

# Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Flächen.

Autor(en): **Buser, Peter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **54 (1979)**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41591>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Flächen

PETER BUSER

## 1. Einleitung

Es sei  $\lambda_1$  der kleinste positive Eigenwert des Laplace-Beltramioperators  $\Delta = -\operatorname{div} \operatorname{grad}$  auf einer kompakten Fläche  $M$ . Dabei verstehen wir unter einer *Fläche* eine zweidimensionale unberandete Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Problemstellung der Riemannschen Geometrie im Grossen ist die Frage, welchen Einfluss geometrische Invarianten auf  $\lambda_1$  ausüben. Man versucht deshalb  $\lambda_1$  mit diesen Invarianten zu vergleichen. Abschätzungen nach unten sind schwieriger. Ein allgemeingültiges Prinzip in dieser Richtung ist die *Ungleichung von Cheeger* [6]

$$\lambda_1 \geq \frac{h^2(M)}{4}, \tag{A}$$

wo  $h = h(M)$  eine isoperimetrische Konstante bedeutet, die folgendermassen definiert ist:

$$h(M) = \inf_{\mathcal{C}} J(\mathcal{C}), \quad J(\mathcal{C}) = \frac{l(\mathcal{C})}{\min \{\operatorname{vol}(M_1), \operatorname{vol}(M_2)\}}.$$

Dabei durchläuft  $\mathcal{C}$  die Menge  $\Sigma(M)$  aller Wegzyklen der Form  $\mathcal{C} = \gamma_1 + \dots + \gamma_m$  mit  $\gamma_j : S^1 \rightarrow M$  differenzierbar, welche  $M$  in zwei offene disjunkte Gebiete  $M_1$  und  $M_2$  mit dem gemeinsamen Rand  $\mathcal{C} = \partial M_1 = \partial M_2$  zerlegen, [2] p. 196, [3] p. 11, [12] p. 489. Hier bedeuten  $l(\mathcal{C}) = l(\gamma_1) + \dots + l(\gamma_m)$  die *Länge* von  $\mathcal{C}$  und  $\operatorname{vol}(\cdot)$  das *zweidimensionale Lebesguemass* bezüglich der Riemannschen Metrik von  $M$ .

Die Konstante  $h$  lässt sich auch für höhere Dimension definieren, und (A) bleibt richtig. Während aber dort  $h$  schwer in den Griff zu bekommen ist, lässt sich diese Grösse für Flächen direkt auf geometrischem Wege angehen. Als erstes werden wir mit Hilfe von (A) zeigen, dass es für Flächen eine untere Schranke für

$\lambda_1$  gibt, die nur den Durchmesser  $d = \sup \{\text{dist}(p, q) \mid p, q \in M\}$  und die untere Schranke  $-\kappa^2$  für die Gaussche Krümmung  $K$  explizit enthält:

$$\sqrt{\lambda_1} \geq \frac{\kappa}{4\pi \sinh \frac{\kappa d}{2}}. \quad (\text{B})$$

Dabei ist  $\kappa$  entweder reell mit  $\kappa \geq 0$ , oder  $\kappa$  ist rein imaginär mit  $\kappa\sqrt{-1} < 0$ . Dazu gilt die *Konvention*, dass  $\kappa^{-1} \sinh \kappa x = x$  zu lesen ist, wenn  $\kappa = 0$ , und  $\kappa^{-1} \sinh \kappa x = |\kappa|^{-1} \sin |\kappa|x$ , wenn  $\kappa\sqrt{-1} < 0$ . Für andere Resultate dieser Art vergleiche man hierzu u.a. die Arbeiten von Aubin [1] Buser [5], Huber [8] und Yau [12].

Der Beweis von (B) ist wesentlich zweidimensional und benutzt, dass man den Inhalt der  $r$ -Hülle

$$\gamma^r := \{p \in M \mid \text{dist}(p, \gamma) \leq r\}$$

eines Weges  $\gamma : S^1 \rightarrow M$  mit Hilfe der Weglänge in vielen Fällen (siehe (2.8)) nach oben abschätzen kann durch

$$\text{vol}(\gamma^r) \leq 2\pi l(\gamma) \frac{\sinh \kappa r}{\kappa}. \quad (\text{C})$$

Diese Ungleichung liefert etwas überraschend auch eine Abschätzung von  $\lambda_1$  mit Hilfe der Konstanten  $h$  nach oben:

$$\sqrt{\lambda_1} \leq \frac{\kappa}{\text{arsinh} \frac{\kappa}{4\pi h}}, \quad (\text{D})$$

die sich für kleine Werte von  $h$  noch verschärfen lässt (siehe (3.4)). Dabei gilt in (D) ähnlich wie in (B) die *Konvention*, dass  $\kappa^{-1} \text{arsinh} \kappa x = x$  zu lesen ist, wenn  $\kappa = 0$ , und  $\kappa^{-1} \text{arsinh} \kappa x = |\kappa|^{-1} \arcsin |\kappa|x$ , wenn  $\kappa$  imaginär. Im Hinblick auf (A) taucht natürlich die Frage auf, ob man die Ungleichung (D) nicht unabhängig von  $\kappa$  machen kann. Dazu gibt es aber einfache Gegenbeispiele. Wir werden in Abschnitt 4 anhand des Torus eine Schar von Flächen herstellen mit

$$\text{vol}(M) = 1, \quad \lambda_1 \rightarrow 4\pi^2 \quad \text{und} \quad h(M) \rightarrow 0. \quad (\text{E})$$

Die untere Schranke für  $\lambda_1$  in (B) ist für grosse  $d$  von der Ordnung  $\exp(-d)$ , wenn man als Krümmungsnormierung  $\kappa = 1$ , dh.  $K \geq -1$  annimmt. Vergleicht

man diesen Wert etwa mit  $\lambda_1$  auf einem flachen Torus, so scheint es, dass die Schranke weit von der Realität entfernt liegt. Wir werden aber zum Schluss am Beispiel einer geeigneten Riemannschen Fläche vom Geschlecht zwei (mit konstanter Krümmung  $K = -1$ ) zeigen, dass eine untere Schranke für  $\lambda_1$  unter den genannten Bedingungen sogar im Falle konstanter Krümmung bestenfalls von der Größenordnung  $\exp(-d/2)$  sein kann, (Vergleiche hierzu die Bemerkung in Aubin [1] p. 368).

