Ein Endlichkeitssatz für Klassenzahlen invarianter Formen.

Autor(en): **Quebbemann, Heinz-Georg**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **55 (1980)**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-42376

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **55** (1980) 294–301 Birkhäuser Verlag, Basel

Ein Endlichkeitssatz für Klassenzahlen invarianter Formen

HEINZ-GEORG QUEBBEMANN

Einleitung

Ein grundlegender Satz über quadratische Formen auf Gittern über einem globalen Dedekindring besagt: Die Anzahl der Klassen mit gegebenem Rang und Volumen ist endlich ([3], § 103).

Nun betrachtet man oft Gitter mit einer zusätzlichen Struktur (z.B. der Operation einer Gruppe), wobei die Formen bezüglich dieser Struktur invariant sind. Dann gibt es zwar i.a. unendlich viele Klassen von Gittern mit gleichem Rang, aber für Formen auf einem festen Gitter stellt sich wieder die Frage nach der Endlichkeit von Klassenzahlen. Wie wir hier zeigen wollen, läßt sich diese Frage mit elementaren Mitteln (nämlich über jedem Dedekindring mit endlichen Restklassenkörpern) auf "klassische" Fälle zurückführen. Sie wird dann unter geeigneten Voraussetzungen durch den obigen Satz in positivem Sinne beantwortet.

Es ergibt sich insbesondere ein Endlichkeitssatz für Konjugationsklassen in klassischen Gruppen. Dieser Satz ist für Klassen mit halbeinfachem Minimalpolynom kürzlich von E. Bayer und F. Michel [1] bewiesen worden, und durch ihre Arbeit wurde die vorliegende angeregt.

Wir benutzen in modifizierter Weise Methoden aus [4], § 1–3 (vgl. auch G. E. Wall [6]).

1. Definitionen. Formulierung des Ergebnisses.

1.1 Wir benutzen durchgehend die folgenden Bezeichnungen und Voraussetzungen: R sei ein Dedekindring mit endlichen Restklassenkörpern, K der Quotientenkörper, $\mathrm{char}(K) \neq 2$, A eine R-Algebra, L eine endlich-dimensionale K-Algebra, S eine R-Ordnung in L (also eine Unter-R-Algebra, als R-Modul endlich erzeugt, mit $KS = L$). Es seien R-lineare Antiautomorphismen ι auf A und σ auf L mit $S = S^{\sigma}$ gegeben. Und zwar sei ι eine Involution (d.h. ι^2 ist die Identität), und es gebe ein $\varepsilon \in S$ derart, daß σ^2 der Automorphismus $c \mapsto \varepsilon c \varepsilon^{\sigma}$ ($c \in L$) ist.

1.2. Unter einem (A, L)-*Modul* vertstehen wir einen (A, L)-Bimodul, auf dem R zentral operiert und der über L endlich erzeugt projektiv ist. (Im Fall $A = R$ sprechen wir kurz von L-Moduln.) Unter einer *Form* auf einem (A, L)-Modul V verstehen wir eine nicht-singuläre Sesquilinearform $h: V \times V \to L$ über L mit $h(av, w) = h(v, a^{\iota}w)$ fü $a \in A$ und $v, w \in V$. Die Nicht-Singularität bedeutet, daß die Abbildung $v \mapsto h(v, .)$ von V in $V^* = \mathrm{Hom}_L(V, L)$ bijektiv ist, und zwar ist dies ein (A, L)-Modul-Isomorphismus, wenn man die Modul-Struktur auf V^* durch $(afc)(v) = c^{\sigma} f(a^{\iota}v)$ definiert ($a \in A, f \in V^*, c \in L$); wir identifizieren h oft mit diesem Isomorphismus. Die Form h auf V heißt ε-*hermitesch*, wenn $h(v, w) = h(w, v)^{\sigma}\varepsilon$ für $v, w \in V$ gilt; unter der obigen Identifikation heißt das: $h = h^*\varepsilon_V$ mit $\varepsilon_V: V \to V^{**}$, $\varepsilon_V(v)(f) = f(v)^{\sigma}\varepsilon$ für $v \in V$, $f \in V^*$. (Vgl. [4], § 1.)

