Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts.

Comment. Math. Helvetici 54 (1979) 224–239 Birkhäuser Verlag, Basel

Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts

HANSKLAUS RUMMLER

0. Introduction

Soit X une variété différentiable (de classe C^∞) orientée, feuilletée par des feuilles compactes orientées de manière différentiable et orientée. Dans la suite, nous parlerons simplement d'un *feuilletage compact* $\mathcal{F}$ de la variété X, et par le même symbole $\mathcal{F}$ nous dénotons le sous-fibré vectoriel du fibré tangent $\mathcal{T}X = (TX, \pi, X)$ dont les fibres sont les espaces tangents aux feuilles: $\mathcal{F} = (F, \pi, X)$ avec $F_x = T_xL_x$, où L_x est la feuille passant par $x \in X$.

Bien que l'on peut introduire la notion d'une fonction de volume pour les feuilles d'une façon très générale (cf. par exemple [2]), nous pensons toujours au volume induit par une métrique riemannienne sur X. Nous dirons que le feuilletage est *stable* si le volume des feuillés est localement borné. C'est équivalent à la finitude des groupes d'holonomie et encore à la propriété que chaque feuille a une base de voisinages saturés. De plus, on a une description très précise de la structure locale du feuilletage. (Cf. [2], théorème 4.3; nous y reviendrons dans le paragraphe 4).

Dans [1], E. Edwards, K. Millett et D. Sullivan démontrent le théorème suivant:

THÉORÈME (EMS). *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage compact orienté de la variété compacte X, et supposons qu'il existe sur X une forme différentielle ω de degré p (= dimension des feuilles) avec $d\omega = 0$ et $\int_L \omega > 0$ pour chaque feuille L. Alors, le feuilletage est stable.*

Un ingrédient essentiel de la preuve donnée dans [1] est la proposition suivante (appelée "moving leaf theorem" dans [1]):

PROPOSITION (EMS). *Si le volume des feuilles n'est pas borné, alors il existe une isotopie de feuilles $(L_t)_{t\in\mathbf{R}}$ telle que le volume des L_t n'est pas borné pour $t \to \infty$.*

Supporté par une bourse du Fonds National Suisse de la Recherche.

Cette proposition entre de la manière suivante dans la démonstration du théorème: On montre—sans utiliser la condition $d\omega = 0$!—que $\int_{L_t} \omega$ n'est pas bornée non plus pour $t \to \infty$. D'autre part on a $\int_{L_t} \omega = \text{const.}$ parceque les L_t sont homotopes et ω est fermée. Cette contradiction prouve que le volume des feuilles doit être borné.

Pour contrôler la stabilité d'un feuilletage de X à l'aide du théorème (EMS) il faut donc que $H^p(X; \mathbf{R}) \neq 0$ (p = dimension des feuilles). Cette condition exclut bien des cas comme par exemple les feuilletages compacts de sphères. Nous allons donc remplacer l'hypothèse $d\omega = 0$ par une condition plus faible (voir paragraphe 1) qui permet toujours l'application de la proposition (EMS) dans la preuve du théorème (EMS).

Dans le paragraphe 2 on démontre à l'aide de la version modifiée du théorème qu'un feuilletage compact d'une variété compacte est stable si l'on peut munir la variété d'une métrique riemannienne pour laquelle toutes les feuilles sont des sous-variétés minimales.

Il se pose maintenant deux questions: Ce critère, est-il aussi nécessaire? Est-ce qu'il y a une propriété topologique caractérisant les feuilletages de ce type?

Cette dernière question m'a été posé par D. Sullivan, et dans la réponse donnée dans les paragraphes 3–6 on retrouve quelques unes de ses idées qu'il a developpées dans [5] et [6]. La réponse affirmative à la première question est une conséquence, et cela généralise partiellement un théorème de A. W. Wadsley (Cf. [7]).

Le paragraphe 7 introduit la notion d'un feuilletage à feuilles parallèles et l'on étudie les relations entre cette notion et d'autres notions déjà connues.

Le présent travail comprend les résultats de deux preprints parus à l'I.H.E.S. "Feuilletages compacts et métriques riemanniennes" et "Une théorie de cohomologie relative pour les variétés feuilletées et son application aux feuilletages compacts." Je dois au referee quelques remarques (notamment la formulation de la proposition 7 et du théorème 4) qui m'ont permis de racourcir les deux articles sus-mentionnés pour en faire celui-ci.

Remarque. Dans tout ce qui suit on peut se passer de l'hypothèse d'orientabilité comme on voit par un passage à un revêtement approprié. Nous supposerons donc toujours sans le mentionner que les variétés et feuilletages considérés sont orientés.

1. Formes différentielles relativement fermées

Soit X une variété différentiable de dimension n, $\mathcal{T}X = (TX, \pi, X)$ son fibré tangent et $\mathcal{F} = (F, \pi, X)$ un sous-fibré vectoriel de $\mathcal{T}X$ de rang p. Notons par $A^p(X)$ l'ensemble des formes différentielles de degré p sur X.

DÉFINITION. Une forme différentielle $\omega \in A^p(X)$ est dite *relativement fermée par rapport à $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}$-fermée,* si l'on a $d\omega(x; \xi_1, \dots, \xi_p, \eta) = 0$, quels que soient $x \in X$, $\xi_1, \dots, \xi_p \in F_x$, $\eta \in T_xM$.

Remarque. Pour $p = n-1$, ω est relativement fermée si et seulement si ω est fermée.

