Comment. Math. Helvetici **52** (1977) 251–257 Birkhäuser Verlag, Basel

Analytische periodische Strömungen auf kompakten komplexen Räumen

HARALD HOLMANN (FREIBURG/SCHWEIZ)

0. Einleitung

D.B.A. Epstein zeigt in [7]:

Operiert die additive Gruppe $\mathbf{R}$ *der reellen Zahlen differenzierbar auf der* 3-*dimensionalen kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit* X, *so dass alle* $\mathbf{R}$-*Bahnen kompakt* 1-*dimensional* (homöomorph zu S^1) *sind, dann gibt es eine differenzierbare Operation der Kreisgruppe* S^1 *auf* X *mit den gleichen Bahnen.* (Bei differenzierbar ist stets zu ergänzen: von der Klasse C^r, $1 \leq r \leq \omega$).

Das hat zur Folge:

(1) *Alle* $\mathbf{R}$-*Bahnen sind stabil* (d.h. jede Umgebung einer Bahn enthält eine invariante Umgebung dieser Bahn).
(2) *Der Bahnenraum* $X/\mathbf{R}$ *hat eine kanonische Mannigfaltigkeitsstruktur* (d.h. unter anderem, dass die kanonische Projektion $\pi: X \to X/\mathbf{R}$ differenzierbar ist).
(3) $(X, \pi, X/\mathbf{R})$ *ist ein differenzierbarer Seifertscher Prinzipalfaserraum über* $X/\mathbf{R}$ *mit* S^1 *als Strukturgruppe.*

Dieser Satz von Epstein war die erste positive Antwort auf das folgende *Problem* von A. Häfliger:

Ist X *eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Blätterung, so dass alle Blätter kompakt sind, gelten dann die folgenden untereinander äquivalenten Aussagen?*
(1) *Alle Blätter sind stabil.*
(2) *Der zugehörige Blätterraum ist hausdorffsch.*
(3) *Alle Holonomiegruppen sind endlich.*

R. Edwards, K. Millett, D. Sullivan (siehe [6]) und E. Vogt (siehe [22]) konnten in Verallgemeinerung des Satzes von Epstein für 2-codimensionale differenzierbare

Blätterungen kompakter differenzierbarer Mannigfaltigkeiten das Problem von Häfliger ebenfalls positiv entscheiden. Analog zum Satz von Epstein ergibt auch hier die Blätterung einen differenzierbaren Seifertschen Faserraum über dem Blätterraum.

Für 3-codimensionale Blätterungen ist das Problem von Häfliger noch offen. Für 4-codimensionale Blätterungen wurden jedoch von Sullivan und Thurston (siehe [20], [21]) Gegenbeispiele in Form von 5-dimensionalen kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit differenzierbaren Blätterungen in Kreislinien angegeben, deren Blätter nicht alle stabil sind. Diese Gegenbeispiele lassen sich sogar reell-analytische konstruieren.

Für kompakte komplexe Räume mit holomorphen Blätterungen, so dass alle Blätter kompakt sind, ist Häfligers Frage, ob alle Blätter stabil sind, völlig offen. Selbst für nicht kompakte komplexe Räume hat man bisher noch keine Gegenbeispiele gefunden.

Die Verhältnisse scheinen hier völlig anders zu liegen. Im komplexanalytischen Kontext gelten z.B. die unten stehenden Versionen des Satzes von Epstein ohne alle Dimensionseinschränkungen. Bevor wir diese Aussagen formulieren, müssen wir noch einige Bezeichnungen einführen.

