione degli φ_t. L'ipotesi b) implica che V è un rivestimento non diramato di Δ. Si può quindi scegliere un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di $\mathscr{C}$ e una fuzione z_α in U_α di modo che $V\cap U_\alpha=\{z_\alpha=0\}$ e che (z_α,t) siano coordinate locali in U_α. Possiamo anche supporre che $\varphi(U_\alpha)$ sia contenuto in un aperto coordinato V_α di M. Siano $w_\alpha=(w_\alpha^1,\dots,w_\alpha^n)$ coordinate locali in V_α. In queste coordinate φ è data da

$$w_\alpha=\psi_\alpha(z_\alpha,t).$$

La classe di Horikawa di $(\mathscr{C}, p, \varphi)$ per $t=0$ è la sezione s di N_{φ_0} rappresentata da

$$\left\{\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial t}(z,0)\right\}$$

Ricordando (6.5), dire che questa classe appartiene a $H^0(C_0, \mathscr{K}_{\varphi_0})$ significa che vi sono funzioni meromorfe f_α tali che

$$\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial t}(z_\alpha, 0) = f_\alpha(z_\alpha)\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial z_\alpha}(z_\alpha, 0).$$

Per (6.8) le f_α sono olomorfe e quindi s è la sezione nulla di N_{φ_0}. Q.E.D.

In definitiva il significato del Lemma (6.8) e del Corollario (6.11) è il seguente. *Supponiamo di avere una sezione non nulla di $H^0(C, \mathscr{K})$ e di poter prolungare la deformazione infinitesima di $C \xrightarrow{\varphi} M$, ad essa corrispondente, in una deformazione effettiva. Allora "lungo questa deformazione la complessità della ramificazione di φ diminuisce."*

§7. La congettura di Petri per le g^2_d

Il nostro scopo principale, in questo paragrafo, è quello di dimostrare la congettura di Petri per le g^2_d. Otterremo anche risultati analoghi, ma più deboli, per le g^3_d.

Il teorema principale è il seguente.

(7.1) TEOREMA. *Sia C una curva a moduli generali di genere $g \geq 3$. Allora*

a) *C soddisfa la condizione di Petri per le g^2_d: in altri termini, per ogni intero d, per ogni fibrato in rette L di grado d su C e ogni sottospazio tri-dimensionale $W \subset H^0(C, L)$, il prodotto "cup"*

$$\mu_0 : W \otimes H^0(C, K_C \otimes L^{-1}) \to H^0(C, K_C)$$

è iniettivo.

Equivalentemente

b) *Per ogni morfismo non degenere*

$$\varphi : C \to \mathbf{P}^2$$

si ha che

$$H^1(C, N_\varphi) = 0.$$

Prima di esporre la dimostrazione di (7.1) introduciamo alcune notazioni che ci saranno utili nel seguito. Sia

$$X \xrightarrow{p} S$$

la famiglia di curve costruita nel §4. Useremo le stesse notaziono adottate in quel paragrafo. Inoltre denoteremo con il simbolo $\mathcal{G}_d^{r,k}$ il luogo dei punti di $\mathcal{G}_d^r$ corrispondenti a g_d^r per cui Ker μ_0 ha dimensione pari almeno a k. Naturalmente $\mathcal{G}_d^{r,k}$ è una sottovarietà chiusa di $\mathcal{G}_d^r$.

Dimostrazione del Teorema (7.1). Notiamo innanzitutto che a) e b) sono equivalenti per (4.2) e per (5.4). Indichiamo con il simbolo π' il morfismo $\pi \circ c$ di $\mathcal{G}_d^r$ in S. Dobbiamo mostrare che, per ogni d, $\pi'(\mathcal{G}_d^{2,1})$ è una sottovarietà propria di S. Supponiamo che ciò non sia vero, e sia d il minimo intero per cui $\pi'(\mathcal{G}_d^{2,1}) = S$. Allora un punto generale di $\mathcal{G}_d^{2,1}$ corrisponde a una g_d^2 speciale senza punti base. Vi sono perciò una varietà liscia B, un morfismo aperto

$$g : B \to S$$

e un morfismo

$$\varphi : X' = X \times_S B \to \mathbf{P}^2$$

tali che, per ogni $b \in B$,

$$(7.2) \quad H^1(C_{g(b)}, N_{\varphi_b}) \neq 0$$

dove si è indicata con φ_b la restrizione di φ alla fibra $C_{g(b)}$ di $X' \to B$ sopra b. Vogliamo mostrare che ciò è assurdo. Innanzitutto, se b è un punto di B, si ha un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & H^0(C_{g(b)}, N_{\varphi_b}) \arrow[dr, "\delta"] & \\ g_*: T_b(B) \arrow[ur, "h"] \arrow[r] & T_{g(b)}(S) = H^1(C_{g(b)}, \Theta_{g(b)}) & \end{tikzcd}$$

dove h associa ad ogni elemento di $T_b(B)$ la classe di Horikawa corrispondente.