1.3. Ein (A, S)-*Gitter* (für $A = R$ kurz S-Gitter) in einem (A, L)-Modul V ist ein (A, S)-Untermodul M, der über R endlich erzeugt ist, mit $MK = V$. Eine *Form* auf M ist eine Form h auf V mit $h(M) \subset M^*$, wobei M^* das (A, S)-Gitter $\{f \in V^* \mid f(M) \subset S\}$ bezeichnet. Natürlich heißen zwei Formen h, h' auf M isometrisch oder in derselben Klasse, wnn $h = g^*h'g$ mit einem (A, S)-linearen Automorphismus g von M gilt.

Sei M ein (A, S)-Gitter. Wir sagen, *für* (ε-*hermitesche Formen auf*) M *gilt der Endlichkeitssatz*, wenn es zu jedem $\delta \neq 0$ aus R höchstens endlich viele Klassen von ε-hermiteschen Formen h auf M mit $\delta M^* \subset h(M)$ gibt.

1.4. Sei V ein (A, L)-Modul und $\{W_1 \ldots, W_r\}$ ein Vertretersystem für die Isomorphieklassen der selbstdualen unzerlegbaren direkten Summanden von V. (Ein Modul W heißt selbstdual, wenn $W \cong W^*$ gilt.) Insbesondere ist $E_i = \mathrm{End}(W_i)$ ein lokaler Ring ([2], §2, no. 2, Proposition 4). Sei h_i eine fest gewählte Form auf W_i. Wir können h_i als $(\varepsilon_i\varepsilon)$-hermitesch für ein $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ annehmen (nachdem wir evt. h_i durch $h_i + h_i^*(\varepsilon_i\varepsilon)_{W_i}$ ersetzt haben; vgl. [4], Proposition 2.5).

Bezeichne J_i das maximale Ideal von E_i. Die Form h_i liefert auf dem Schiefkörper $D_i = E_i/J_i$ eine Involution τ_i, induziert durch $e \mapsto h_i^{-1}e^*h_i$ für $e \in E_i$. Sei T_i irgendeine R-Ordnung in D_i mit $T_i = T_i^{\tau_i}$.

SATZ. *Gilt der Endlichkeitssatz für* ε_i-*hermitesche Formen auf* T_i-*Gittern* ($i = 1, \ldots, r$), *so auch für* ε-*hermitesche Formen auf* (A, S)-*Gittern in* V.

1.5. Für den Rest dieses Paragraphen sei K ein *globaler* Körper und R derart, daß fast alle Primstellen in K von Primidealen in R kommen. Wir betrachten einen (A, L)-Modul V mit *kommutativen* D_i. Dann ist der Endlichkeitssatz für T_i-Gitter im Fall quadratischer Formen der besagte klassische Satz ([3], § 103), im

Fall alternierender Bilinearformen elementar ([5], Proposition 1.3), im Fall hermitescher Formen auf den ersten Fall zurückführbar ([1], Proposition 2).

KOROLLAR. *Der Endlichkeitssatz gilt für jedes* (A, S)*-Gitter in* V.

1.6. In der Anwendung ist $L = K$ order L/K eine quadratische Körpererweiterung mit nicht-trivialem Automorphismus σ. Sei speziell A der Laurent-Polynomring $R[t, t^{-1}]$ mit der durch $t \mapsto t^{-1}$ definierten Involution ι. Da $A \otimes_R L$ Hauptidealring ist, sind unzerlegbare Moduln zyklisch und haben daher kommutative Endomorphismenringe.

KOROLLAR. *Sei M ein S-Gitter mit nicht-ausgearteter* ε*-hemitescher Form h über S. Dann enthält eine Konjugationsklasse der linearen Gruppe* GL(M) *höshstens endlich viele Konjugationsklassen der unitären Gruppe* (M, h).