Die vorliegende Arbeit ist ein Teil meiner Dissertation, für deren Zustandekommen ich Herrn Professor H. Huber meinen herzlichen Dank aussprechen möchte.

## 2. Beweis von (B)

In der ganzen Arbeit machen wir von folgenden Bezeichnungen Gebrauch:  $(M, g)$  bedeutet eine Mannigfaltigkeit  $M$ , versehen mit einem Riemannschen Masstensor  $g$ . Statt  $(M, g)$  schreiben wir meist nur  $M$ . Vermöge  $g$  ist auf  $M$  eine *Lebesgue-Integration*

$$f \mapsto \int_M f dM$$

erklärt,  $dM$  ist das *Volumenelement*. Den Tangentialraum von  $M$  im Punkt  $p$  bezeichnen wir mit  $M_p$ . Für einen Tangentialvektor  $A \in M_p$  ist durch  $\|A\| = \sqrt{g(A, A)}$  eine Norm definiert; dadurch wird  $M_p$  zu einem euklidischen Raum. Für eine differenzierbare Funktion  $f$  auf  $M$  ist  $\text{grad } f$  das Gradientenvektorfeld. Genügt  $f$  lediglich einer Lipschitzbedingung, so ist  $\text{grad } f$  immer noch fast überall (dh. bis auf eine Ausnahmемenge vom Mass null) definiert, und  $\|\text{grad } f\|$  ist eine quadratisch integrierbare Funktion.

Es sei nun  $M$  eine kompakte Fläche mit Krümmung  $K \geq -\kappa^2$  und  $\mathcal{C} = \gamma_1 + \dots + \gamma_m \in \Sigma(M)$ . Durch  $\mathcal{C}$  wird  $M$  in die beiden Gebiete  $M_1$  und  $M_2$  aufgeteilt. Wir *definieren*

$$r_{\mathcal{C}} = \min_{i=1,2} \max_{p \in M_i} \text{dist}(p, \mathcal{C}). \quad (2.1)$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\text{vol}(\mathcal{C}^r) \leq 2\pi l(\mathcal{C}) \frac{\sinh \kappa r}{\kappa} \quad \forall r \in (0, r_{\mathcal{C}}]. \quad (2.2)$$

Dabei ist  $\mathcal{C}^r = \{p \in M \mid \text{dist}(p, \mathcal{C}) \leq r\}$ . Den Beweis von (2.2) führen wir in drei Schritten:

Zuerst sei  $\gamma: [0, l] \rightarrow M$  mit  $\|\dot{\gamma}\| = 1$  ein beliebiger differenzierbarer, nach der Bogenlänge parametrisierter Weg der Länge  $l$  auf  $M$ , und es sei bloss vorausgesetzt, dass die Fläche  $M$  vollständig ist. Weiter sei  $r > 0$  vorgegeben mit der Einschränkung, dass

$$|\kappa|r < \pi/2, \quad \text{falls } \kappa \text{ imaginär.}$$

Weiter braucht die Ungleichung  $K \geq -\kappa^2$  nur auf  $\gamma^{r+\varepsilon}$  zu gelten für ein  $\varepsilon > 0$ . Wir zeigen, dass unter diesen Umständen die folgende Ungleichung besteht:

$$\text{vol}(\gamma^r) \leq 2\pi l(\gamma) \frac{\sinh \kappa r}{\kappa} + 2\pi \int_0^r \frac{\sinh \kappa \rho}{\kappa} d\rho. \quad (2.3)$$

Um dies einzusehen, wählen wir eine natürliche Zahl  $n$  so, dass  $l/n < \varepsilon/2$  und so, dass  $|\kappa|(r + 2l/n) < \pi/2$ , falls  $\kappa$  imaginär. Wir betrachten die Punkte

$$p_i = \gamma(il/n), \quad i = 0, \dots, n$$

mit den Kreisbereichen

$$B_i = \{q \in M \mid \text{dist}(p_i, q) \leq r + l/n\}.$$

Wegen  $K \geq -\kappa^2$  liefert der Vergleichssatz von Rauch

$$\text{vol}(B_0) \leq 2\pi \int_0^{r+l/n} \frac{\sinh \kappa \rho}{\kappa} d\rho. \quad (2.4)$$

Weiter ist wegen  $\text{dist}(p_i, p_{i+1}) \leq l/n$

$$\gamma^r \subseteq B_0 \cup \dots \cup B_{n-1}. \quad (2.5)$$

Nun sei  $G_i$  die sternförmige Umgebung des Nullpunktes im Tangentialraum  $M_{p_i}$ , welche durch die Exponentialabbildung  $\exp$  (eingeschränkt auf  $M_{p_i}$ ) diffeomorph auf das Innere  $\exp(G_i)$  des Schnittortes  $C(p_i)$  abgebildet wird. Es gibt einen Massentensor  $g_i$  auf  $G_i$ , für den die Abbildung  $\exp|_{G_i}$  zu einer Isometrie wird. Wir

definieren für  $i = 0, \dots, n - 1$

$$V_i = \{A \in M_{p_i} \mid r + l/n \leq \|A\| \leq r + 2l/n\} \cap G_i$$

und

$$K_i = C(p_i) \cup \exp(V_i).$$

Mit dem Vergleichssatz von Rauch erhalten wir, da der Schnittort  $C(p_i) = M - \exp(G_i)$  eine Nullmenge ist,

$$\text{vol}(K_i) = \text{vol}(V_i) \leq 2\pi \int_{r+l/n}^{r+2l/n} \frac{\sinh \kappa \rho}{\kappa} d\rho < 2\pi \frac{l}{n} \frac{\sinh \kappa \left(r + \frac{2l}{n}\right)}{\kappa}. \tag{2.6}$$

Dabei bezieht sich  $\text{vol}(V_i)$  auf die Metrik  $g_i$ . Wenn  $q \in B_{i+1} - (B_i \cup C(p_i))$ , so ist  $q = \exp(A)$  mit  $A \in G_i$  und  $r + l/n \leq \text{dist}(p_i, q) = \|A\| \leq r + 2l/n$ , also ist  $q \in \exp(V_i)$ . Das heisst, es gilt

$$B_{i+1} \subseteq B_i \cup K_i. \tag{2.7}$$

Aus (2.7) und (2.5) folgt

$$\gamma^r \subseteq B_0 \cup K_0 \cup \dots \cup K_{n-1}.$$

Mit  $n \rightarrow \infty$  folgt jetzt die Ungleichung (2.3) aus (2.4) und (2.6).