THÉORÈME (EMS)'. *soit $\mathcal{F}$ un feuilletage compact de la variété X, et supposons qu'il existe une forme différentielle $\omega \in A^p(X)$ (p = dimension des feuilles) relativement fermée par rapport à $\mathcal{F}$ et telle que $\int_L \omega > 0$ pour chaque feuille L. Alors, le feuilletage $\mathcal{F}$ est stable.*

Démonstration. D'après notre remarque sur la démonstration du théorème (EMS) dans [1] à l'aide de la proposition (EMS) il suffit de vérifier $\int_{L_a} \omega = \int_{L_b} \omega$ si $(L_t)_{t \in [a,b]}$ est une isotopie de feuilles: soit $\varphi : L \times [a, b] \to X$ l'application définissant cette isotopie. On a donc

$$\int_{L_b} \omega - \int_{L_a} \omega = \int_{L \times \{b\}} \varphi^*\omega - \int_{L \times \{a\}} \varphi^*\omega$$

$$= \int_{\partial(L \times [a,b])} \varphi^*\omega = \int_{L \times [a,b]} d\varphi^*\omega = \int_{L \times [a,b]} \varphi^* d\omega$$

et la preuve est achevée si nous démontrons $\varphi^* d\omega = 0$. Soient donc $x \in L$, $\xi_1, \dots, \xi_p \in T_xL$ et $\partial/\partial t$ le vecteur tangent canonique à $[a, b]$ en t. Alors

$$\varphi^* d\omega\left(x, t; \xi_1, \dots, \xi_p, \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$= d\omega\left(\varphi(x, t); \varphi'(x, t; \xi_1), \dots, \varphi'(x, t; \xi_p), \varphi'\left(x, t; \frac{\partial}{\partial t}\right)\right) = 0,$$

parce que les vecteurs $\varphi'(x, t; \xi_1), \dots, \varphi'(x, t; \xi_p)$ appartiennent à $F_{\varphi(x,t)}$, l'espace tangent à la feuille L_t. □

2. Formes différentielles caractéristiques

Soit X une variété différentiable munie d'une métrique riemannienne $\langle\, , \rangle$. Pour un sous-fibré vectoriel de $\mathcal{T}X$ orienté et de rang p, $\mathcal{F} = (F, \pi, X)$, on introduit sa *forme caractéristique* $\chi_{\mathcal{F}} \in A^p(X)$ en posant pour $x \in X$.

$\chi_{\mathcal{F}}(x; \xi_1, \dots, \xi_p) = 1$ pour une base orthonormale positive $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ de F_x

et

$$\chi_{\mathscr{F}}(x; \eta_1, \ldots, \eta_p) = 0 \quad \text{si l'un des vecteurs } \eta_i \text{ est perpendiculaire à } F_x.$$

$\chi_{\mathscr{F}}$ est bien définie par ces données: si $(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ est une base orthonormale positive de F_x et que $\eta_1, \ldots, \eta_p$ sont des vecteurs dans T_xM, on a

$$\chi_{\mathscr{F}}(x; \eta_1, \ldots, \eta_p) = \det(\langle \xi_i, \eta_j \rangle_{i,j=1,\ldots,p}).$$

Si N est une variété intégrale de $\mathscr{F}$ dans X, son élément de volume orienté par rapport à la métrique riemannienne et l'orientation induites est précisément la restriction de $\chi_{\mathscr{F}}$ sur N.

Rappelons une caractérisation des *sous-variétés minimales* de la variété riemannienne X: Soit $x \in N$ et ν un champ de vecteur normal sur un voisinage de x dans N. Pour $\xi \in T_xN$ on pose

$$W_x^\nu(\xi) := -pr_x(D_\xi \nu),$$

où $D_\xi \nu$ dénote la dérivée covariante de ν en x dans la direction ξ et $\mathrm{pr}_x ; T_xM \to T_xN$ la projection orthogonale. $W_x^\nu(\xi): T_xN \to T_xN$ est une application linéaire symétrique par rapport au produit scalaire induit sur T_xN, appelée *l'application de Weingarten* associée à ν. La trace de W_x^ν décrit la variation de l'élément de volume pour une variation de N dans la direction de ν, et N est une sous-variété minimale de X si et seulement si toutes les applications de Weingarten sont de trace nulle.

PROPOSITION 1. *Soit $\mathscr{F}$ un sous-fibré vectoriel orienté intégrable du fibré tangent $\mathscr{T}X$. Alors, sa forme caractéristique $\chi_{\mathscr{F}}$ est relativement fermée par rapport à $\mathscr{F}$ si et seulement si toutes les variétés intégrales de $\mathscr{F}$ sont des sous-variétés minimales dans X.*

Démonstration. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_p, \nu$ des champs de vecteur sur un ouvert U dans X tels que les vecteurs $\xi_1(x), \ldots, \xi_p(x)$ forment une base orthonormale positive de F_x et que $\nu(x) \in F_x^\perp$ pour chaque $x \in U$. Il suffit de démontrer que dans ce cas $d\chi_{\mathscr{F}}(\xi_1, \ldots, \xi_p, \nu)$ est–au signe près–la trace de l'application de Weingarten associée à ν en tant que champ de vecteur normal sur les variétés intégrales de $\mathscr{F}$

dans U:

$$\begin{aligned} d\chi_{\mathcal{F}}(\xi_1, \ldots, \xi_p, \nu) = & \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \xi_i(\chi_{\mathcal{F}}(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p, \nu)) \\ & + (-1)^p \nu(\chi_{\mathcal{F}}(\xi_1, \ldots, \xi_p)) \\ & + \sum_{1 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \chi_{\mathcal{F}}([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_p, \nu) \\ & + \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+p+1} \chi_{\mathcal{F}}([\xi_i, \nu], \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p). \end{aligned}$$

De par la définition même de $\chi_{\mathcal{F}}$, les trois premières expressions sont nulles, et il ne reste que la dernière somme:

$$\begin{aligned} d\chi_{\mathcal{F}}(\xi_1, \ldots, \xi_p, \nu) = & \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+p+1} \chi_{\mathcal{F}}([\xi_i, \nu], \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p) \\ = & (-1)^p \sum_{i=1}^{p} \langle [\xi_i, \nu], \xi_i \rangle = (-1)^p \sum_{i=1}^{p} \langle D_{\xi_i}\nu - D_\nu \xi_i, \xi_i \rangle \\ = & (-1)^p \sum_{i=1}^{p} \langle D_{\xi_i}\nu, \xi_i \rangle = (-1)^{p+1} tr\, W^\nu, \end{aligned}$$

car $D_\nu \xi_i$ est perpendiculaire à ξ_i et pour une variété intégrale N de $\mathcal{F}$ passant par $x \in U$ on a

$$\begin{aligned} \langle D_{\xi_i}\nu, \xi_i \rangle(x) & = \langle D_{\xi_i(x)}\nu, \xi_i(x) \rangle \\ & = \langle pr_x(D_{\xi_i(x)}\nu), \xi_i(x) \rangle = -\langle W_x^\nu(\xi_i(x)), \xi_i(x) \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Remarque. Un calcul supplémentaire simple prouve que $\chi_{\mathcal{F}}$ est fermée si et seulement si $\chi_{\mathcal{F}}$ est $\mathcal{F}$-fermée et son complément orthogonal $\mathcal{F}^\perp$ est intégrable.