Se poi b è un punto generale di B, g_* è suriettivo. Inoltre, sempre se b è un punto generale di B, φ_b induce, per la Proposizione (5.8), una birazionalità tra $C_{g(b)}$ e $\varphi_b(C_{g(b)})$ ed il numero, l'indice e il tipo dei punti di ramificazione di φ_t sono costanti al variare di t in un opportuno intorno di b. Perciò per il Corollario (6.11)

$$h(T_b(B)) \cap H^0(C_{g(b)}, \mathcal{K}_{\varphi_b}) = 0$$

e quindi

$$3g-3 \leq \dim H^0(C_{g(b)}, N'_{\varphi_b}).$$

Poichè, in questo caso, N'_{φ_b} è un fibrato in rette, deve essere

$$H^1(C_{g(b)}, N'_{\varphi_b}) = 0$$

e quindi

$$H^1(C_{g(b)}, N_{\varphi_b}) = 0$$

in contraddizione con (7.2). Q.E.D.

Una prima immediata conseguenza di (7.1) è che, se C è una curva a moduli generali di genere $g \geq 3$, per ogni g^2_d su C vale la diseguaglianza

(7.3) $d \geq \frac{2}{3}g + 3$

La dimostrazione del Teorema (7.1) mostra anche che, se C è una curva di genere $g \geq 3$ a moduli generali e

$$\varphi : C \to \mathbf{P}^2$$

un qualsiasi morfismo che induca una birazionalità tra C e $\varphi(C)$, allora

$$\text{grado}\,(N'_\varphi) \geq 4g-4.$$

D'altra parte il grado di N'_φ può essere calcolato usando i diagrammi (5.2) e (6.1), e risulta essere pari a

$$\text{grado}\,(N'_\varphi) = 2g-2-\text{grado}\,(Z)+3d$$

dove Z è il divisore degli zeri di φ_*. Perciò

(7.4) $\operatorname{grado}(Z) \leq 3d-2g+2$

La diseguaglianza (7.4) implica il seguente risultato, meno generale, ma certo più suggestivo.

"*Sia $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$ una curva algebrica irriducible ma eventualmente singolare di genere $g \geq 3$ e grado d. Se Γ ha moduli generali allora Γ non ha più di $3d-2g+2$ cuspidi.*"

La limitazione (7.4) non è la migliore possibile. Ci riserviamo di ritornare sulla questione in un successivo lavoro.

Terminiamo questo paragrafo applicando le considerazioni precedenti al caso delle g_d^3. Ne trarremo la seguente conclusione

(7.5) PROPOSIZIONE. *Sia C una curva a moduli generali di genere $g \geq 3$. Allora*

a) *Per ogni intero d, per ogni fibrato in rette L di grado d su C e ogni sottospazio quadridimensionale $W \subset H^0(C, L)$, il nucleo del prodotto "cup"*

$$\mu_0 : W \otimes H^0(C, K_C \otimes L^{-1}) \to H^0(C, K_C)$$

ha dimensione al più uno.

Equivalentemente

b) *Per ogni morfismo non degenere*

$$\varphi : C \to \mathbf{P}^3$$

si ha che

$$\dim H^0(C, N_\varphi) \leq 1$$

Dimostrazione. Basta considerare il caso in cui la g_d^3 corrispondente a φ è speciale e sappiamo che, in questa situazione, $\varphi(C)$ è birazionale a C. La dimostrazione si suddivide in tre passi successivi.