Denn wie man leicht nachrechnet, sind zwei Isometrien t_1 und $t_2 = gt_1g^{-1}$ ($g \in GL(M)$) in $U(M, h)$ konjugiert, wenn h und g^*hg als Formen auf dem (A, S)-Gitter (M, t_1) in derselben Klasse liegen.

Analoge Ergebnisse erhält man für selbstadjungierte oder schiefadjungierte Endomorphismen ($A = R[t]$, $t^\iota = \pm t$).

2. Beweis des Satzes

2.1. Wir gebrauchen die Bezeichnungen aus 1.4; (A, S)-Gitter heißen kurz Gitter.

LEMMA. *Gilt der Endlichkeitssatz für wenigstens ein Gitter in V, so gilt er für jedes Gitter in V.*

Beweis. Angenommen, der Endlichkeitssatz gilt für ein Gitter M in V. Sei N ein weiteres Gitter. Wir können $\alpha, \beta \neq 0$ aus R wählen mit $\alpha M \subset N \subset \beta^{-1}M$. Sei h eine Form auf N und $\delta N^* \subset h(N)$. Dann ist $\alpha^2 h$ eine Form auf M, und es gilt

$$\alpha^2\beta^2\delta M^* \subset \alpha^2\beta\delta N^* \subset \alpha^2\beta h(N) \subset \alpha^2 h(M).$$

Sei ferner h' eine Form auf N und $\alpha^2 h'$ isometrisch zu $\alpha^2 h$ auf M, also $h' = f^*hf$ für ein $f \in \mathrm{Aut}(V)$ mit $f(M) = M$. Es gilt $\alpha M \subset f(N) \subset \beta^{-1}M$, und da $\beta^{-1}M/\alpha M$ als ein endlich erzeuger R-Torsionsmodul nur endlich viele Elemente hat, gibt es für $f(N)$ nur endlich viele Möglichkeiten. Gilt aber $h' = f^*hf$, $h'' = g^*hg$ und

$f(N)=g(N)$, so ist die Einschränkung von $g^{-1}f$ auf N ein Automorphismus mit $h'=(g^{-1}f)^*h''g^{-1}f$, also liegen h' und h'' in derselben Klasse. Damit ist klar, daß der Endlichkeitssatz auch für N gilt.

2.2. Wir können annehmen, daß V selbstdual ist. Nach dem Satz von Krull-Schmidt ([2], § 2, no. 2, Théorèm 1) gibt es eine Zerlegung

$$V=V'\oplus V''\oplus V_1\oplus\cdots\oplus V_r,$$

wobei V' keinen nicht-trivialen selbstdualen direkten Summanden hat, $V''\cong V'^*$ und $V_i\cong W_i^{m_i}$ für geeignete $m_i\in\mathbb{N}$ gilt. Ohne Einschränkung sei $V''=V'^*$, $V_i=W_i^{m_i}$. Nach 2.1 genügt es, in V ein festes Gitter M zu betrachten. Wir wählen Gitter M' in V', $M''=M'^*$, N_i in W_i und setzen

$$M=M'\oplus M'^*\oplus N_1^{m_1}\oplus\cdots\oplus N_r^{m_r}.$$

Als nächstes konstruieren wir eine Algebra E und eine Ordnung Z in E derart, daß sich das Endlichkeitsproblem von M auf ein Z-Gitter verlagert. Und zwar sei $E=\mathrm{End}(U)$ für

$$U=V'\oplus V''\oplus W_1\oplus\cdots\oplus W_r.$$

Wir definieren eine Form h_0 auf U als die orthogonale Summe der "neutralen" Form $\begin{pmatrix}0 & \mathrm{id}_{V''}\\ \varepsilon_{V'} & 0\end{pmatrix}$ auf $V'\oplus V''$ und der Formen h_i auf W_i. Sei τ der Antiautomorphismus $e\mapsto h_0^{-1}e^*h_0$ von E. Dann ist τ^2 der Automorphismus $e\mapsto\eta e\eta^\tau$ mit

$$\eta=h_0^{-1}h_0^*\varepsilon_U=id_{V'\oplus V''}\oplus\varepsilon_1 id_{W_1}\oplus\cdots\oplus\varepsilon_r id_{W_r}.$$