THÉORÈME 1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage orienté de la variété X, et supposons qu'il existe sur X une métrique riemannienne pour laquelle toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des sous-variétés minimales dans X. Alors, le feuilletage $\mathcal{F}$ est stable.*

Démonstration. La forme caractéristique $\chi_{\mathcal{F}}$ satisfait aux hypothèses pour la forme ω dans le théorème (EMS)′ du paragraphe 1.

Remarques. (1) La démonstration peut encore être simplifiée dans le sens suivant: Pour une feuille L, $\int_L \chi_{\mathcal{F}}$ est précisément son volume. L'énoncé de la proposition (EMS) est donc dans ce cas équivalent à la première conclusion que l'on en tire, c'est-à-dire $\int_{L_t} \omega$ n'est pas bornée pour $t \to \infty$. (Dans le cas général où ω ne représente pas l'élément de volume la preuve de cette conséquence de la proposition (EMS) n'est pas du tout triviale! Cf. [1] et [5], paragraphe 7.)

(2) Si les feuilles d'un feuilletage compact orienté de la variété X sont totalement géodésiques par rapport à une métrique riemannienne de X, ce sont a fortiori des sous-variétés minimales de X. Par conséquent le feuilletage est-il stable.

(3) Pour une variété compacte Kählérienne X, chaque feuilletage compact holomorphe est stable. C'est une conséquence du théorème (EMS) (cf. [1]); mais cela suit aussi du théorème 1.

3. Cohomologie de de Rham $\mathcal{F}$-relative d'une variété feuilletée

Soit X une variété différentiable de dimension n et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage différentiable de X de dimension p.

Disons qu'une r-forme différentielle $\omega \in A^r(X)$ est *$\mathcal{F}$-triviale* si $i_{\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p} \omega = 0$ quels que soient les vecteurs $\xi_1, \dots, \xi_p \in F_x$, $x \in X$.($i_{\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p} \omega$ est la $(r\text{-}p)$-forme sur T_xX obtenue à partir de $\omega(x)$ en fixant les p premiers arguments $\xi_1, \dots, \xi_p$). L'ensemble des r-formes $\mathcal{F}$-triviales est noté $A^r_{\mathcal{F}}(X)$. On a $A^r_{\mathcal{F}}(X) = A^r(X)$ pour $r < p$.

Nous posons $A^r_{\mathcal{F},d}(X) := A^r_{\mathcal{F}}(X) \cap d^{-1}(A^{r+1}_{\mathcal{F}}(X))$. C'est un sous-espace vectoriel de $A^r(X)$ avec $d(A^r_{\mathcal{F},d}(X)) \subseteq A^{r+1}_{\mathcal{F},d}(X)$. En définissant $A^r(X/\mathcal{F}) := A^r(X)/A^r_{\mathcal{F},d}(X)$ on obtient un complexe $A(X/\mathcal{F}) = \bigoplus_{r=0}^n A^r(X/\mathcal{F})$ avec opérateur différentiel induit par d. Ses groupes d'homologie sont appelés groupes de *cohomologie de de Rham $\mathcal{F}$-relative* et notés $H^r(X/\mathcal{F})$, $r = 0, \dots, n$.

On calcule facilement $H^r(X/\mathcal{F}) = 0$ pour $r < p$, et des groupes qui restent c'est surtout le premier, $H^p(X/\mathcal{F})$, que nous étudierons dans la suite, car il sera important pour la stabilité d'un feuilletage compact. Mais d'abord nous démontrons que la technique de Mayer-Vietoris s'applique à cette théorie de cohomologie $\mathcal{F}$-relative:

PROPOSITION 2. *Soit $X = X_1 \cup X_2$ la réunion de deux ouverts invariants X_1, X_2, et supposons qu'il existe pour le recouvrement (X_1, X_2) une partition de l'unité (h_1, h_2) avec des fonctions h_i constantes sur chaque feuille. (Précisons encore que* supp $(h_i) \subseteq \mathring{X}_i$, *l'intérieur de X_i par rapport à la topologie de X; on n'exige pas que* supp (h_i) *soit compact!) Alors il y a une longue suite exacte de Mayer-Vietoris*

$$\cdots \to H^r(X/\mathcal{F}) \to H^r(X_1/\mathcal{F}) \oplus H^r(X_2/\mathcal{F}) \to H^r(X_1 \cap X_2/\mathcal{F}) \to$$
$$\to H^{r+1}(X/\mathcal{F}) \to \cdots.$$

induite par les applications

$$\alpha : A^r(X) \to A^r(X_1) \oplus A^r(X_2) \quad et$$

$$\beta : A^r(X_1) \oplus A^r(X_2) \to A^r(X_1 \cap X_2) \quad définies\ par$$

$$\alpha(\omega) := (\omega|_{X_1}, \omega|_{X_2}), \qquad \beta(\varphi, \psi) := \varphi|_{X_1 \cap X_2} - \psi|_{X_1 \cap X_2}.$$

Démonstration. Il faut démontrer que les suites

$$(*)\ 0 \to A^r(X/\mathcal{F}) \xrightarrow{\bar{\alpha}} A^r(X_1/\mathcal{F}) \oplus A^r(X_2/\mathcal{F}) \xrightarrow{\bar{\beta}} A^r(X_1 \cap X_2/\mathcal{F}) \to 0$$

sont exactes où $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ sont induites par α et β respectivement. L'exactitude de (*) découle de celle des suites correspondantes pour A^r et $A^r_{\mathcal{F},d}$, et ce n'est que la surjectivité de $\beta : A^r(X_1) \oplus A^r(X_2) \to A^r(X_1 \cap X_2)$ et $\beta : A^r_{\mathcal{F},d}(X_1) \oplus A^r_{\mathcal{F},d}(X_2) \to A^r_{\mathcal{F},d}(X_1 \cap X_2)$ qui n'est pas évidente. Soit donc $\omega \in A^r(X_1 \cap X_2)$. Alors $h_1 \cdot \omega$ peut être continuée de façon triviale sur X_2 pour obtenir une forme $\omega_2 \in A^r(X_2)$ avec $\omega_2 |_{X_1 \cap X_2} = h_1 \cdot \omega$. La construction analogue nous fournit $\omega_1 \in A^r(X_1)$ avec $\omega_1 |_{X_1 \cap X_2} = h_2 \cdot \omega$, et on a $\omega = \beta(\omega_1, -\omega_2)$. Si $\omega \in A^r_{\mathcal{F},d}(X_1 \cap X_2)$, alors $\omega_i \in A^r_{\mathcal{F},d}(X_i)$, $i = 1, 2$, et c'est précisément ici qu'on utilise l'invariance des fonctions h_1, h_2. □