Primo passo. Mostriamo che due qualsiasi elementi del nucleo di μ_0 sono, punto per punto, proporzionali. Ricordiamo che Ker μ_0 è isomorfo a

$$H^0(C, N_\varphi'^{*} \otimes K_C).$$

Il fascio $N'_\varphi = N'$ è localmente libero di rango 2, e dai diagrammi (5.2) e (6.1) si ottiene

$$\text{grado}\,(\Lambda^2(N'^*\otimes K_C)) = 2g-2-4d+\text{grado}\,(Z)$$

dove Z è il divisore degli zeri di φ_*. Sia π la proiezione da un punto esterno a $\varphi(C)$. Applicando (7.4) a $\pi\circ\varphi$ si può dare una stima sul grado di Z ottenendo

$$\text{grado}\,(\Lambda^2(N'^*\otimes K_C)) \leq -d$$

Perciò due qualsiasi sezioni di $N'^*\otimes K_C$ sono, punto per punto, proporzionali.

Secondo passo. Mostriamo ora che il nucleo di μ_0 ha dimensione al più uguale a due. Sia $s_1, \ldots, s_4$ una base di W e supponiamo che

$$\sum_{i=1}^{4} s_i \otimes r_i, \qquad r_i \in H^0(C, K_C\otimes L^{-1}).$$

sia un elemento non nullo del nucleo di μ_0. Il primo passo della dimostrazione mostra che ogni altro elemento del nucleo di μ_0 è della forma

$$\sum s_i \otimes f r_i$$

dove f è una opportuna funzione meromorfa. Ovviamente una tale f è una sezione di $\mathcal{O}(\Delta)$, dove Δ è il divisore degli zeri comuni a $r_1, \ldots, r_4$. Si ha dunque

(7.6) $\quad \operatorname{Ker}\mu_0 \cong H^0(C, \mathcal{O}(\Delta)).$

D'altro canto è immediato verificare che la congettura di Petri per le g^2_d (Teorema (7.1)) sarebbe violata se $r_1, \ldots, r_4$ non fossero linearmente indipendenti. Dunque

$$\dim H^0(C, K_C\otimes L^{-1}(-\Delta)) \geq 4$$

Poniamo $\delta = \text{grado}\,\Delta$ e supponiamo che $\dim H^0(C, \mathcal{O}(\Delta)) > 2$. Applicando la diseguaglianza (7.3) alle serie $|K_C\otimes L^{-1}(-\Delta)|$, $|L|$, $|\Delta|$ si ottengono le diseguaglianze

$$2g-2-d-\delta > \tfrac{2}{3}g$$
$$d > \tfrac{2}{3}g$$
$$\delta > \tfrac{2}{3}g$$

che sono ovviamente incompatibili. Dunque la dimensione di $H^0(C, \mathcal{O}(\Delta))$ non può essere superiore a due.

Conclusione. Applichiamo i risultati ottenuti nel secondo passo ai fibrati in rette L e $K_C \otimes L^{-1}(-\Delta)$. Si ottiene

$$(7.7) \quad \begin{cases} 10-4d+3g \leq 0 \\ 10-4d'+3g \leq 0 \end{cases}$$

dove si è posto $d' = 2g-2-d-\delta$. Se $H^0(C, \mathcal{O}(\Delta))$ avesse dimensione due si potrebbe dedurre da (5.6) che

$$8-4\delta+2g \leq 0$$

Questa diseguaglianza è chiaramente incompatibile con (7.7). Q.E.D.

§8. Un calcolo di moduli

Un problema che sorge spontaneo e che è stato oggetto di attenzione da parte di numerosi autori è quello di calcolare il numero dei parametri da cui dipende una curva di genere g che possiede una g_d^r tale che

$$\rho = g-(r+1)(g-d+r) < 0$$

o, più in generale, tale che il nucleo di μ_0 non sia nullo.

Il problema si esprime in modo naturale usando la terminologia introdotta nei paragrafi 4 e 7.

Consideriamo dunque la famiglia $X \xrightarrow{p} S$ introdotta nel §4 e, con essa, le varietà $\mathcal{G}_d^{r,k}$ introdotte nel §7, e le relative proiezioni

$$\pi' : \mathcal{G}_d^{r,k} \to S$$

Poichè S è naturalmente un rivestimento di un aperto di $\mathcal{M}_g$, lo spazio dei moduli delle curve di genere g (e poichè $\mathcal{M}_g$ è ricoperto da aperti di questo tipo) il calcolo di parametri cui si è accennato si traduce nel problema di calcolare la dimensione delle componenti irriducibili di $\pi'(\mathcal{G}_d^{r,k})$.

Vogliamo offrire al lettore una discussione informale dei risultati noti in questa direzione.