Wir setzen

$$N=M'\oplus M''\oplus N_1\oplus\cdots\oplus N_r.$$

Die gesuchte R-Ordnung in E ist nun $Z=\mathrm{End}(N)\cap\mathrm{End}(N)^\tau$. (Offensichtlich gilt $\eta\in Z$ und $Z=Z^\tau$.)

2.3. Sei nämlich $X=\mathrm{Hom}(U,V)$ mit der natürlichen Struktur als (rechter) E-Modul. Dann ist $P=\mathrm{Hom}(N,M)$ ein Z-Gitter in X. Zu einer Form h auf V definieren wir nach [4], Proposition 2.4 eine Form h_E auf X durch

$$h_E(x,y)=h_0^{-1}x^*hy\qquad(x,y\in X).$$

Ist h ε-hermitesch, so ist h_E η-hermitesch: Es gilt

$$h_E(x, y) = h_0^{-1}x^*h^*\varepsilon_V y = h_0^{-1}x^*h^*y^{**}\varepsilon_U$$
$$= h_0^{-1}x^*h^*y^{**}(h_0^{-1})^*h_0\eta = h_E(y, x)^\tau\eta.$$

Wir können $h_0(N) \subset N^*$ annehmen und ein $\delta_0 \neq 0$ in R finden mit $\delta_0 N^* \subset h_0(N)$.

LEMMA. *Ist h eine Form auf M mit $\delta M^* \subset h(M)$, so ist $\delta_0 h_E$ eine Form auf P mit $\delta\delta_0 P^* \subset \delta_0 h_E(P)$. Ist ferner h' eine Form auf M und sind $\delta_0 h_E$, $\delta_0 h'_E$ auf P isometrisch, so sind h und h' auf M isometrisch.*

Beweis. Im Fall $h(M) \subset M^*$ gilt offensichtlich $\delta_0 h_E(x, y) \in \mathrm{End}\,(N)$ für $x, y \in P$, also auch $\delta_0 h_E(x, y) = (\delta_0 h_E(y, x))^\tau \eta \in Z$. Bezeichne H den Funktor $\mathrm{Hom}\,(U, .)$. Dann gilt $h_E = pH(h)$ mit $p: H(V^*) \to H(V)^* = X^*$, $f \mapsto H(h_0^{-1}f^*\varepsilon_V)$.

Sei $\delta M^* \subset h(M)$. Es folgt $\delta\,\mathrm{Hom}\,(N, M^*) \subset \mathrm{Hom}\,(N, h(M)) = H(h)(P)$, also $\delta p(\mathrm{Hom}\,(N, M^*)) \subset h_E(P)$. Da der Funktor $\mathrm{Hom}\,(N, .)$ auf direkten Summanden von $N \oplus \cdots \oplus N$ voll ist, gibt es zu $d \in P^*$ ein $b: V \to U$ mit $b(M) \subset N$ und $d = H(b)$, also $d = p(b^*h_0\eta)$. Also gilt $P^* \subset p(\mathrm{Hom}\,(N, M^*))$ und somit $\delta\delta_0 P^* \subset \delta_0 h_E(P)$.

Sind $\delta_0 h_E$, $\delta_0 h'_E$ isometrisch auf P, so haben wir aus dem gleichen Grund wie oben $h'_E = H(g)^* h_E H(g)$ mit $g(M) = M$, und die letzte Behauptung folgt.