4. Dualité de Poincaré

Dans la suite on supposera que les *feuilles* de $\mathcal{F}$ sont *compactes.* Rappelons la notion d'une p-form *$\mathcal{F}$-fermée* introduite dans le paragraphe 1. C'est une forme $\omega \in A^p(X)$ avec $d\omega \in A^{p+1}_{\mathcal{F}}(X)$, c-à-d un représentant d'une classe de cohomologie dans $H^p(X/\mathcal{F})$. Soit L une feuille; un calcul simple montre que pour une p-forme $\mathcal{F}$-fermée ω l'intégrale sur cette feuille $\int_L \omega$ ne dépend que de la classe de cohomologie $[\omega] \in H^p(X/\mathcal{F})$.

PROPOSITION 3. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage stable, c'est-à-dire tel que le volume des feuilles soit une fonction localement bornée sur X. Alors, une p-forme $\mathcal{F}$-fermée ω représente la classe nulle dans $H^p(X/\mathcal{F})$ si et seulement si $\int_L \omega = 0$ pour chaque feuille L.*

Démonstration. L'implication "$\Rightarrow$" étant claire supposons que $\int_L \omega = 0$ et montrons $[\omega] = 0$! Nous traitons d'abord le cas spécial où X peut être considéré comme voisinage tubulaire d'une feuille L de sorte que X est représentable comme produit de Seifert (cf. [2], Théorème 4.3). Pour la projection $\pi : X \to L$ et l'injection canonique $j_L : L \to X$ il existe une homotopie $h : X \times I \to X$ avec $h_0 = j_L \circ \pi$ et $h_1 = id_X$ et telle que h_t applique chaque feuille dans une autre feuille. L'opérateur de contraction correspondant $K : A^r(X) \to A^{r-1}(X)$ a alors la propriété que l'image d'une forme différentielle $\mathcal{F}$-triviale est de nouveau $\mathcal{F}$-triviale. On a donc

$$\omega - \pi^*(j_L{}^*\omega) = Kd\omega + d\,K\omega,$$

où $Kd\omega$ est $\mathcal{F}$-triviale et $d\,K\omega$ exacte, ce qui implique

$$[\omega] = [\pi^*(j_L{}^*\omega)] \in H^p(X/\mathcal{F}).$$

Mais l'hypothèse $\int_L \omega = 0$ implique que $j_L{}^*\omega$ est exacte, et on a $[\omega] = 0$.

Nous remarquons ici que nous n'avons utilisé la condition $\int_L \omega = 0$ que pour la feuille centrale L du produit de Seifert. En effet, l'égalité $[\omega] = [\pi^*(j_L{}^*\omega)]$ prouve bien le résultat suivant que nous formulons comme lemme, car il nous sera utile plus bas:

LEMME 1. *Soit le feuilletage $\mathcal{F}$ de X stable et de sorte que X est un voisinage tubulaire d'une feuille L et que X peut être représenté comme produit de Seifert. Si ω est une p-forme $\mathcal{F}$-fermée, alors*

$$\int_{\tilde{L}} \omega = r \cdot \int_L \omega$$

pour chaque feuille $\tilde{L}$, où r est le degré de la projection $\pi \mid \tilde{L} \to L$ associée à la représentation de X comme voisinage tubulaire de L.

Continuons avec la preuve de la proposition 3 dans le cas général: Soit $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement localement fini de X par des ouverts invariants et représentables comme produit de Seifert, et soit $(h_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement et telle que les h_i sont constantes sur chaque feuille (voir lemme 2 ci-dessous). D'après ce que nous venons de démontrer plus haut, l'hypothèse $\int_L \omega = 0$ pour chaque feuille implique $[\omega \mid_{X_i}] = 0$ dans $H^p(X_i/\mathcal{F})$, $i \in I$. Il existe donc des élément $\alpha_i \in A^{p-1}(X_i)$ tels que les formes $\omega \mid_{X_i} + d\,\alpha_i$ sont $\mathcal{F}$-triviales, et $\omega + d\,\alpha$ est également $\mathcal{F}$-triviale, donc $[\omega] = 0$, si nous posons $\alpha := \sum_{i \in I} h_i \alpha_i$:

$$\omega + d\alpha = \sum_{i \in I} h_i(\omega + d\,\alpha_i) + \sum_{i \in I} d\,h_i \wedge \alpha_i,$$

et les termes de la première somme à droite sont $\mathcal{F}$-triviaux par hypothèse. Pour les formes $dh_i \wedge \alpha_i$ la $\mathcal{F}$-trivialité découle du fait que α_i est une $(p-1)$-forme et que $i_\xi \, dh_i = 0$ pour chaque $\xi \in F_x$, $x \in X$. □

LEMME 2. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage compact stable de la variété X, et soit $(X_i)_{i\in I}$ un recouvrement localement fini de X où chaque ouvert X_i est représenté comme produit de Seifert $X_i \cong \hat{L}_i \times_{G_i} D_i$ avec $\bar{D}_i$ compact dans X. Alors il existe une partition de l'unité différentiable $(h_i)_{i\in I}$ subordonnée au recouvrement $(X_i)_{i\in I}$ et telle que $h_i \geq 0$, $h_i \mid L = \text{const.}$ pour chaque feuille L.*

Démonstration. L'ensemble $K_i = D_i \setminus \bigcup_{j\neq i} W_j$ est compact dans D_i et stable pour l'opération de G_i. Il existe donc une fonction $k_i : D_i \to \mathbf{R}$, différentiable non-négative, G_i-invariante et à support compact avec $k_i \mid_{K_i} > 0$. On peut donc continuer k_i sur W_i de sorte que $k_i \mid_L = \text{const.}$ pour chaque feuille L dans W_i. En posant encore $k_i \; := 0$ en dehors de W_i on définit $h_i := k_i / \sum_{i\in I} k_j$, et ces fonctions constituent la partition de l'unité cherchée. □