Sei X im folgenden ein (reduzierter) komplexer Raum. Versieht man die Gruppe $\mathrm{Aut}(X)$ der biholomorphen Selbstabbildungen von X mit der CO-Topologie, so erhält man eine topologische Gruppe (siehe [1]). Unter einer stetigen Operation einer topologischen Gruppe G auf X versteht man einen stetigen Gruppenhomomorphismus $h: G \to \mathrm{Aut}(X)$. Die Stetigkeit von h ist dabei äquivalent zur Stetigkeit der Operationsabbildung $\Phi_h: G \times X \to X$, die jedem Paar $(g, x) \in G \times X$ das Element $g(x) := h(g)(x)$ zuordnet. Ist G eine reelle (bzw. komplexe) Liesche Gruppe, so sagt man, G operiere reell-analtisch (bzw. holomorph) auf X, wenn die Abbildung $\Phi_h: G \times X \to X$ reell-analytisch (bzw. holomorph) ist. Es gilt (siehe [2], [3], [15]):

Operiert eine Liesche Gruppe stetig auf einem komplexen Raum, dann ist diese Operation sogar reell-analytisch.

Es ist somit sinnvoll zu definieren:

DEFINITION 1. Eine stetige Operation der additiven Gruppe $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen auf einem komplexen Raum X heisst eine reell-analytische Strömung auf X. Sind alle Bahnen $\mathbf{R}(x) := \{r(x); r \in \mathbf{R}\}$, $x \in X$. kompakt eindimensional (d.h. homöomorph zu S^1), so nennt man die Strömung periodisch.

DEFINITION 2. Eine holomorphe Operation der additiven Gruppe $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen auf einem komplexen Raum X heisst eine komplexanalytische oder holomorphe Strömung auf X. Sind alle Bahnen $\mathbf{C}(x) := \{z(x); z \in$

$\mathbf{C}\}$, $x \in X$, kompakt komplex eindimensional (Tori), so nennt man die Strömung periodisch.

Für holomorphe Strömungen gilt das folgende Analogon zum Satz von Epstein:

SATZ 1. *X sei ein zusammenhängender kompakter komplexer Raum mit einer periodischen holomorphen Strömung, dann gibt es eine holomorphe Operation einer komplexen Torusgruppe T auf X mit den gleichen Bahnen.*

Hieraus folgt sofort (siehe [10], [11], [17]):

COROLLAR 1. 1) *Der Bahnenraum $X/\mathbf{C} = X/T$ ist hausdorffsch bzgl. der Quotiententopologie.*
2) *$X/\mathbf{C}$ hat eine kanonische komplexe Struktur.*
3) *X ist bzgl. der kanonischen holomorphen Projektion $\pi: X \to X/T$ ein holomorpher Seifertscher Prinzipalfaserraum mit T als Strukturgruppe.*

Für reell-analytische Strömungen gilt das folgende Analogon zum Satz von Epstein:

SATZ 2. *X sei ein kompakter komplexer Raum mit einer periodischen reell-analytischen Strömung, dann gibt es eine reell-analytische Operation von S^1 auf X mit den gleichen Bahnen.*

COROLLAR 2. 1) *Der Bahnenraum $X/\mathbf{R} = X/S^1$ ist hausdorffsch.*
2) *$X/\mathbf{R}$ hat eine kanonische gemischt reell-komplex-analytische Struktur, vom Typ $(1, \dim_x X)$ in $x \in X$* (d.h. lokal hat $X/\mathbf{R}$ die Gestalt $I \times V$, wobei $I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und V ein komplexer Raum ist, vergleiche [14]).
3) *X ist bzgl. der kanonischen reell-analytischen Projektion $\pi: X \to X/S^1$ ein reell-analytischer Seifertscher Prinzipalfaserraum mit S^1 als Strukturgruppe.*

Bemerkung. In den Sätzen 1 und 2 erhält man die analytischen Operationen der Torusgruppe T bzw. der Kreisgruppe S^1 auf X, indem man $\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{R}$ jeweils nach dem Ineffektivitätskern der gegebenen Operationen durchdividiert und dann die induzierten Operationen nimmt. Im Gegensatz dazu muss man beim obigen Satz von Epstein die differenzierbare Operation von $\mathbf{R}$ erst neu definieren.

Die Beweise zu den obigen Sätzen und Corollaren sind in den folgenden Paragraphen 1 bzw. 2 ausgeführt.