In einem zweiten Schritt zeigen wir, dass man in vielen Fällen den zweiten Summanden in (2.3) weglassen kann: Es sei jetzt  $M$  eine kompakte Fläche mit negativer Charakteristik  $\chi$ . Darauf sei  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  mit  $\|\dot{\gamma}\| = 1$  und  $\gamma(0) = \gamma(l)$  ein nicht nullhomotoper geschlossener Weg der Länge  $l$ . Die Ungleichung  $K \geq -\kappa^2$  soll erfüllt sein auf  $\gamma^{r+\varepsilon}$  für ein  $\varepsilon > 0$ , und wie oben soll  $|\kappa|r < \pi/2$  gelten, falls  $\kappa$  imaginär ist. In diesem Falle gilt

$$\text{vol}(\gamma^r) \leq 2\pi l \frac{\sinh \kappa r}{\kappa}. \tag{2.8}$$

*Beweis.* Es genügt, die Behauptung für orientierbare Flächen zu beweisen: Wenn  $M$  nicht orientierbar ist, so betrachte man die zweiblättrige Orientierungsüberlagerung  $M^*$  von  $M$  mit längentreuer Ueberlagerungsabbildung  $\varphi$ . Wenn  $\gamma$

ein zweiufiger Weg ist, so gibt es in  $M^*$  einen geschlossenen Ueberlagerungsweg  $\gamma^*$  der Länge  $l$  mit der Eigenschaft, dass  $\varphi \circ \gamma^* = \gamma$ . Der Ueberlagerungsweg  $\gamma^*$  erfüllt auf  $M^*$  die Voraussetzungen für (2.8), und man erhält die Behauptung für  $\gamma$  aus derjenigen für  $\gamma^*$  wegen  $\gamma' \subseteq \varphi(\gamma^{*r})$ . Wenn  $\gamma$  einufig ist, so gibt es einen Ueberlagerungsweg  $\gamma^*$  der Länge  $2l$  und eine Deckisometrie  $T$  mit  $T(\gamma^*(t)) = \gamma^*(t+l)$ . Für diese gilt  $T(\gamma^{*r}) = \gamma^{*r}$ , also ist  $\text{vol}(\gamma^{*r}) = 2 \text{vol}(\gamma^r)$ , und wieder lässt sich die Behauptung von  $\gamma^*$  auf  $\gamma$  übertragen. Wir können jetzt voraussetzen, dass  $M$  orientierbar ist. Das heisst,  $M$  ist eine kompakte Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$ .

Es gibt nun eine differenzierbare Abbildung  $\Pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow M$  und einen differenzierbaren Weg  $c : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^2$  mit den folgenden vier Eigenschaften:

$\Pi$  ist Ueberlagerungsabbildung. (2.9)

Die Abbildung  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  mit  $T(x, y) = (x+1, y)$  ist eine Decktransformation bezüglich  $\Pi$ . (2.10)

$c$  ist ein Ueberlagerungsweg von  $\gamma : \Pi \circ c = \gamma$  auf dem Intervall  $[0, 1]$ . (2.11)

Es gilt  $T(c(t)) = c(t+1)$  für alle  $t \in (-\infty, +\infty)$ . (2.12)

Dies kann man folgendermassen einsehen: Wie man von der Theorie der Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$  her weiss, ist  $M$  konform äquivalent zu einer Fläche der konstanten Krümmung  $-1$ , dh. wenn  $g$  der Masstensor von  $M$  ist: Es gibt eine auf  $M$  differenzierbare Funktion  $f$ , sodass der abgeänderte Masstensor  $g' := fg$  die konstante Krümmung  $-1$  besitzt. Bezüglich  $g'$  existiert nach Preissmann [11] p. 181 genau eine zu  $\gamma$  frei homotope geschlossene Geodätische  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ . Ist  $\Psi : H \rightarrow M$  bezüglich  $g'$  längentreue Ueberlagerungsabbildung der hyperbolischen Ebene  $H$  auf  $M$ , so gibt es eine (orientierungserhaltende) Decktransformation  $T' : H \rightarrow H$  bezüglich  $\Psi$  und eine gegenüber  $T'$  invariante Geodätische  $\tilde{\sigma}$  in  $H$  mit  $\Psi \circ \tilde{\sigma} = \sigma$  und  $T'(\tilde{\sigma}(t)) = \tilde{\sigma}(t+1)$ . Indem wir nötigenfalls die Metrik  $g'$  mit einem geeigneten konstanten Faktor multiplizieren, erreichen wir, dass  $\|\dot{\tilde{\sigma}}\| = 1$ . Die Homotopie  $\gamma \sim \sigma$  lässt sich zu einer mit  $T'$  vertauschbaren Homotopie  $\tilde{\gamma} \sim \tilde{\sigma}$  auf  $H$  heben mit einem geeigneten Ueberlagerungsweg  $\tilde{\gamma}$  von  $\gamma$ . Aus  $T'(\tilde{\sigma}(t)) = \tilde{\sigma}(t+1)$  folgt

$$T'(\tilde{\gamma}(t)) = \tilde{\gamma}(t+1).$$

Führt man auf  $H$  Fermikoordinaten

$$p \mapsto \Phi(p) = (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

mit  $\tilde{\sigma}$  als  $x$ -Achse ein, so erfüllen

$$\Pi := \Psi \circ \Phi^{-1}, \quad c := \Phi \circ \tilde{\gamma} \quad \text{und} \quad T := \Phi \circ T' \circ \Phi^{-1}$$

die Bedingungen (2.9) bis (2.12). O.B.d.A. können wir noch

$$c(0) = (0, y)$$

annehmen.