Sia I un punto di $\mathcal{G}_d^r$, corrispondente a un fibrato in rette $L \to C = C_s$ e a un sottospazio $(r+1)$-dimensionale $W \subset H^0(C, L)$. Vi è un diagramma commutativo di successioni esatte

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & & & \\
& H^1(C,\mathcal{O}) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & H^1(C,\mathcal{O}) \arrow[d, "\mu_0^*"'] & & \\
T_I(\mathscr{G}^r_d) \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_*"'] & H^1(C,\Sigma_L) \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}\,(W, H^1(C,L)) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{Ker}\,\mu)^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
T_s(S) \arrow[r, phantom, "="] & H^1(C,\Theta_C) \arrow[r, "\mu_1^*"] \arrow[d] & (\mathrm{Ker}\,\mu_0)^* \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{Ker}\,\mu_1)^* \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Se ne deduce intanto che, se $\mathrm{Ker}\,\mu_1 = 0$ e $I \in \mathscr{G}^{r,k}_d$ allora

$$\dim \pi'_* T_I(\mathscr{G}^r_d) = 3g - 3 - k$$

In particolare se Y è una componente irriducibile di $\mathscr{G}^{r,k}_d$ e vale la proprietà

(8.1) "Per un punto generale di Y, $\mathrm{Ker}\,\mu_1 = 0$"

allora

(8.2) $\dim \pi'(Y) \leq 3g - 3 - k$.

Non ci è affatto chiaro in quali ipotesi si abbia l'eguaglianza in (8.2), anche supponendo che valga (8.1). Nè è chiaro per quali valori di r, k, d valga (8.1).

La condizione (8.1) è certamente verificata per $r = 1$ (vedi §5). Se poi

$$\rho < 0, \qquad k = -\rho$$

e perciò $\mathscr{G}^{1,k}_d = \mathscr{G}^1_d$, se ne deduce che $\pi'(\mathscr{G}^1_d)$ ha codimensione pari almeno a k [3], [24]. Più precisamente, B. Segre [22] ha dimostrato che la codimensione di $\pi'(\mathscr{G}^1_d)$ è esattamente $k = -\rho$.

Inoltre, ripetendo, con modifiche formali, la dimostrazione del Teorema (3.3), si può mostrare che $\mathscr{G}^1_d$ è liscia e di dimensione $3g - 3 + \rho$ [3] (si veda anche [1]). In particolare il risultato di B. Segre sopra ricordato implica che, *se una curva di genere $g \geq 3$ possiede una g^1_d tale che $\rho \leq 0$, in generale ne possiede un numero finito.*

Sia ora Y una componente irriducibile di $\mathcal{G}_d^{2,k}$. Supponiamo che Y contenga un punto corrispondente a una curva C e a una g_d^2 su C (anche con punti base) tale che il morfismo

$$C \to \mathbf{P}^2$$

da essa definito induca una birazionalità tra C e l'immagine di C. Vogliamo mostrare che, in queste ipotesi, vale (8.2).

E' semplice mostrare che

$$k \leq 2 \dim H^1(C, L) \leq 2g-4$$

Si può perciò supporre che $\pi'(Y)$ abbia dimensione pari almeno a $g+1$. Sia ora I un punto generale di Y corrispondente a un sottospazio tridimensionale W di $H^0(C, L)$. Vogliamo mostrare che $\operatorname{Ker} \mu_1 = 0$. Se si sostituisce la g_d^2 (definita da W) con la corrispondente $g_{d'}^2$ senza punti base, la dimensione di $\operatorname{Ker} \mu_1$ non diminuisce. Si può perciò supporre che la g_d^2 non abbia punti base. Sia φ il morfismo di C in $\mathbf{P}^2$ associato a W. Poichè I è un punto generale di Y, $\pi'_*(T_I(\mathcal{G}_d^{2,k}))$ ha dimensione pari almeno a $g+1$. Applicando il Corollario (6.11) si ottiene

$$\dim H^0(C, N'_\varphi) \geq g+1$$

e poichè N'_φ è un fibrato in rette si ha

$$(\operatorname{Ker} \mu_1)^* = H^1(C_1 N_\varphi) = H^1(C, N'_\varphi) = 0$$

In conclusione si può affermare che *la sottovarietà dello spazio dei moduli $\mathcal{M}_g$ corrispondente a quelle curve di genere g che posseggono una g_d^2, non composta con una involuzione, e per cui il nucleo di μ_0 abbia dimensione eguale almeno a k, ha codimensione non inferiore a k.* E' facile vedere che l'ipotesi che la g_d^2 non sia composta con una involuzione è essenziale.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARBARELLO, E., CORNALBA, M., GRIFFITHS, P. and HARRIS, J., *Topics in the theory of algebraic curves*, di prossima pubblicazione in Annals of Mathematics Studies.