Soit toujours $\mathcal{F}$ stable, c-à-d le volume des feuilles est une fonction localement bornée. L'espace des feuilles B muni de la topologie quotient est donc une variété différentiable généralisée (V-manifold) dans le sens de Satake, et l'application canonique $\pi : X \to B$ est différentiable et propre. B est de dimension $q = n - p$ (= codimension du feuilletage). Pour $\omega \in A^{p+j}(X)$ et $\psi \in A_c^{q-j}(B)$ (c-à-d ψ est à support compact), $0 \leq j \leq q$, on définit un produit $\langle \omega, \psi \rangle$ par l'intégrale

$$\langle \omega, \psi \rangle := \int_X \omega \wedge \pi^* \psi.$$

Si ω est $\mathcal{F}$-fermée et que ψ est fermée, ce produit ne dépend que des classes de cohomologie $[\omega] \in H^{p+j}(X/\mathcal{F})$ et $[\psi] \in H_c^{q-j}(B)$.

LEMME 3. *Le produit $\langle , \rangle : A^p(X) \times A_c^q(B) \to \mathbf{R}$, induit un monomorphisme $H^p(X/\mathcal{F}) \to H_c^q(B)^*$.*

Démonstration. Soit $[\omega] \neq 0$ dans $H^p(X/\mathcal{F})$. La proposition 2 nous garantit l'existence d'une feuille L_0 avec $\int_{L_0} \omega \neq 0$, donc $\int_{L_0} \omega > 0$, sans restriction. Pour un voisinage U de $\pi(L_0)$ dans B son image réciproque $W := \pi^{-1}(U)$ est un voisinage tubulaire de L_0 représentable comme produit de Seifert, et on a $\int_L \omega > 0$ pour chaque feuille L dans W d'après le lemme 1. Posons $f(y) := \int_{\pi^{-1}(y)} \omega$ pour $y \in U$. C'est une fonction intégrable et partout positive, et pour $\psi \in A_c^q(B)$ avec support compact dans U on prouve facilement la formule de Fubini

$$\langle \omega, \psi \rangle = \int_X \omega \wedge \pi^* \psi = \int_W \omega \wedge \pi^* \psi = \int_U f \cdot \psi.$$

Un choix approprié de ψ nous garantit donc $\langle \omega, \psi \rangle = \int_U f \cdot \psi > 0$, c-à-d la forme linéaire induite sur $H_c^q(B)$ par $[\omega]$ n'est pas nulle. □

LEMME 4. *Si le feuilletage $\mathcal{F}$ donne lieu à une représentation comme produit de Seifert pour X, alors $H^p(X/\mathcal{F}) \to H_c^q(B)^*$ est un isomorphisme.*

Démonstration. X est connexe (c'est sous-entendu pour un produit de Seifert), alors B aussi, et $H_c^q(B) \cong \mathbf{R}$. Il suffit donc de vérifier $H^p(X/\mathcal{F}) \neq 0$, ce qui est immédiat pour un produit de Seifert. □

LEMME 5. *Soit $B = B_1 \cup B_2$, $X_i := \pi^{-1}(B_i)$ avec des ouverts B_i tels que $H^p(X_i/\mathcal{F}) \cong H_c^q(B_i)^*$. Alors, $H^p(X/\mathcal{F}) \cong H_c^q(B)$.*

Démonstration. En appliquant la technique de Mayer-Vietoris aux deux théories de cohomologie nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & H^p(X/\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^p(X_1/\mathcal{F}) \oplus H^p(X_2/\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^p(X_1 \cap X_2/\mathcal{F}) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \longrightarrow & H_c^q(B)^* & \longrightarrow & H_c^q(B_1)^* \oplus H_c^q(B_2)^* & \longrightarrow & H_c^q(B_1 \cap B_2)^*
\end{array}$$

dont les deux lignes sont exactes. Les trois homomorphismes verticaux sont injectifs (cf. lemme 3), celui du centre est bijectif par hypothèse. Cela implique que le premier est également un isomorphisme. □

LEMME 6. *Soit $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ la réunion disjointe d'ouverts B_i tels que $H^p(X_i/\mathcal{F}) \cong H_c^q(B_i)^*$ pour $X_i := \pi^{-1}(B_i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Alors, $H^p(X/\mathcal{F}) \cong H_c^q(B)^*$.*

Démonstration. Le fait que les B_i sont disjoints nous fournit avec l'hypothèse ces isomorphies canoniques:

$$H^p(X/\mathcal{F}) \cong \prod_{i=1}^{\infty} H^p(X_i/\mathcal{F}) \cong \prod_{i=1}^{\infty} (H_c^q(B_i)^*) \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} H_c^q(B_i) \right)^* \cong H_c^q(B)^*. \quad \square$$

PROPOSITION 4. *Soit X une variété différentiable munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ à feuilles compactes et stable, de dimension p et de codimension q. Si B est l'espace* *des feuilles avec sa structure canonique de variété différentiable de Satake, alors le produit* $\langle\,,\rangle : A^p(X) \times A_c^q(B) \to \mathbf{R}$ *induit un isomorphisme* $H^p(X/\mathcal{F}) \cong H_c^q(B)^*$.