Es sei noch bemerkt, dass der Satz von Epstein für nichtkompakte 3-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten i.A. falsch ist. Es sind schon länger 3-dimensionale nichtkompakte differenzierbare und reell-analytische Mannigfaltigkeiten mit differenzierbaren bzw. reell-analytischen Blätterungen in Kreislinien bekannt, deren Blätter nicht alle stabil sind (siehe z.B. [18], [7]). Für nichtkompakte komplexe Mannigfaltigkeiten gilt dagegen (siehe [13]):

X sei eine komplexe Mannigfaltigkeit, G eine zusammenhängende kommutative komplexe Liesche Gruppe, die holomorph auf X operiert. Alle G-Bahnen $G(x)$, $x \in X$, seien kompakt und reell 2-codimensional. Dann sind alle Bahnen stabil und der Bahnenraum X/G ist auf kanonische Weise eine Riemannsche Fläche.

1. Komplex-analytische Strömungen.

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit dem Beweis von Satz 1. Wir beginnen mit dem Spezialfall, dass X irreduzibel ist:

Da $\mathbf{C}$ holomorph auf X operiert, so definiert die Zuordnung $(z, x) \mapsto (z(x), x)$ für $z \in \mathbf{C}$, $x \in X$, eine holomorphe Abdildung

$$\psi : \mathbf{C} \times X \to X \times X.$$

Das Urbild $Y := \psi^{-1}(\Delta)$ der Diagonalen $\Delta := \{(x, x);\ x \in X\}$ von $X \times X$ unter der Abbildung ψ ist eine analytische Menge in $\mathbf{C} \times X$. Bezeichnet $I_x := \{z \in \mathbf{C};\ z(x) = x\}$ jeweils die Isotropiegruppe im Punkte $x \in X$ der holomorphen Operation von $\mathbf{C}$ auf X, so ist Y nichts anderes als die Familie $\bigcup_{x \in X} I_x \times \{x\}$ dieser Isotropiegruppen. Die I_x, $x \in X$, sind nach Voraussetzung $\mathbf{Z}$-Moduln, die jeweils von zwei über $\mathbf{R}$ linear unabhängigen komplexen Zahlen erzeugt werden.

Zu jedem $x_0 \in X$ gibt es eine Umgebung U, eine analytische Menge S in U mit $x_0 \in S$ und eine Umgebung V von 0 in $\mathbf{C}$, so dass die Zuordnung $(z, y) \mapsto z(y)$ für $z \in V$ und $y \in S$ eine biholomorphe Abbildung $V \times S \to U$ definiert (siehe [12], S. 102, Theorem 2). Hieraus folgt, dass $I_x \cap V = \{0\}$ für alle $x \in U$. Da X kompakt ist, gibt es wegen des Ueberdeckungssatzes von Heine-Borel sogar eine Umgebung V von 0 in $\mathbf{C}$, so dass $V \cap I_x = \{0\}\ \forall x \in X$.

$p : \mathbf{C} \times X \to \mathbf{C}$ und $q : \mathbf{C} \times X \to X$ bezeichnen die kanonischen Projektionen. p ist wegen der Kompaktheit von X eine eigentliche holomorphe Abbildung. Auf Grund des Remmertschen Abbildungssatzes (siehe [19], S. 356, Satz 23) ist $p(Y)$ eine analytische Menge in $\mathbf{C}$. Da $p(Y) \cap V = \{0\}$ ist, so kann $I := p(Y)$ nur aus isolierten Punkten von $\mathbf{C}$ bestehen. Da $q(Y') = X$ für $Y' := Y - (\{0\} \times X)$ und da $Y' \subset p^{-1}(p(Y')) = (I - \{0\}) \times X$, so muss $\dim Y' = \dim X$ sein. Das ist aber wegen der Irreduzibilität von X nur möglich, wenn Y' mindestens eine irreduzible

Komponente der Form $\{z_1\}\times X$ mit $z_1 \in I-\{0\}$ hat. Das bedeutet, es existiert ein $z_1 \neq 0$ in $\bigcap_{x\in X} I_x$. Auf gleiche Weise findet man noch einen weiteren Punkt $z_2 \neq 0$ in $\bigcap_{x\in X} I_x$, so dass z_1, z_2 über $\mathbf{R}$ linear unabhängig sind.