[2] BRILL, A. and NOETHER, M., *Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendungen in der Geometrie*, Math. Ann. 7 (1873), 269–310.

[3] FARKAS, H. M., *Special divisors and analytic subloci of the Teichmüller space*, Amer. J. Math. *88* (1966), 881–901.

[4] FITTING, H., *Die Determinantenideale eines Moduls*, Jahresber. Deutsch. Math. Verein. *46* (1936), 195–228.

[5] FULTON, W., *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*, Annals of Math. *90* (1969), 542–575.

[6] GRIFFITHS, P. and HARRIS, J., *The dimension of the variety of special linear systems on a general curve*, Duke Math. J. *47* (1980), 233–272.
[7] GROTHENDIECK, A., *Technique de descente et théorèmes d'existence en géometrie algébrique V. Les Schémas de Picard; théorèmes d'existence*, Séminaire Bourbaki 14ᵉ année (1961–62) Exposé 232.
[8] ——, DIEUDONNÉ J., *Eléménts de géometrie algébrique* III 2, n. 17, I.H.E.S. Publ. Math., 1963.
[9] HODGE, W. V. and PEDOE, D., *Methods of algebraic geometry*, Cambridge 1952.
[10] HORIKAWA, E., *On deformations of holomorphic maps* I, J. Math. Soc. Japan *25* (1973), 372–396.
[11] KEMPF, G., *Schubert methods with an application to algebraic curves*. Publications of Mathematisch Centrum, Amsterdam 1971.
[12] ——, *On the geometry of a theorem of Riemann*, Ann. Math. *98* (1973), 178–185.
[13] ——, *On the collapsing of homogeneous bundles*, Inventiones Math. *37* (1976), 229–239.
[14] KLEIMAN, S. and LAKSOV, D., *On the existence of special divisors*, Amer. J. Math. *94* (1972), 431–436.
[15] KODAIRA, K. and SPENCER, D. C., *On deformations of complex analytic structures I, II*, Ann. Math. *67* (1957), 328–401, 403–465.
[16] LAX, R. F., *On the dimension of varieties of special divisors*, Trans. Amer. Math. Soc. *203* (1975), 141–159.
[17] MARTENS, H., *On the varieties of special divisors on a curve*, J. Reine Angew. Math. *227* (1967), 111–120.
[18] MUMFORD, D., *Abelian varieties*, Tata Inst. Studies in Math., Oxford University Press, London–New York 1974.
[19] PETRI, K., *Über Spezialkurven I*, Math. Ann. *93* (1924), 182–209.
[20] POPP, H., *Moduli theory and the classification theory of algebraic varieties*, Lecture Notes in Mathematics vol. 620, Springer-Verlag, Berlin–New York 1977.
[21] SCHIFFER, M. and SPENCER, D. C., *Functionals of finite Riemann surfaces*, Princeton University Press, Princeton 1954.
[22] SEGRE, B., *Sui moduli delle curve poligonali, e sopra un complemento al Teorema di esistenza di Riemann*, Math. Annalen *100* (1928), 537–551.
[23] SERRE, J. P., *Géometrie algébrique et géometrie analytique*, Ann. Inst. Fourier *6* (1955), 1–42.
[24] SEVERI, F., *Sul teorema di esistenza di Riemann*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo *46* (1922), 105–116.
[25] SZPIRO, L., *Travaux de Kempf, Kleiman, Laksov sur les diviseurs exceptionnels*, Sém. Bourbaki 24ᵉ Année (1971–72), Exposé 417.
[26] WEYL, H., *The classical groups*, Princeton, 1939.
[27] ZARISKI, O., *On the moduli of algebraic functions possessing a given monodromie group*, Amer. J. Math. *52* (1930), 150–170.

Enrico Arbarello
Department of Mathematics
Harvard University
Cambridge, Ma. 02138, U.S.A.

Maurizio Cornalba
Istituto di Matematica
Università di Pavia
I-27100 Pavia
Italia

Reçu le 19 mai 1980

Nota aggiunta all'alto della correzione delle bozze: la congettura di Petri è stata recentemente dimostrata da D. Gieseker.