Démonstration. Nous suivons les traces de la preuve pour la dualité de Poincaré en cohomologie de de Rham ordinaire qu'on trouve dans [3]: Soit $\mathcal{O}$ une famille d'ouverts de B, et soit $\mathcal{O}_f$ l'ensemble des réunions finies d'éléments de $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_d$ celui des réunions dénombrables disjointes d'éléments de $\mathcal{O}$. Si $H^p(\pi^{-1}(U)/\mathcal{F}) \cong H_c^q(U)$ pour chaque ouvert $U \in \mathcal{O}$, alors c'est également vrai pour chaque ouvert dans $\mathcal{O}_f$ et dans $\mathcal{O}_d$ en vertu des lemmes 5 et 6, donc aussi pour chaque ouvert $U \in ((\mathcal{O}_f)_d)_f$. Or B a une base de la topologie $\mathcal{O}$, de sorte que $\pi^{-1}(U)$ est un produit de Seifert pour chaque $U \in \mathcal{O}$. Alors, $H^p(\pi^{-1}(U)/\mathcal{F}) \cong H_c^q(U)$ pour chaque $U \in \mathcal{O}$ par le lemme 4 et même pour chaque $U \in ((\mathcal{O}_f)_d)_f$ d'après ce que nous venons de dire. Mais $((\mathcal{O}_f)_d)_f$ contient chaque ouvert de B si $\mathcal{O}$ est une base, ce qui achève la démonstration. □

La proposition 4 nous garantit surtout l'existence d'une p-forme $\mathcal{F}$-fermée $\Delta_{\mathcal{F}}$ dont la classe de cohomologie $[\Delta_{\mathcal{F}}] \in H^p(X/\mathcal{F})$ correspond à la forme linéaire $\int_B : H_c^q(B) \to \mathbf{R}$. Appelons cette classe $[\Delta_{\mathcal{F}}]$ la *classe de volume canonique pour les feuilles* de $\mathcal{F}$, car $\int_L \Delta_{\mathcal{F}}$ définit un volume pour chaque feuille L, et l'on a $\int_L \Delta_{\mathcal{F}} = 1$ pour les feuilles génériques. Cependant il faut remarquer que la restriction $\Delta_{\mathcal{F}}|_L$ de $\Delta_{\mathcal{F}}$ à une feuile L n'y définit pas nécessairement un élément de volume, car $\Delta_{\mathcal{F}}|_L$ peut avoir des zéros bien que $\int_L \Delta_{\mathcal{F}} > 0$. C'est dans le paragraphe suivant que nous allons réparer cette faute de $\Delta_{\mathcal{F}}$.

5. Un critère de stabilité

Soit toujours $\mathcal{F}$ un feuilletage à feuilles compactes de la variété X. Une p-forme $\omega \in A^p(X)$ est dite *$\mathcal{F}$-positive* si $\omega(x; \xi_1, \ldots, \xi_p) > 0$ chaque fois que les vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_p \in F_x$ forment une base de cet espace qui est positive par rapport à l'orientation donnée. D'après le paragraphie 1, l'existence d'une p-forme ω à la fois $\mathcal{F}$-positive et $\mathcal{F}$-fermée implique la stabilité du feuilletage si la variété X elle-même est compacte. Ici nous allons démontrer que l'existence d'une telle forme est aussi nécessaire. En effet, une p-forme $\mathcal{F}$-positive et $\mathcal{F}$-fermée représente une classe $[\omega] \neq 0$ dans $H^p(X/\mathcal{F})$, et la classe $[\Delta_{\mathcal{F}}]$ introduite à la fin du paragraphe précédent est un bon candidat pour en trouver un représentant $\Delta_{\mathcal{F}}$ $\mathcal{F}$-positif et $\mathcal{F}$-fermé.

Rappelons quelques notions introduites par D. Sullivan et duales dans un certain sens aux nôtres, car elles concernent l'homologie de la variété feuilletée et sont formulées dans le langage des courants. Cette dualité s'exprime surtout dans la proposition 5 ci-dessous.

Soit $f: M \to X$ une application différentiable d'une variété différentiable quelconque M dans X. On dit que f est *tangente à* $\mathcal{F}$ si pour chaque $x \in M$.

$$f'(x)(T_xM) + F_{f(x)} = f'(x)(T_xM) \cup F_{f(x)}.$$

($f'(x)$ est la dérivée de f au point x.) Le feuilletage $\mathcal{F}$ admet une *homologie* $\mathcal{F}$*-tangente* s'il y a une suite $(c_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $(p+1)$-chaînes singulières différentiables tangentes à $\mathcal{F}$ et telles que la suite $(\partial c_i)_{i\in\mathbf{N}}$ des bords converge vers un *cycle de feuilletage* z. Quant à la dèfinition précise d'un cycle de feuilletage, voir [5], §1.

PROPOSITION 5. *Pour un feuilletage $\mathcal{F}$ de X où la variété X et les feuilles sont compactes il existe une p-forme $\mathcal{F}$-positive et $\mathcal{F}$-fermée si et seulement si $\mathcal{F}$ n'admet pas d'homologie $\mathcal{F}$-tangente.*

C'est le théorème de Sullivan mentionné plus haut, et l'on en trouve la démonstration dans [6]. (Une autre version concernant l'existence d'une p-forme $\mathcal{F}$-positive et fermée se trouve déjà dans [5].) Le referee m'a fait remarquer que cette proposition s'énonce également pour une variété non-compacte si l'on se restreint aux homologies $\mathcal{F}$-tangentes à support compact.

THÉORÈME 2. *Pour que le feuilletage $\mathcal{F}$ à feuilles compactes de la variété compacte X soit stable il faut et il suffit qu'il existe sur X une p-forme ω à la fois $\mathcal{F}$-positive et $\mathcal{F}$-fermée. Cette condition est aussi nécessaire dans le cas d'une variété non-compacte.*

Démonstration. Il faut encore prouver la nécessité du critère. Soit donc $\mathcal{F}$ stable, et soit ω une p-forme $\mathcal{F}$-fermée représentant la classe de volume canonique pour les feuilles (voir après proposition 4). Cette forme vérifie donc $\int_L \omega > 0$ pour chaque feuille L, ce qui est une conséquence immédiate de sa définition et du lemme 1. Mais ceci implique aussi $\langle z, \omega \rangle \neq 0$ pour chaque cycle de feuilletage z.