2.4. Wir müssen also nun den Endlichkeitssatz für das Z-Gitter P beweisen. Sei J das Jacobson-Radikal von E und $\bar{E} = E/J$, $\bar{Z} = Z/Z \cap J$. Dann ist $\bar{Z}$ eine R-Ordnung in der halbeinfachen K-Algebra $\bar{E}$, und τ induziert einen Antiautomorphismus $\bar{\tau}$ auf $\bar{E}$ mit $\bar{Z} = \bar{Z}^{\bar{\tau}}$.

Eine η-hermitesche Form h auf P induziert eine $\bar{\eta}$-hermitesche Form $\bar{h}$ auf dem $\bar{Z}$-Gitter $\bar{P} = $ Bild von P in $\bar{X} = X/J$. Hierbei gehen natürlich Klassen auf Klassen. Über E ist eine Klasse bekanntlich schon durch ihre Reduktion modulo J bestimmt. Dieses "Hensel-Lemma" läßt sich für unsere Zwecke folgendermaßen modifizieren:

LEMMA. *Zu $\delta \neq 0$ in R gibt es Elemente $\beta, \gamma \neq 0$ in R mit der folgenden Eigenschaft: Sind h, h' η-hermitesche Formen auf P mit $\delta P^* \subset h(P) \cap h'(P)$ und $\bar{h}, \bar{h}'$ isometrisch auf $\bar{P}$, so gibt es ein $f \in Aut(X)$ mit $\beta P \subset f(P) \subset \gamma^{-1}P$ und $h' = f^*hf$.*

Beweis. Da P nach Konstruktion über $\mathrm{End}\,(N)$ projektiv ist, können wir Automorphismen von $\bar{P}$ liften. Sind $\bar{h}$ und $\bar{h}'$ isometrisch, so gibt es also ein

$f_1 \in \mathrm{Aut}(X)$ mit $f_1(P) = P$ und

$$h' \equiv f_1^* h f_1 \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Hom}(X, X^*)J).$$

Angenommen, wir haben für ein $k \geq 1$ Elemente β_k, $\gamma_k \neq 0$ in R, die nur von δ abhängen, und ein $f_k \in \mathrm{Aut}(X)$ mit folgenden Eigenschaften gefunden:

$(1)_k$ $\quad h' \equiv f_k^* h f_k \ (mod\ Hom\ (X, X^*)J^k)$,

$(2)_k$ $\quad \beta_k P \subset f_k(P) \subset \gamma_k^{-1} P$.

Wir schreiben h_k für $f_k^* h f_k$ und setzen

$$n_k = \tfrac{1}{2} h_k^{-1}(h' - h_k), \qquad f_{k+1} = f_k(1 + n_k).$$

Dann gilt: $n_k \in \mathrm{End}(X)J^k$, $f_{k+1} \in \mathrm{Aut}(X)$,

$$\begin{aligned} f_{k+1}^* h f_{k+1} &= (1 + n_k)^* h_k (1 + n_k) \\ &= h_k + \tfrac{1}{2}(h' - h_k)^* \eta_X + \tfrac{1}{2}(h' - h_k) + n_k^* h_k n_k, \end{aligned}$$

also

$(1)_{k+1}$ $\quad h' \equiv f_{k+1}^* h f_{k+1} (\mathrm{mod}\ \mathrm{Hom}(X, X^*)J^{k+1})$.

Aus $(2)_k$ folgt leicht

$$\beta_k P^* \subset f_k^*(P^*) \subset \gamma_k^{-1} P^*$$

und damit

$$\beta_k^2 \delta P^* \subset h_k(P) \subset \gamma_k^{-2} P^*.$$

Es folgt

$$\alpha_k n_k(P) \subset P \quad \text{für} \quad \alpha_k = 2\beta_k^2 \gamma_k^2 \delta.$$

Da E eine endlich-dimensionale K-Algebra ist, gibt es eine natürliche Zahl m mit $J^m = 0$. Dann gilt jedenfalls $n_k^m = 0$, also

$$(1 + n_k)(1 - n_k + \cdots + (-n_k)^{m-1}) = 1$$

und somit

$$(2)_{k+1} \quad \alpha_k^{m-1}\beta_k P \subset f_{k+1}(P) \subset (\alpha_k\gamma_k)^{-1}P.$$

Mit $\beta = \beta_m$, $\gamma = \gamma_m$ und $f = f_m$ ist alles bewiesen.