Auf  $\mathbf{R}^2$  führen wir nun einen solchen Masstensor  $\tilde{g}$  ein, dass  $\Pi: (\mathbf{R}^2, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  längentreu wird. Die Menge

$$c' = \{p \in (\mathbf{R}^2, \tilde{g}) \mid \text{dist}(p, c([0, 1])) \leq r\}$$

ist kompakt, da  $(\mathbf{R}^2, \tilde{g})$  vollständig ist. Es gibt deshalb eine natürliche Zahl  $m$ , sodass für alle Punkte  $p = (x, y) \in c'$  gilt:  $-m < x < m$ . Wir setzen nun

$$c_n = c \mid [-m, m+n], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Dann gilt für die Streifen

$$S_k = \{(x, y) \mid k \leq x < k+1\}$$

wegen (2.10) und (2.12):

$$c' \cap S_k = c_n^r \cap S_k, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (2.13)$$

Wegen  $T(c') = c^r$  gibt es zu jedem Punkt  $p \in \gamma^r$  einen Punkt  $\tilde{p} \in c' \cap S_0$  mit  $\Pi(\tilde{p}) = p$ , also ist  $\gamma^r \subseteq \Pi(c' \cap S_k)$  für jedes  $k$ . Zusammen mit (2.13) erhalten wir  $\gamma^r \subseteq \Pi(c_n^r \cap S_k)$ , bzw.

$$\text{vol}(\gamma^r) \leq \text{vol}(c_n^r \cap S_k), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Wegen  $S_k \cap S_j = \emptyset$  für  $k \neq j$  erhalten wir nun mit (2.3)

$$\text{vol}(\gamma^r) \leq 2\pi l \frac{n+2m}{n} \frac{\sinh \kappa r}{\kappa} + \frac{2\pi}{n} \int_0^r \frac{\sinh \kappa \rho}{\kappa} d\rho$$



für alle  $n$ . Mit  $n \rightarrow \infty$  erhält man hieraus die Behauptung (2.8). Für den dritten und letzten Schritt benötigen wir noch einen Hilfssatz:

**LEMMA.** *Vorasssetzung:  $F \subseteq M$  eine abgeschlossene Teilmenge,  $\rho > 0$  und*

$$D = \{p \in M \mid \text{dist}(p, F) = \rho\}.$$

*Behauptung:  $\text{vol}(D) = 0$ .*

*Beweis.*  $D$  ist abgeschlossen, also messbar. Deshalb ist fast jeder Punkt von  $D$  ein sogenannter *Dichtepunkt*, dh. es gilt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(U_\delta(p) \cap D)}{\text{vol}(U_\delta(p))} = 1$$

für fast alle  $p \in D$  [9] p. 184, dabei ist

$$U_\delta(p) = \{q \in M \mid \text{dist}(p, q) < \delta\}.$$

Es genügt demnach zu zeigen, dass  $D$  keine Dichtepunkte besitzt: Zu  $p \in D$  existiert  $p' \in F$  mit  $\text{dist}(p, p') = \rho$ . Auf der kürzesten Geodätischen von  $p$  nach  $p'$  wählt man einen Punkt  $q$  so nahe bei  $p$ , dass sein Abstand  $r$  von  $p$  kleiner ist als der Injektivitätsradius von  $q$ . Jetzt gilt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(U_\delta(p) \cap U_r(q))}{\text{vol}(U_\delta(p))} = \frac{1}{2}.$$

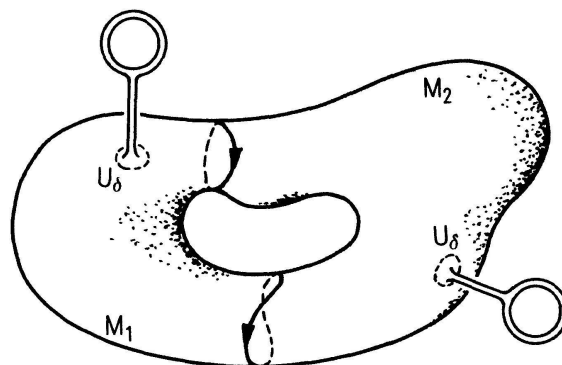
Aus  $U_r(q) \subseteq U_\rho(p')$  und aus  $U_\rho(p') \cap D = \emptyset$  folgt

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(U_\delta(p) \cap D)}{\text{vol}(U_\delta(p))} \leq \frac{1}{2},$$

also ist  $p$  kein Dichtepunkt, womit das Lemma bewiesen ist.

Der dritte Schritt im Beweis von (2.2) ist nun leicht: Ist die Charakteristik von  $M$  negativ und besteht der Schnittzyklus  $\mathcal{C} \in \Sigma(M)$  aus lauter nichtnullhomotopen Wegen, so ist die Behauptung wegen (2.8) bereits bewiesen, sogar für beliebiges  $r > 0$ , denn nach dem Satz von Gauss–Bonnet ist in diesem Fall  $\kappa > 0$ . Für den

allgemeinen Fall schliessen wir folgendermassen:



Figur 1

Wir wählen in jedem der Gebiete  $M_1, M_2$  je einen Punkt  $p_i, i = 1, 2$ , der von  $\mathcal{C} = \partial M_i$  maximalen Abstand besitzt. Es ist dann mit (2.1)

$$r_{\mathcal{C}} = \min \{ \text{dist}(p_1, \mathcal{C}), \text{dist}(p_2, \mathcal{C}) \}. \quad (2.14)$$

Ferner gilt

$$|\kappa| r_{\mathcal{C}} \leq \pi/2, \quad \text{wenn } \kappa \text{ imaginär}, \quad (2.15)$$

denn wenn die Schnittkrümmung  $K$  nach unten beschränkt ist durch  $|\kappa|^2 > 0$ , so ist nach dem Satz von Myers [7] p. 212

$$|\kappa| \text{dist}(p_1, p_2) \leq |\kappa| d \leq \pi. \quad (2.16)$$

Andererseits ist  $\text{dist}(p_1, \mathcal{C}) + \text{dist}(p_2, \mathcal{C}) \leq \text{dist}(p_1, p_2)$ , woraus (2.15) folgt.