Supposons maintenant que $(c_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite de $(p+1)$-chaînes $\mathcal{F}$-tangentes et telles que $\lim \partial c_i$ existe. On a notamment pour notre forme ω

$$\left\langle \lim_{i\to\infty} \partial c_i, \omega \right\rangle = \lim_{i\to\infty} \int_{\partial c_i} \omega = \lim_{i\to\infty} \int_{c_i} d\omega = 0,$$

parce que les c_i sont $\mathcal{F}$-tangentes et que $d\omega$ est $\mathcal{F}$-triviale. Ceci prouve que $\lim_{i\to\infty} \partial c_i$ ne peut pas être un cycle de feuilletage, c-à-d que $\mathcal{F}$ n'admet pas d'homologie $\mathcal{F}$-tangente. D'après la proposition 5 il existe une p-forme à la fois $\mathcal{F}$-positive et $\mathcal{F}$-fermée. □

Il est clair que cette p-forme $\mathscr{F}$-positive et $\mathscr{F}$-fermée peut être choisie comme un représentant $\Delta_{\mathscr{F}}$ de la classe de volume canonique pour les feuilles. Sa $\mathscr{F}$-positivité garantit que la restriction $\Delta_{\mathscr{F}} \mid_L$ est bien un élément de volume pour chaque feuille L. Ce qui manque toujours à cette forme $\Delta_{\mathscr{F}}$, c'est la propriété d'être la forme de volume pour les feuilles induite par une métrique riemannienne sur X. Dans le paragraphe suivant nous allons encore améliorer $\Delta_{\mathscr{F}}$ dans ce sens.

6. Stabilité et minimalité

Nous revenons maintenant au critère de stabilité du paragraphe 2 en posant la question si ce critère suffisant est aussi nécessaire. En essayant de trouver la réponse à l'aide du théorème 2, Nous considérons donc un feuilletage compact stable $\mathscr{F}$ de la variété X, mais nous ne supposons pas que X soit compacte.

Existe-t-il une métrique riemannienne pour laquelle toutes les feuilles sont des sous-variétés minimales? Le théorème 2 nous garantit déjà l'existence d'une p-forme $\omega = \Delta_{\mathscr{F}}$ $\mathscr{F}$-positive et $\mathscr{F}$-fermée. Si cette forme ω est en outre pure, on trouve facilement une métrique riemannienne pour laquelle $\omega = \chi_{\mathscr{F}}$, la forme caractéristique de $\mathscr{F}$, et la réponse à la question posée plus haut est affirmative. Pour le cas où ω n'est pas pure, D. Sullivan a proposé l'opération suivante de "purification" de cette forme.

On en trouve la description dans [6]. La forme purifiée $\omega_{\mathscr{F}}$ est de nouveau $\mathscr{F}$-positive (on a même $\omega_{\mathscr{F}} \mid_L = \omega \mid_L$ pour chaque feuille L) et $\mathscr{F}$-fermée.

Comme nous avons expliqué brièvement au début du paragraphe, cela nous permet de tirer du théorème 2 la conclusion suivante:

THÉORÈME 3. *Le feuilletage $\mathscr{F}$ à feuilles compactes de la variété compacte X est stable si et seulement si il existe sur X une métrique riemannienne pour laquelle toutes les feuilles sont des sous-variétés minimales. L'existence d'une telle métrique est aussi nécessaire si X n'est pas compacte.*

Ce théorème généralise celui de A. W. Wadsley qui dit qu'un feuilletage $\mathscr{F}$ dont les feuilles sont des cercles est stable si et seulement si il existe sur la variété une métrique riemannienne pour laquelle ces cercles sont des géodésiques (cf. [7]). Il faut cependant mentionner que le théorème de Wadsley ne suppose pas la compacité de la variété dont nous avons besoin pour une partie du théorème 3. Il reste donc la question si le théorème 3 est valable sans cette hypothèse.

7. Feuilletages à feuilles parallèles

Soit X une variété riemannienne et $\mathscr{F}$ un sous-fibré vectoriel du fibré tangent $\mathscr{T}X$.

DÉFINITION. a) On dit que $\mathscr{F}$ est *géodésique* si pour chaque champ de vecteurs η sur un ouvert de X à valeurs dans $\mathscr{F}$ ses dérivées covariantes dans les directions de $\mathscr{F}$ sont également dans $\mathscr{F}$:

$$\eta \in \Gamma(U, \mathscr{F}),\, x \in U,\, \xi \in F_x \Rightarrow D_\xi \eta \in F_x.$$

b) On dit que $\mathscr{F}$ est *parallèle* si pour chaque champ de vecteurs η sur un ouvert de X à valeurs dans $\mathscr{F}$ ses dérivées covariantes dans les directions perpendiculaires à $\mathscr{F}$ sont également dans $\mathscr{F}$:

$$\eta \in \Gamma(U, \mathscr{F}),\, x \in U,\, \xi \in F_x^\perp \Rightarrow D_\xi \eta \in F_x.$$

Remarques. (1) Si $\mathscr{F}$ est géodésique, c'est un sous-fibré vectoriel intégrable de $\mathscr{T}X$, et ses variétés intégrales sont des sous-variétés totalement géodésiques dans X.

(2) Pour un feuilletage on parle de feuilles géodésiques ou parallèles respectivement. Quant aux feuilletages à feuilles géodésiques, voir la remarque (2) à la fin du paragraphe 2.

(3) Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante par translations à gauche et ad-invariante sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = T_eG$. Alors les classes à gauche modulo un sous-groupe connexe H sont géodésiques. Elles sont à la fois parallèles et géodésiques si H est un sous-groupe invariant.

PROPOSITION 6. *$\mathscr{F}$ est géodésique si et seulement si son complément orthogonal $\mathscr{F}^\perp$ est parallèle.*

Démonstration. Pour un ouvert U de X avec deux champs de vecteur $\eta \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ et $\zeta \in \Gamma(U, \mathscr{F}^\perp)$ et un vecteur tangent $\xi \in F_x$, $x \in U$, on a

$$\langle D_\xi \eta, \zeta(x)\rangle = -\langle \eta(x), D_\xi \zeta\rangle.$$

$\mathscr{F}$ est géodésique si et seulement si le terme à gauche de cette égalité est toujours nul (ξ, η, ζ étant choisis comme indiqué), tandis-que $\mathscr{F}^\perp$ est parallèle si ça vaut pour le terme à droite. $\square$

Pour illustrer cette proposition nous rappelons l'exemple de $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$, où les sphères avec centre 0 sont parallèles tandis que les rayons issus de l'origine sont géodésiques.

Rappelons brièvement la notion d'une "*bundle-like*" métrique, introduite par B. L. Reinhart dans [4]. C'est une métrique riemannienne sur la variété feuilletée X ayant la propriété suivante: Chaque point de X a un voisinage W difféomorphe à un produit $U \times V$ d'ouverts dans $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^q$ respectivement de sorte que les composantes connexes des intersections des feuilles avec W correspondent aux plaques $U\times\{v\}$, $v\in V$, et que V peut être munie d'une métrique riemannienne pour laquelle la projection $\pi: W\to V$ induit des isométries $\pi_*: F_x^\perp \to T_{\pi(x)}V$, $x\in W$.