Wir haben damit ein Gitter $G:=\mathbf{Z}\cdot z_1+\mathbf{Z}\cdot z_2$ in $\mathbf{C}$ gefunden, das in allen Isotropiegruppen I_x, $x \in X$, enthalten ist. Die holomorphe Operation von $\mathbf{C}$ auf X induziert folglich eine holomorphe Operation der komplexen Torusgruppe $T:=\mathbf{C}/G$ auf X, so dass die Zerlegung von X in T-Bahnen gleich der vorgegebenen Zerlegung von X in $\mathbf{C}$-Bahnen ist.

Wir behandeln jetzt den allgemeinen Fall, wo X reduzibel sein kann. Da X kompakt ist, zerfällt es in höchstens endliche viele irreduzible Komponenten $X_1, \ldots, X_N$.

Die holomorphe Operation von $\mathbf{C}$ auf X induziert durch Beschränkung holomorphe Operationen von $\mathbf{C}$ auf X_ν mit reell 2-dimensionalen kompakten Bahnen für $\nu=1,\ldots,N$. Wie wir gerade bewiesen haben, ist $G_\nu := \bigcap_{x\in X_\nu} I_x$ ein 2-dimensionales Gitter in $\mathbf{C}$.

Wir zeigen nun, dass auch $G:=\bigcap_{\nu=1}^{N} G_\nu$ ein zweidimensionales Gitter in $\mathbf{C}$ ist. Da X zusammenhängend vorausgesetzt ist, können wir annehmen, dass die irredziblen Komponenten $X_1,\ldots,X_N$ so durchnumeriert sind, dass $X^{(n)}:=X_1\cup\cdots\cup X_n$ für $n=1,\ldots,N$ jeweils zusammenhängend ist. Wir beweisen durch Induktion über n, dass $G^{(n)}:=\bigcap_{\nu=1}^{n} G_\nu$ für $n=1,\ldots,N$ ein zweidimensionales Gitter in $\mathbf{C}$ ist. Der Induktionsbeginn $n=1$ ist klar. Sei nun für $n<N$ angenommen, dass $G^{(n)}$ ein zweidimensionales Gitter ist. Dann wählen wir ein $x\in X^{(n)}\cap X_{n+1}$. Da $G^{(n)}$ und G_{n+1} in I_x enthalten sind, so ist auch $G^{(n+1)}=G^{(n)}\cap G_{n+1}$ ein zweidimensionales Gitter in $\mathbf{C}$.

Wir im obigen Spezialfall induziert die holomorphe Operation von $\mathbf{C}$ auf X eine holomorphe Operation der komplexen Torusgruppe $T:=\mathbf{C}/G$ auf X mit den gleichen Bahnen.

2. Reell-analytische Strömungen.

BEWEIS ZU SATZ 2. Wir können ohne weiteres annehmen, dass X zusammenhängend ist. Da X kompakt ist, so stellt $\mathrm{Aut}(X)$ eine komplexe Liesche Gruppe dar mit holomorpher Operationsabbildung $\Phi:\mathrm{Aut}(X)\times X\to X$, $(g,x)\mapsto g(x)$ (siehe [3], [16]). Nach Voraussetzung operiert $\mathbf{R}$ stetig auf X mittels eines stetigen Homomorphismus $h:\mathbf{R}\to\mathrm{Aut}(X)$. Als stetiger Homomorphismus zwischen Liegruppen ist h sogar reell-analytisch. Da $\mathbf{C}$ die universelle Komplexifizierung (siehe [8], S. 204) von $\mathbf{R}$ ist, so lässt sich h eindeutig fortsetzen zu einem holomorphen Homomorphismus $\hat{h}:\mathbf{C}\to\mathrm{Aut}(X)$. Wir haben also eine holomorphe Operation $\Phi_{\hat{h}}:\mathbf{C}\times X\to X$ von $\mathbf{C}$ auf X, deren Beschränkung auf $\mathbf{R}$ die gegebene reell-analytische Strömung $\Phi_h:\mathbf{R}\times X\to X$ ist.