Nun sei  $0 < \varepsilon < r_{\mathcal{C}}$ . Es gibt ein  $\delta \in (0, \varepsilon)$  mit der Eigenschaft, dass die Kreiseumgebungen  $U_{\delta}(p_i), i = 1, 2$ , einfachzusammenhängende Gebiete sind. Wir entfernen diese Umgebungen von  $M$  und fügen an deren Stelle mit den Methoden der Differentialtopologie je einen Torus an (siehe Figur 1).  $M$  geht dabei über in eine neue Fläche  $M'$  mit negativer Charakteristik.  $\mathcal{C}$  kann man als Zyklus in  $M'$  mit  $\mathcal{C} \in \Sigma(M')$  ansehen, und man sieht sofort, dass in  $M'$  keine der Wegkomponenten  $\gamma_i$  von  $\mathcal{C}$  nullhomotop sein kann. Auf  $M'$  gibt es einen Riemannschen Masstensor  $g'$ , der auf dem Teilbereich  $M - (U_{\delta}(p_1) \cup U_{\delta}(p_2)) \subset M'$  mit  $g$  übereinstimmt. Speziell ist

$$g = g' \quad \text{auf } \mathcal{C}_{\mathcal{C}}^{(r-\varepsilon)}. \quad (2.17)$$

Ist nun  $r \in (0, r_{\mathcal{C}} - \varepsilon)$  beliebig vorgegeben, so sind wegen (2.15) die Voraussetzungen für (2.8) für jede der Komponenten von  $\mathcal{C}$  erfüllt, also folgt

$$\text{vol}(\mathcal{C}^r) \leq 2\pi l(\mathcal{C}) \frac{\sinh \kappa r}{\kappa}, \quad 0 < r < r_{\mathcal{C}} - \varepsilon,$$

zunächst auf  $M'$ , dann aber ebenso auf  $M$  selber wegen (2.17). Jetzt kann man  $\varepsilon$  gegen Null gehen lassen und gewinnt damit (2.2) für alle  $r < r_{\mathcal{C}}$ . Schliesslich ist (2.2) auch noch für  $r = r_{\mathcal{C}}$  richtig auf Grund des oben bewiesenen Lemmas, da wegen der Totaladditivität des Lebesguemasses auf  $M$

$$\text{vol}(\mathcal{C}^{r_{\mathcal{C}}}) = \text{vol}(\{p \in M \mid \text{dist}(p, \mathcal{C}) = r_{\mathcal{C}}\}) + \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vol}(\mathcal{C}^{(r_{\mathcal{C}} - 1/m)}).$$

Damit ist (2.2) vollständig bewiesen. Die Ungleichung (2.2) liefert nun sofort einen *Beweis von (B)*:

Ist nämlich  $\mathcal{C} \in \Sigma(M)$  mit  $M - \mathcal{C} = M_1 \cup M_2$ ,  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ , so ist  $\min\{\text{vol}(M_1), \text{vol}(M_2)\} \leq \text{vol}(\mathcal{C}^{r_{\mathcal{C}}})$ , da  $\mathcal{C}^{r_{\mathcal{C}}}$  mindestens eines der beiden Gebiete  $M_1, M_2$  zudeckt. Wegen  $r_{\mathcal{C}} \leq d/2$  folgt jetzt aus (2.2)

$$J(\mathcal{C}) \geq \frac{l(\mathcal{C})}{\text{vol}(\mathcal{C}^{r_{\mathcal{C}}})} \geq \frac{\kappa}{2\pi \sinh \kappa r_{\mathcal{C}}} \geq \frac{\kappa}{2\pi \sinh \frac{\kappa d}{2}}. \quad (2.18)$$

Mit (2.18) und mit (A) ist (B) bewiesen, q.e.d.

Wir bemerken noch, dass man im Falle, wo  $M$  nichtpositive Krümmung besitzt, den Faktor  $\pi$  in (2.8) und a fortiori ebenso im Nenner von (B) weglassen kann (siehe [3] pp. 27, 28). Es ist anzunehmen, dass dies sogar allgemein gilt, doch liess sich bis jetzt kein Beweis dafür finden.

### 3. Abschätzung von $\lambda_1$ durch $h$ nach oben

Wir wählen  $\mathcal{C} \in \Sigma(M)$  und eine Zahl  $\tau \in (0, 1)$  fest aus und definieren

$$r = \frac{1}{\kappa} \text{arsinh} \frac{\kappa \tau}{2\pi J(\mathcal{C})},$$

wobei für  $\kappa = 0$  und für  $\kappa = \sqrt{-1} \cdot |\kappa|$  wieder die unter (D) getroffene Konvention gilt. Für den Fall, dass  $\kappa = \sqrt{-1} \cdot |\kappa|$ , beachte man, dass nach (2.16) und (2.18)

$J(\mathcal{C})$  nicht kleiner als  $|\kappa|/2\pi$  sein kann, sodass auch in diesem Fall  $r$  wohldefiniert ist.