Une telle "bundle-like" métrique induit une métrique riemannienne *transverse* au feuilletage $\mathcal{F}$, c-à-d une métrique riemannienne sur chaque sous-variété de X de codimension p et transverse aux feuilles, de sorte que ces métriques sont invariantes par le pseudo-groupe d'holonomie. Cette métrique transverse induit sur l'espace des feuilles une structure naturelle d'espace métrique, ce qui implique la stabilité de $\mathcal{F}$ si toutes les feuilles sont compactes.

PROPOSITION 7. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage parallèle de la variété riemannienne X. Alors la métrique de X est "bundle-like".*

Démonstration. Soit $x_0\in X$ et soit $L:=L_{x_0}$ la feuille passant par x_0. Pour un voisinage ouvert W de x_0 dans X on trouve des coordonnées $u^1,\dots,u^n$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) Les composantes connexes des intersections des feuilles avec W sont les plaques $\{u^{p+1}=\text{const.},\dots,u^n=\text{const.}\}$, et $L\cap W=\{u^{p+1}=\cdots=u^n=0\}$.

(ii) Les sous-variétés $\{u^1=\text{const.},\dots,u^p=\text{const.}\}$ sont perpendiculaires aux feuilles, et $D:=\{u^1=\cdots=u^p=0\}$ contient le point x_0. (Pour réaliser (ii), on utilise le fait que $\mathcal{F}^\perp$ est géodésique).

Avec $\xi_i:=\partial/\partial u^i$ on a pour $i=1,\dots,p$ et $j=p+1,\dots,n$

$$\begin{aligned}\xi_i\langle\xi_j,\xi_j\rangle&=2\langle D_{\xi_i}\xi_j,\xi_j\rangle\\&=2\langle D_{\xi_j}\xi_i,\xi_j\rangle+2\langle[\xi_i,\xi_j],\xi_j\rangle=0,\end{aligned}$$

car $[\xi_i,\xi_j]=0$ et $D_{\xi_j}\xi_i$ est dans $\mathcal{F}$ par l'hypothèse de parallélité.

Les conditions $\xi_i\langle\xi_j,\xi_j\rangle=0$ impliquent que les vecteurs $\xi_j(x)$ ont tous la même longuer pour x dans une plaque $\{u^{p+1}=\text{const.},\dots,u^n=\text{const.}\}$. Il s'agit donc d'une "bundle-like" métrique. □

Par conséquent, la métrique riemannienne de X pour laquelle le feuilletage $\mathcal{F}$ est parallèle induit une métrique riemannienne transverse au feuilletage et implique donc la stabilité si les feuilles sont compactes. Mais cette existence d'une métrique transverse ou encore la stabilité du feuilletage n'est certainement pas une condition nécessaire pour qu'il y ait une métrique riemannienne rendant $\mathcal{F}$ parallèle: La parallélité de $\mathcal{F}$ implique l'intégrabilité de $\mathcal{F}^\perp$, donc l'existence d'un complément intégrable de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{T}X$. Or il existe des feuilletages compacts stables sans aucun complément intégrable! (Par exemple, la fibration de Hopf de S^3).

Mais avec l'hypothèse supplémantaire de l'existence d'un complément intégrable on a le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de la variété X avec une métrique riemannienne transverse. Alors cette métrique dérive d'une métrique riemannienne sur X pour laquelle les feuilles sont parallèles si et seulement si $\mathcal{F}$ admet un complément intégrable.*

Démonstration. Il faut encore construire la métrique riemannienne sur X à partir d'une métrique riemannienne transverse à $\mathcal{F}$ et d'un complément intégrable $\tilde{\mathcal{F}}$. D'abord, la métrique transverse induit une métrique riemannienne sur le fibré vectoriel $\tilde{\mathcal{F}}$ et donc sur chaque variété intégrable de $\tilde{\mathcal{F}}$, et ces métriques sur ces variétés intégrales de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont invariantes par le pseudo-groupe d'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}$. Considérons un voisinage W d'un point x de X difféomorphe à un produit $U\times V$ de deux boules ouverts dans $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^q$ respectivement de sorte que les feuilles correspondent aux plaques $U\times\{v\}$, $v\in V$, et les variétés intégrales de $\tilde{\mathcal{F}}$ aux transversales $\{u\}\times V$, $u\in U$. Prenons sur U une métrique riemannienne arbitraire et sur V celle induit par $V\cong\{u\}\times V$ et la métrique sur la sous-variété intégrale $\{u\}\times V$ de $\tilde{\mathcal{F}}$. (Cette dernière ne dépend pas du choix de $u\in U$!), et munissons $W\cong U\times V$ avec la métrique produit.

De cette façon, on obtient des métriques riemanniennes pour des ouverts W_i d'un recouvrement ouvert localement fini $(W_i)_{i\in I}$ de X, qui rendent $\tilde{\mathcal{F}}$ géodésique et orthogonal à $\mathcal{F}$ tout en induisant sur chaque W_i la métrique transverse donnée. En recollant toutes ces métriques riemanniennes locales à l'aide d'une partition de l'unité on en obtient une sur l'ensemble de X ayant les mêmes propriétés. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] EDWARDS, R., MILLETT K. and SULLIVAN, D. *Foliations with all leaves compact*, Topology *1612* (1977), 73–32.

[2] EPSTEIN, D. B. A., *Foliations with all leaves compact*, IHES (Déc. 1974).

[3] GREUB, W., HALPERIN S., and R. VANSTONE, *Connections, curvature and cohomology*, Vol. I, Acad. Press (1972).

[4] REINHART, B. L., *Foliated manifolds with bundle-like metrics*, Ann. of Math. (2) *69* (1959), 119–132.

[5] SULLIVAN, D. *Cycles for the Dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds*, Inv. Math. *36*, (1976), 225–255.

[6] SULLIVAN, D. *A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces*, Comment. Math. Helv. *54*, (19 9), 000.

[7] WADSLEY, A. W. *Geodesic foliations by circles.*, Univ. of Warwick (1974?).

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35, route de Chartres
91440-Bures-sur-Yvette (France)

Reçu le 15 avril/25 mai 1978.