Wie beim Beweis von Satz 1 zeigt man, dass es im Durchschnitt $\bigcap_{x\in X} I_x$ der Isotropiegruppen I_x von $\mathbf{C}$ eine reelle Zahl $r\neq 0$ gibt, d.h. $r\cdot\mathbf{Z}$ liegt in allen Isotropiegruppen I_x, $x\in X$. Die holomorphe Operation von $\mathbf{C}$ auf X induziert also eine holomorphe Operation von $\mathbf{C}/r\mathbf{Z}$ und durch Beschränkung eine reellanalytische Operation von $\mathbf{R}/r\mathbf{Z}$ auf X. Die Operation von $\mathbf{R}/r\mathbf{Z}$ auf X hat die gleichen Bahnen wie die gegebene Operation von $\mathbf{R}$.

Die Zuordnung

$$\mathbf{C}/r\cdot\mathbf{Z}\ni[z]\overset{j}{\mapsto}\exp\frac{2\pi iz}{r}\in\mathbf{C}^*:=\mathbf{C}-\{0\}$$

definiert einen holomorphen Isomorphismus zwischen den komplexen Lieschen Gruppen $\mathbf{C}/r\cdot\mathbf{Z}$ und $\mathbf{C}^*$, so dass wir Satz 2 wie folgt ergänzen können.

ZUSATZ ZU SATZ 2. *Es gibt eine holomorphe Operation der multiplikativen Gruppe* $\mathbf{C}^*:=\mathbf{C}-\{0\}$ *auf* X *mit komplex eindimensionalen Bahnen, so dass die Beschränkung dieser Operation auf* $S^1:=\{z\in\mathbf{C};\,|z|=1\}$ *die gleichen Bahnen wie die gegebene Operation von* $\mathbf{R}$ *auf* X *hat.*

Beweis zu Corollar 2. 1) Da S^1 kompakt ist und folglich eigentlich auf X operiert, so ist X/S^1 hausdorffsch (siehe [4], §4, No. 2, Prop. 3).

2) Da sich die gegebene stetige Operation von $\mathbf{R}$ auf X eindeutig zu einer holomorphen Operation $\Phi:\mathbf{C}\times X\to X$ von $\mathbf{C}$ auf X fortsetzen lässt, wobei alle Isotropiegruppen diskret sind, so gibt es zu jedem $x\in X$ eine offene Umgebung U, eine analytische Menge $A\subset U$ mit $x\in A$, so dass $V_\varepsilon\times A$ durch Φ biholomorphe auf U abgebildet wird, wobei $V_\varepsilon:=\{z=x+iy\in\mathbf{C};\,|x|<\varepsilon,\,|y|<\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$ (siehe [12], S. 102, Theorem 2). Den Mengen $V_\varepsilon\times\{a\}$, $a\in A$, entsprechen folglich $\mathbf{C}$-Bahnenstücke und den Mengen $\{z=x+iy\in V_\varepsilon;\,y=\text{const}\}\times\{a\}$, $a\in A$, $\mathbf{R}$-Bahnenstücke in U.

Wir können annehmen (siehe Hilfssatz 1, S. 428 in [9]), dass A gegenüber der endlichen Isotropiegruppe S^1_x von S^1 im Punkte x invariant ist.

S^1_x bestehe aus den Elementen $g_1,\dots,g_N$. Es gibt reelle Zahlen $r_1,\dots,r_N$, so dass $g_i=j[r_i]$, $[r_i]\in\mathbf{R}/r\mathbf{Z}$, für $i=1,\dots,N$. Für $x'\in X$ ist dann $g_i(x')=\Phi(r_i,x')$.