Für die beiden Gebiete  $M_i$ , in die  $M - \mathcal{C}$  zerfällt, setzen wir  $r_i = \max \{ \text{dist}(p, \mathcal{C}) \mid p \in M_i \}$  und betrachten wie in (2.1) den kleineren der beiden Abstände:  $r_{\mathcal{C}} = \min \{ r_1, r_2 \}$ . Nach (2.2) ist, wenn wir  $\text{vol}(M_1) \leq \text{vol}(M_2)$  annehmen,

$$\text{vol}(M_1) \leq \text{vol}(\mathcal{C}^{r_{\mathcal{C}}}) \leq 2\pi l(\mathcal{C}) \frac{\sinh \kappa r_{\mathcal{C}}}{\kappa},$$

also gilt

$$r < r_{\mathcal{C}}.$$

Daraus folgt wieder mit (2.2) wegen  $\tau < 1$

$$\text{vol}(\mathcal{C}^r) \leq 2\pi l(\mathcal{C}) \frac{\sinh \kappa r}{\kappa} = \frac{\tau l(\mathcal{C})}{J(\mathcal{C})} < \text{vol}(M_1). \tag{3.1}$$

Wir definieren für  $i = 1, 2$ :

$$f_i(q) = \begin{cases} 0 & \text{für } q \notin M_i, \\ \text{dist}(q, \mathcal{C}) & \text{für } q \in M_i \text{ und } \text{dist}(q, \mathcal{C}) \leq r, \\ r & \text{für } q \in M_i \text{ und } \text{dist}(q, \mathcal{C}) \geq r. \end{cases}$$

Da die Funktionen  $f_i$  einer Lipschitzbedingung genügen, ist die Funktion  $\|\text{grad } f_i\|$  fast überall definiert und stellt eine auf  $M$  quadratisch integrierbare Funktion dar. Dabei ist  $\|\text{grad } f_i\| \leq 1$ , und auf  $M - \mathcal{C}^r$  gilt sogar  $\|\text{grad } f_i\| = 0$ . Deshalb ist (siehe (3.1))

$$\frac{\int_M \|\text{grad } f_i\|^2 dM}{\int_M f_i^2 dM} \leq \frac{\text{vol}(\mathcal{C}^r)}{r^2(\text{vol}(M_1) - \text{vol}(\mathcal{C}^r))} \leq \frac{\tau}{1 - \tau} \left( \frac{\kappa}{\text{arsinh} \frac{\kappa \tau}{2\pi J(\mathcal{C})}} \right)^2. \tag{3.2}$$

Es gibt eine Linearkombination  $F = f_1 + \alpha f_2$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ , mit  $\int_M F dM = 0$ . Wegen

$F^2 = f_1^2 + \alpha^2 f_2^2$  und wegen

$$\|\text{grad } F\|^2 = \|\text{grad } f_1\|^2 + \alpha^2 \|\text{grad } f_2\|^2$$

bleibt (3.2) richtig, wenn man dort  $f_i$  durch  $F$  ersetzt. Da  $F$  einer Lipschitzbedingung genügt, ist  $F$  für das Rayleighsche Extremalprinzip zugelassen [2] p. 186, also gilt

$$\lambda_1 \leq \frac{\tau}{1-\tau} \left( \frac{\kappa}{\text{arsinh} \frac{\kappa\tau}{2\pi J(\mathcal{C})}} \right)^2 \quad (3.3)$$

für jeden Schnittzyklus  $\mathcal{C} \in \Sigma(M)$  und für alle  $\tau \in (0, 1)$ . Geht man nun zu  $h = \inf_{\mathcal{C}} J(\mathcal{C})$  über und setzt speziell  $\tau = \frac{1}{2}$ , so erhält man daraus die Ungleichung (D).

Für den Fall, dass  $\kappa > 0$ , lässt sich (3.3) für kleine Werte von  $h$  besser auswerten. Dazu seien  $\mu$  und  $\beta$  definiert durch  $\mu \text{arsinh}^{-2} \mu = \min_{t>0} t \cdot \text{arsinh}^{-2} t = \beta$ . Die numerischen Werte sind

$$\mu = 3.3198 \dots, \quad \beta = 0.9052 \dots$$

Wir setzen  $\tau = \kappa^{-1} 2\pi\mu h$ , wobei wir uns auf den Fall  $h < \kappa/2\pi\mu$  einschränken. Aus (3.3) erhalten wir dann die folgende Abschätzung von  $\lambda_1$  nach oben: Für jede kompakte Fläche mit  $K \geq -\kappa^2$  ( $\kappa > 0$ ) und mit  $h < \kappa/2\pi\mu$  gilt

$$\lambda_1 \leq \kappa^2 \frac{2\pi\beta h}{\kappa - 2\pi\mu h} \quad (3.4)$$

#### 4. Ein Gegenbeispiel

In diesem Abschnitt konstruieren wir auf dem Torus eine Schar von Riemannschen Metriken, um zu zeigen, dass die isoperimetrische Konstante  $h$  beliebig nah bei Null sein kann, ohne dass dabei  $\lambda_1$  klein sein muss. Auf Grund von (D) muss dabei der Betrag der Krümmung grosse Werte annehmen. Die Metriken normieren wir so, dass der Inhalt der Flächen gleich eins wird. Den Torus stellen wir folgendermassen dar:

Es sei  $\Gamma : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  die Gruppe der Translationen  $(x, y) \rightarrow (x + m, y + n)$ ,  $m, n \in \mathbf{Z}$ , und  $T$  sei der Torus  $T = \mathbf{R}^2/\Gamma$ , versehen mit der Standardmetrik  $dx^2 + dy^2$ . In

natürlicher Weise identifizieren wir  $T$  mit dem Fundamentalbereich

$$\{p = (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 1\}.$$

Ist  $\chi$  eine positive periodische Funktion,  $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$  mit der Periode 1, so ist durch

$$ds^2 = \chi^2(x)[dx^2 + dy^2] \tag{4.1}$$

eine zusätzliche Riemannsche Metrik auf  $T$  definiert. Wir wählen  $\chi$  geeignet. Zu diesem Zwecke betrachten wir für jeden Parameterwert  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$  eine periodische Funktion  $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ , die auf den Intervallen  $[n/2 + \varepsilon, (n + 1)/2 - \varepsilon]$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , den konstanten Wert 1 annimmt, während  $\varphi$  auf den Intervallen  $[n/2 - \varepsilon, n/2 + \varepsilon]$  zuerst von 1 monoton auf  $\varphi(n/2) = \varepsilon$  absinken, und anschliessend wieder so zunehmen soll, dass  $\varphi(n/2 - x) = \varphi(n/2 + x)$  für alle  $x$ . Jetzt definieren wir

$$\chi(x) = \alpha\varphi(x) \quad \text{mit} \quad \alpha = \alpha(\varepsilon) = \left( \int_0^1 \varphi^2(x) dx \right)^{-1/2}. \tag{4.2}$$