2.5. Es genügt nach diesem Lemma zu wissen, ob der Endlichkeitssatz für das $\bar{Z}$-Gitter $\bar{P}$ gilt. Denn nur jeweils endlich viele Klassen von η-hermiteschen Formen h auf P mit $\delta P^* \subset h(P)$ können modulo J zusammenfallen: Dies folgt aus der Endlichkeit von $\gamma^{-1}P/\beta P$ mit dem schon im Beweis von 2.1 benutzten Argument.

Mit ähnlichen Schlüssen wie in 2.1 kann ferner $\bar{Z}$ durch eine andere Ordnung ersetzt werden:

LEMMA. *Gilt der Endlichkeitssatz für Gitter über wenigstens einer R-Ordnung T in $\bar{E}$ mit $\eta \in T = T^{\bar{\tau}}$, so gilt er für Gitter über jeder solchen Ordnung.*

2.6. Nun können wir den Beweis unseres Satzes beenden. Sei $E' = \mathrm{End}(V')$, $E'' = \mathrm{End}(V'')$. Dann gilt

$$\bar{E} = \overline{E'} \oplus \overline{E''} \oplus D_1 \oplus \cdots \oplus D_r.$$

Nach Konstruktion der Form h_0 vertauscht $\bar{\tau}$ die Summanden $\overline{E'}$, $\overline{E''}$ und ist auf D_i gleich τ_i. Sei T' eine R-Ordnung in $\overline{E'}$, $T'' = T'^{\bar{\tau}}$ und

$$T = T' \oplus T'' \oplus T_1 \oplus \cdots \oplus T_r.$$

Wir brauchen nach dem letzten Lemma den Endlichkeitssatz nur noch für T-Gitter zu haben. Ein solches Gitter hat die Gestalt

$$Q = Q' \oplus Q'' \oplus Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_r,$$

und eine $\bar{\eta}$-hermitesche Form auf Q ist die orthogonale Summe einer hermiteschen Form auf $Q' \oplus Q''$ und ε_i-hermitescher Formen auf Q_i. Der erste Summand hat die Gestalt $\begin{pmatrix} 0 & h' \\ h'' & 0 \end{pmatrix}$, und seine Klasse ist durch das T''-Gitter $h'(Q'') \subset Q'^*$ bestimmt, für das es unter der Bedingung $\delta Q^* \subset h(Q)$ nur endlich viele Möglichkeiten gibt. Für die anderen Summanden haben wir den Endlichkeitssatz vorausgesetzt.

LITERATUR

[1] BAYER, E. et MICHEL, F. *Finitude du nombre des classes d'isomorphisme des structures isometriques entieres*, Comment. Math. Helv. *54*, 378–396 (1979).
[2] BOURBAKI, N. Algèbre, Chap. VIII. Paris: Hermann.
[3] O'MEARA, O. T. *Introduction to quadratic forms.* Berlin–New York: Springer 1963.
[4] QUEBBEMANN, H.-G., SCHARLAU, W., and SCHULTE, M. *Quadratic and hermitian forms in additive and abelian categories.* Erscheint in J. Algebra.
[5] SHIMURA, G., *Arithmetic of alternating forms and quaternion hermitian forms*, J. Math. Soc. Japan *15*, 33–65 (1963).
[6] WALL, G. E., *On the conjugacy classes in the unitary, symplectic and orthogonal groups*, J. Australian Math. Soc. *3*, 1–62 (1963).

Mathematisches Institut der Universität
Roxelerstrasse 64
D-4400 *Münster, Deutschland*

Eingegangen den 11. September 1979