$\phi:V_\varepsilon\times A\to U$ bezeichne die durch Beschränkung von Φ definierte biholomorphe Abbildung. Die transformierte Automorphismengruppe $\Gamma_x:=\{\gamma_i:=\phi^{-1}\circ g_i\circ\phi;\,i=1,\dots,N\}$ von $V_\varepsilon\times A$ hat dann folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\gamma_i(z,a)&=\phi^{-1}(g_i(\Phi(z,a))=\phi^{-1}(\Phi(r_i,\Phi(z,a)))\\&=\phi^{-1}(\Phi(z,\Phi(r_i,a))=\phi^{-1}(\Phi(z,g_i(a)))=(z,g_i(a))\end{aligned}$$

für $(z,a)\in V_\varepsilon\times A$, $\quad i=1,\dots,N$.

$\tilde{U} := S^1(U)$ ist eine offene $\mathbf{R}$-invariante Umgebung von x, wobei der Quotientenraum $\tilde{U}/S^1$ auf kanonische Weise zu $(-\varepsilon, \varepsilon) \times A/S^1_x$ homöomorph ist. A/S^1_x hat eine kanonische komplexe Struktur (siehe [5]). Hieraus folgt sofort, dass $X/S^1 = X/\mathbf{R}$ eine kanonische gemischt reell-komplex-analytische Struktur vom angegebenen Typus besitzt.

3) Dies ist ein Spezialfall von Satz 4, S. 149 in [11].

LITERATUR

[1] ARENS, R., *Topologies for homeomorphism groups.* Amer. J. Math. *68*, 593–610 (1946).

[2] BOCHNER, S., MONTGOMERY D., *Locally compact groups of differentiable transformations.* Ann. of Math. *47*, 639–653 (1946).

[3] BOCHNER, S., MONTGOMERY D., *Groups on analytic manifolds.* Ann. of Math. *48*, 659–669 (1947).

[4] BOURBAKI, N., Topologie Générale, Chap. 3, Hermann, Paris (1960).

[5] CARTAN, H., Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. Algebraic Geometry and Topology. A symposium in honor of S. Lefschetz, 90–102, Princeton University Press (1957).

[6] EDWARDS, R., MILLETT, K., SULLIVAN, D., Foliations with all leaves compact. Publ. I.H.E.S., June 1975.

[7] EPSTEIN, D. B. A., *Periodic flows on threemanifolds.* Ann. of Math. *95*, 66–82 (1972).

[8] HOCHSCHILD, G., The structure of Lie groups. Holden-Day (1965).

[9] HOLMANN, H., *Quotienten komplexer Räume.* Math. Ann. *142*, 407–440 (1961).

[10] HOLMANN, H., *Komplexe Räume mit komplexen Transformationsgruppen.* Math. Ann. *150*, 327–360 (1963).

[11] HOLMANN, H., *Seifertsche Faserräume.* Math. Ann. *157*, 138–166 (1964).

[12] HOLMANN, H., Local properties of holomorphic mappings. Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Minneapolis, Springer (1965).

[13] HOLMANN, H., Holomorphe Transformationsgruppen mit kompakten Bahnen. Proceedings of the third Rumanian-Finnish Seminar on Complex Analysis, Bucharest 1976.

[14] JURCHESCU, M., Variétés mixtes. Proceedings of the third Rumanian-Finnish Seminar on Complex Analysis, Bucharest 1976.

[15] KAUP, W., *Infinitesimale transformationsgruppen komplexer Räume.* Math. Ann. *160*, 72–92 (1965).

[16] KERNER, H., *Ueber die Automorphismengruppen kompakter komplexer Räume.* Arch. Math. *11*, 282–288 (1960).

[17] ORLIK, P., Seifert manifolds. Lecture Notes in Mathematics *291*, Springer (1972).

[18] REEB, G., *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées.* Act. Sci. et ind. No 1183, Hermann, Paris (1952).

[19] REMMERT, R., *Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume.* Math. Ann. *133*, 328–370 (1957).

[20] SULLIVAN, D., *A new flow.* Bull. Am. Math. Soc., *82*, 331–332 (1976).

[21] SULLIVAN, D., A counterexample to the periodic orbit conjecture. Publ. I.H.E.S., No 46 (1976).

[22] VOGT, E., *Foliations of codimension 2 with all leaves compact.* Manuscripta math., *18*, 187–212 (1976).

Eingegangen dem 4 Oktober 1976