Es ist

$$\int_0^1 \chi^2(x) dx = 1 \quad \text{und} \quad \chi(0) = \chi(\tfrac{1}{2}) = \alpha\varepsilon. \tag{4.3}$$

Vermöge (4.1) und (4.2) ist auf  $T$  eine von  $\varepsilon$  abhängige Riemannsche metrik definiert.  $T$  versehen mit dieser Metrik bezeichnen wir mit  $T_\varepsilon$ . Volumenelement und Norm des Gradienten lauten auf  $T_\varepsilon$ .

$$dT_\varepsilon = \chi^2 dT, \quad \|\text{grad}_\varepsilon f\|_\varepsilon^2 = \frac{1}{\chi^2} \|\text{grad} f\|^2, \tag{4.4}$$

wobei

$$dT = dx dy, \quad \|\text{grad} f\|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

die entsprechenden Grössen bezüglich der Standardmetrik auf  $T$  bezeichnen.

Es sei nun  $f$  mit  $\Delta_\varepsilon f = \lambda_{1,\varepsilon} f$  eine Eigenfunktion des Laplace-Operators  $\Delta_\varepsilon$  auf

$T_\varepsilon$  zum kleinsten positiven Eigenwert  $\lambda_{1,\varepsilon}$  und

$$T_1 = \{p \in T \mid f(p) > 0\}, \quad T_2 = \{p \in T \mid f(p) < 0\}.$$

Da die Funktion  $f$  auf beiden  $T_i$  eine Lösung des Randwertproblems  $\Delta_\varepsilon f = \lambda f$ ,  $f|_{\partial T_i} = 0$  ist, gilt zusammen mit (4.4)

$$\lambda_{1,\varepsilon} = \frac{\int_{T_i} \|\text{grad}_\varepsilon f\|_\varepsilon^2 dT_\varepsilon}{\int_{T_i} f^2 dT_\varepsilon} \geq \frac{\int_{T_i} \|\text{grad} f\|^2 dT}{\alpha^2 \int_{T_i} f^2 dT}, \quad i = 1, 2. \quad (4.5)$$

Definieren wir deshalb eine Funktion  $F$  durch

$$F(p) = \begin{cases} f(p) & \text{für } p \in T_1, \\ \beta f(p) & \text{für } p \in T_2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $\beta > 0$  so gewählt ist, dass  $\int_T F dT = 0$ , dann ist  $F$  für das Rayleighsche Extremalprinzip auf  $T$  zugelassen, und man erhält aus (4.5), wenn  $\lambda_1$  den ersten Eigenwert des Laplace-Operators bezüglich der Standardmetrik bezeichnet,

$$\lambda_{1,\varepsilon} \geq \alpha^{-2} \lambda_1 = 4\pi^2 \alpha^{-2}. \quad (4.6)$$

Andererseits liefert das Rayleighsche Extremalprinzip auf  $T_\varepsilon$ , angewendet auf die Funktion  $g(x, y) := \sin(2\pi x)$  die Ungleichung

$$\lambda_{1,\varepsilon} \leq \frac{4\pi^2}{1-4\varepsilon}. \quad (4.7)$$

Mit den beiden Wegen

$$t \rightarrow \gamma(t) = (0, t) \quad \text{und} \quad t \rightarrow \mu(t) = \left(\frac{1}{2}, t\right), \quad t \in [0, 1],$$

ist  $\mathcal{C} := \gamma + \mu \in \Sigma(T_\varepsilon)$  mit  $J(\mathcal{C}) = 4\alpha\varepsilon$ . Wegen  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) = 1$  gilt deshalb zusam-

men mit (4.3), (4.6) und (4.7), wenn  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\text{vol}(T_\varepsilon) = 1, \quad \lambda_{1,\varepsilon} \rightarrow 4\pi^2, \quad h(T_\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Das sind genau die in (E) gewünschten Eigenschaften.

## 5. Flächen mit kleinen Eigenwerten

Wir stellen in diesem Abschnitt eine Schar von Riemannschen Flächen her, deren Durchmesser  $d$  gegen Unendlich konvergiert, und deren Eigenwerte  $\lambda_1$  mit der Ordnung  $\exp(-d/2)$  klein werden. Dazu verwenden wir die in [4] beschriebene Methode der  $Y$ -Stücke.

Wir konstruieren zuerst in der hyperbolischen Ebene ein rechtwinkliges geodätisches Sechseck  $D$ , das aus sechs Spitzecken (das sind geodätische Vierecke mit drei rechten und einem spitzen Winkel) zusammengesetzt ist, wie in Figur 2 dargestellt. Die Bezeichnungen seien durch die Figur festgelegt. Dabei soll gelten:

$$\varphi = \pi/6, \quad s = s' \quad \text{und} \quad r = r'.$$

Nach den Formeln der hyperbolischen Trigonometrie (z.B. Perron [10] p. 76–79) ist

$$\cos \varphi = \sinh r' \cdot \sinh r, \quad \sinh s = \cosh s' \cdot \sinh r',$$

also

$$s = \text{artanh} \sqrt{\cos \frac{\pi}{6}} = 1,66 \dots, \quad r = \text{arsinh} \sqrt{\cos \frac{\pi}{6}} = 0,83 \dots \quad (5.1)$$

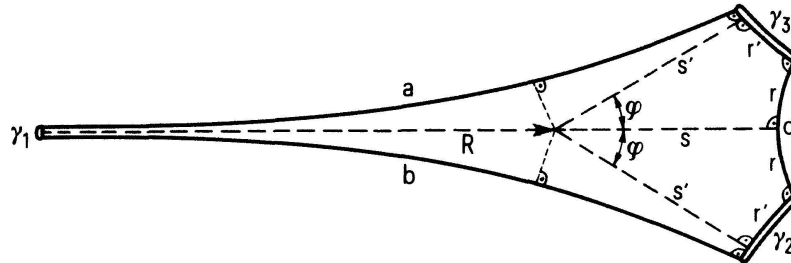
$R$  ist ein Parameter, den wir nachher nach Unendlich laufen lassen werden.

Es sei nun  $D'$  ein zu  $D$  kongruentes Sechseck mit den entsprechenden Seiten  $a', b', c'$  (siehe Figur 2). Indem wir uns  $D$  und  $D'$  übereinander liegend vorstellen und die so zur Deckung gebrachten Seiten  $a$  mit  $a'$ ,  $b$  mit  $b'$ ,  $c$  mit  $c'$  identifizieren, nicht aber die verbleibenden drei Seiten, erhalten wir eine berandete Fläche  $Y$  der Signatur  $(0, 3)$ . Die Fläche  $Y$  trägt in natürlicher Weise eine Metrik der konstanten Krümmung  $-1$ , und die drei Randkomponenten  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$



sind differenzierbar geschlossene Geodätische. Dabei gilt

$$l(\gamma_2) = l(\gamma_3) > 2r'; \quad l(\gamma_1) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$



Figur 2

Von  $Y$  stellen wir noch ein zweites Exemplar  $Y^*$  her mit den Randgeodätischen  $\gamma_1^*$ ,  $\gamma_2^*$ ,  $\gamma_3^*$  und verkleben  $\gamma_2$  mit  $\gamma_3$ ,  $\gamma_2^*$  mit  $\gamma_3^*$  und schliesslich  $\gamma_1$  mit  $\gamma_1^*$ . Auf diese Weise erhalten wir eine kompakte Fläche  $F$  vom Geschlecht zwei mit der konstanten Krümmung  $-1$ . Für den Durchmesser  $d$  von  $F$  berechnet man bei  $R \rightarrow \infty$  bis auf Glieder höherer Ordnung

$$d = 2(R + s + \log \cosh r) < 2R + 3,95.$$

Um  $\lambda_1$  auf  $F$  nach oben abzuschätzen, betrachten wir die Hilfsfunktion

$$\psi(p) = \begin{cases} \sin \left\{ \frac{\pi}{6} \text{dist}(p, \gamma_1) \right\}, & \text{wenn } \text{dist}(p, \gamma_1) \leq 3 \\ 1, & \text{wenn } \text{dist}(p, \gamma_1) \geq 3 \end{cases}$$

und setzen

$$f(p) = \begin{cases} \psi(p), & \text{wenn } p \in Y \\ -\psi(p), & \text{wenn } p \in Y^*, \end{cases}$$

dann erfüllt  $f$  die Voraussetzungen für das Rayleighsche Extremalprinzip, und man erhält durch elementare Integration zusammen mit (5.1):

$$\lambda_1(F) \leq 0,393e^{-d/2}. \quad (5.2)$$

Es wäre interessant zu wissen, ob man zumindest auf Riemannschen Flächen mit

anderen Methoden eine untere Schranke für  $\lambda_1$  finden kann, die von der Ordnung  $\exp(-d/2)$  ist.

Schliesslich wollen wir noch bemerken, dass aus  $d \rightarrow \infty$  für eine Schar von Riemannschen Flächen nicht immer  $\lambda_1 \rightarrow 0$  folgt. Verklebt man nämlich die Flächen  $Y$  und  $Y^*$  anders herum, indem man  $\lambda_1$  mit  $\lambda_1^*$  nun aber  $\lambda_2$  mit  $\lambda_2^*$  und  $\lambda_3$  mit  $\lambda_3^*$  identifiziert, so entsteht eine Fläche  $F'$  deren kürzester nullhomologer nicht trivialer Zyklus  $C$  aus geschlossenen Geodätischen gerade durch  $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$  gegeben ist, also die Länge  $l(C) > 4r$  besitzt. Daraus folgert man unschwer, dass  $h(F') > 2r/\pi > \frac{1}{2}$  (nach Gauss-Bonnet ist  $\text{vol } Y = 2\pi$ ). Für diese Flächen gilt nun ebenfalls  $d \rightarrow \infty$ , aber auf Grund der Ungleichung von Cheeger stets  $\lambda_1 > \frac{1}{16}$ .

#### LITERATUR

- [1] AUBIN, TH., *Fonction de Green et valeurs propres du laplacien*, J. Math. pures et appl. 53 (1974), 347–371.
- [2] BERGER, M., GAUDUCHON, P., und MAZET, E., *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lect. Notes Math. 194, Berlin, Heidelberg, New York 1971.
- [3] BUSER, P., *Untersuchungen über den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Flächen*, Dissertation, Basel 1976.
- [4] —, *Riemannsche Flächen mit Eigenwerten in  $(0, \frac{1}{4})$* , Comment. Math. Helv. 52 (1977), 25–34.
- [5] —, *Eine untere Schranke für  $\lambda_1$  auf Mannigfaltigkeiten mit fast negativer Krümmung*, Archiv Math. (Basel) 30 (1978), 528–531.
- [6] CHEEGER, J., *A lower bound for the smallest eigenvalue of the laplacian*, Problems in Analysis, Symposium in Honor of Bochner, Princeton University, 1969.
- [7] GROMOLL, D., KLINGENBERG, W., und MEYER, W., *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Lect. Notes Math. 55, Berlin, Heidelberg, New York 1968.
- [8] HUBER, H., *Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Mannigfaltigkeiten konstanter negativer Krümmung*, Arch. Math. (Basel) 26 (1975), 178–182.
- [9] MUNROE, M. E., *Measure and integration*, Reading Massachussets 1968.
- [10] PERRON, O., *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene*, Stuttgart 1962.
- [11] PREISSMANN, A., *Quelques propriétés globales des espaces de Riemann*, Comment. Math. Helv. 15 (1942), 175–216.
- [12] YAU, S. T., *Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold*, Annales Sc. École Nor. Sup. IV. sér. 8(1975), 487–507.

Sonderforschungsbereich 40 "Theoretische Mathematik" Mathematisches Institut der Universität, Be-ringstrasse 4, D-5300 Bonn 1.

Eingegangen den 10. August 1977